

Justificando el resultado de la suma de dos números pares. Dificultades y errores*

María Consuelo Cañadas Santiago y Encarnación Castro Martínez
(Universidad de Granada)

Nivel educativo: E.S.O. – Bachillerato

En este trabajo utilizamos los razonamientos que llevan a cabo doce alumnos de Secundaria durante la resolución de una tarea matemática para detectar los errores en que incurren y las dificultades que encuentran en su ejecución. Se les propone la tarea en un contexto de entrevista semiestructurada en la que se guía a los alumnos por el camino a seguir. Entre los datos que se obtienen, se encuentran los errores aparecidos en el desarrollo de la tarea. El análisis de dichos errores se ha hecho siguiendo las clasificaciones de Evans (González, 1998) y Radatz (1979), y se conectan dichos errores con dificultades específicas siguiendo la clasificación de Socas (1997). Se concluye este trabajo con algunas reflexiones que consideramos interesantes para profesionales de la enseñanza de las matemáticas.

Introducción

Se conoce y acepta, de forma generalizada, que muchas personas encuentran dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Estas dificultades conducen, entre otras cosas, a incurrir en errores al resolver tareas relacionadas con las matemáticas, ya sea en el aula o fuera de ella. Dado que los factores que influyen en el proceso educativo son muy diversos, el estudio de las dificultades se puede abordar desde diferentes perspectivas: la propia disciplina matemática, los procesos de enseñanza de las matemáticas, los procesos cognitivos de los alumnos o la actitud hacia las matemáticas (Socas, 1997).

Nuestro interés por las maneras de aprender, nos ha llevado a centrar la atención en el razonamiento inductivo y en los procesos utilizados por sujetos cuando ponen en juego dicho razonamiento (Cañadas, 2002; Cañadas y Castro, 2002a; Cañadas y Castro, 2002b). El razonamiento es, según Moliner (1986), la serie de ideas encadenadas que conducen a una conclusión y según González (1998) el razonamiento se considera como una acción del pensamiento. La clasificación que distingue entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo ha sido heredada de la Filosofía clásica y, entre los rasgos que permiten esta distinción, se encuentran las conclusiones que se alcanzan. Si en la conclusión queda incluida la información que viene dada, se trata de un proceso deductivo y la conclusión tiene valor de verdad. El proceso es inductivo y la conclusión será probable si la conclusión va más allá de lo dado. Esta idea permite teóricamente establecer una división entre estos dos tipos de razonamiento; sin embargo, en la prác-

* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

tica, no resulta fácil encontrar el razonamiento inductivo o deductivo en estado puro sino que aparecen estrechamente unidos. Así lo señala Ibañes (2001), quien apunta la dificultad de separar los esquemas de trabajo inductivos y deductivos.

Uno de los pilares de nuestro trabajo es la resolución de problemas, entendemos que es una forma adecuada de acercarnos al razonamiento de los individuos (Cañadas, 2002). Consideramos, de acuerdo con Callejo (1987, p. 91), *que la resolución de problemas matemáticos es una actividad altamente formativa por los conocimientos, las destrezas y los tipos de razonamiento que en ella se ponen en juego*; y tomamos de Lester (1983; citado por Pozo et al, p. 17) la definición de problema como *una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución*.

En este trabajo centraremos nuestra atención en los errores y dificultades que han presentado doce alumnos de Secundaria en la resolución de la tarea o problema matemático de justificar que el resultado que se obtiene al sumar dos números pares es un número par. Para realizar el análisis del trabajo de los alumnos, utilizamos la clasificación de las dificultades de Socas (1997) y dos clasificaciones sobre errores que atienden a criterios diferentes (Radatz, 1979; González, 1998).

Clasificaciones de dificultades y errores

Los errores han sido objeto de reflexión para diferentes filósofos, entre los que destacan Popper, Bachelard, Russell y Lakatos. De las reflexiones de estos autores, se extraen conclusiones relativas al interés de considerar los errores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se constata que el análisis de errores es un tema frecuentemente tratado en la educación matemática a lo largo de la historia desde diferentes posturas, aproximaciones e intereses (Evans, citado por González, 1998; Radatz, 1980; Socas, 1997). Socas (1997) considera cinco categorías de dificultades en relación con la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas asociadas a diversas causas: a) dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, los conflictos relativos a la comprensión y comunicación; b) en otra categoría, también relacionada con la propia disciplina, considera las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático que se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de las matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático; c) en una tercera categoría, las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, hacen referencia a la institución escolar, el currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza; d) según los procesos cognitivos de los alumnos, las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos centran su atención en la naturaleza del aprendizaje y el conocimiento del desarrollo intelectual; e) finalmente, la quinta categoría, las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas se refiere a la falta de una actitud racional hacia las matemáticas.

En cuanto a los errores, las clasificaciones que consideramos son hechas desde puntos de vista diferentes. La primera clasificación, desde una perspectiva psicológica, se centra en el razonamiento y diferencia entre errores formales y errores informales. Los errores formales son aquellos en los que se viola alguna regla de inferencia. Los errores informales son aquellos que dependen del contenido, se deben a un uso o a una interpretación inadecuada del contenido del argumento (Evans, citado por González, 1998). En

este trabajo consideramos que los errores formales son los errores cometidos en el razonamiento y que los errores informales son los errores de contenido matemático. Además, tenemos en cuenta que existen errores informales conceptuales y errores informales procedimentales. El siguiente esquema resume la primera clasificación que consideramos:

Errores	Formales	
	Informales	Conceptuales
		Procedimentales

Desde la teoría del procesamiento de la información, se indican causas de errores que se pueden reconocer en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Radatz, 1979). Desde esta perspectiva tomamos la segunda clasificación de errores que utilizaremos en nuestro análisis y que considera los siguientes tipos de errores:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Son los errores cometidos en la traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Son errores relacionados con el pensamiento y las imágenes espaciales.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Es probable que los alumnos hayan resuelto un problema que consideren parecido al que se enfrentan y recurran a él aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática no sean las mismas.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Descripción de la actividad

La tarea que analizamos en este trabajo estaba inmersa en una actividad en la que se propusieron dos tareas matemáticas para que los alumnos trabajaran individualmente, en el contexto de entrevistas semiestructuradas y dirigidas a analizar el razonamiento que llevaban a cabo los alumnos de Secundaria seleccionados. Los alumnos podían contestar oralmente y/o por escrito en los folios que se les entregaron. Contaron, como máximo, con una hora de tiempo para realizar las dos tareas. La entrevistadora tomó notas, durante y después de las entrevistas de aquellos aspectos que consideraba relevantes y que pudieran pasar desapercibidos en las grabaciones audio.

Tarea propuesta

La tarea en la que estamos centradas consistía en conseguir que los alumnos explicitaran un razonamiento sobre la propiedad cuyo enunciado es: *al sumar dos números pares el resultado es otro número par*. Esta es una propiedad conocida por los estudiantes de los niveles elegidos, aunque no se les haya hecho reflexionar anteriormente sobre ella. *Se trata de una propiedad de divisibilidad relacionada con los múl-*

tiplos de dos. Si designamos por $2N$ todos los múltiplos de 2, donde N representa el conjunto de los números naturales y se considera la misma operación de suma que en los números naturales, la propiedad implícita en la tarea indica que la suma es una operación cerrada en el conjunto $2N$. Una demostración de este hecho se puede efectuar tomando dos elementos cualesquiera de $2N$, por ejemplo $2a$ y $2b$. Sumando dichos elementos se obtiene $2a+2b=2(a+b)$ este resultado también está dentro del conjunto $2N$, por tanto es un número par, lo que se asegura que la operación es cerrada (Cañadas, 2002, p. 49). Durante la realización de la tarea la entrevistadora intenta que el alumno dé una justificación de la propiedad que convenza, tanto a ellos mismos, como a la entrevistadora aunque esta justificación no tiene por qué coincidir con la demostración formal de la propiedad.

Sujetos

En la actividad participaron doce alumnos de Secundaria de un centro granadino. Tres eran alumnos de 3º de ESO, tres de 4º, tres alumnos de 1º de Bachillerato y otros tres de 2º. Buscando una amplia gama de respuestas, los alumnos fueron elegidos por sus profesores, atendiendo al interés de que participaran de cada curso un alumno de alto rendimiento en matemáticas, otro de rendimiento medio y un tercero de bajo rendimiento.

Resultados

La entrevistadora presenta a los alumnos la cuestión de la manera siguiente “¿sabes qué resultado da la suma de dos números pares?”. La respuesta de todos los alumnos una vez aclaradas las dudas fue correcta: “Un número par”. Una vez enunciada la conjetura (la suma de dos números pares da otro número par), se trata de dar una justificación a dicha afirmación. Esta es una tarea para la que el alumno conoce el resultado, los errores se detectan al hacer la justificación de las conjeturas que ellos mismos formulan.

Todos los estudiantes emplean razonamiento inductivo, entendido éste como el proceso de tomar casos particulares para tratar de obtener la conjetura para el caso general. Tres de los alumnos entrevistados hacen cálculos con casos particulares antes de afirmar que la suma de dos números pares da como resultado otro número par. El análisis comienza por la detección de los errores en el trabajo que realizan los alumnos, que son la forma de expresión de las dificultades que presentan, y continuará con la identificación de las dificultades.

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que incurrieron en cada tipo de error al tratar de justificar la paridad del resultado de sumar dos números pares, según la clasificación de Evans (citado por González, 1998).

	ERRORES		
	Formales	Informales	
		Conceptuales	Procedimentales
Secundaria	0	1	3
Bachillerato	0	1	1

Todos los errores son de tipo informal. Este hecho corrobora que los alumnos a los que se les ha planteado la actividad poseen aquellas capacidades cognitivas que les permiten realizar los tipos de razonamiento que el ejercicio requiere. De este modo, no aparecen dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

Dos alumnos cometen errores conceptuales. Un alumno de 3º de ESO se refiere a la composición de los números cuando lo que está tratando es la terminación de los números, como se observa en esta transcripción de su entrevista: "... como los números en matemáticas son también composiciones de números, se supone que si los números básicos, que son del 0 al 10, que son los que se usan, se van combinando. Si los pares de los números básicos se van sumando y dan números pares, en el resto que son combinaciones de éstos será todo igual...". Se trata de un error debido a dificultades en el lenguaje y pone de manifiesto una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos que está relacionada con la comunicación de un hecho matemático. Este alumno no ha tenido en cuenta la exactitud y precisión que se requiere en el lenguaje matemático y que es una de las características que lo diferencian del lenguaje ordinario. Otro alumno de los entrevistados (de 1º de Bachillerato) comete un error conceptual al hablar de paridad de los números racionales. Nos encontramos ante un error debido a una asociación incorrecta. Se trata de una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Este alumno ha trasladado el concepto de paridad, característico de los números naturales, al contexto de los números racionales.

Como se ve en la tabla anterior, tres alumnos de Secundaria incurren en errores informales de tipo procedimental al expresar que para caracterizar un número par cualquiera basta con considerar x . Este error es debido a una dificultad de lenguaje ya que estos alumnos expresan verbalmente sus razonamientos de forma correcta pero presentan el error al traducir sus razonamientos desde el esquema semántico del lenguaje natural a un esquema más formal del lenguaje matemático. Se trata de una dificultad asociada a los objetos de las matemáticas.

De nuevo el error procedimental que comete un alumno de 2º de Bachillerato proviene de una dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Este alumno habla de "máximo común denominador" cuando se debería referir al factor común de dos números. Se trata de un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos que pone en evidencia la dificultad que representa para este alumno trabajar con conceptos específicamente matemáticos como son el máximo común divisor, el común denominador y el factor común.

Conclusiones

Tras plantear una tarea cuyo resultado es conocido por los alumnos se comprueba, por la respuesta dada a la pregunta de la investigadora de manera casi inmediata, que todas las dificultades detectadas han sido asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Cinco de las seis dificultades detectadas de este tipo, son debidas a la expresión en lenguaje matemático. Aunque ninguno de los alumnos expresó dudas sobre su conjetura, sus justificaciones no fueron, en ningún caso, inmediatas.

En las argumentaciones de los alumnos aparecen unas dificultades que deben superarse si se pretende que razonen y expresen sus razonamientos de una forma precisa y rigurosa.

rosa. De este modo, los profesores quedan advertidos de los aspectos sobre los que deberán prestar mayor atención en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El primer paso para superar las dificultades es detectarlas. El análisis de la actividad, el conocimiento de las capacidades cognitivas de los alumnos y los errores en los que han incurrido, nos ha permitido detectar las dificultades que los alumnos han encontrado.

El análisis de los errores y dificultades nos ha ayudado a reflexionar sobre aspectos relacionados con el enunciado y contenido del problema, sobre el desarrollo cognitivo de los alumnos y sobre la adecuación del problema a los alumnos que lo van a trabajar.

Teniendo en cuenta que toda instrucción es potencialmente generadora de errores, el profesor debe tratar de preverlos y considerarlos. Este análisis de errores y dificultades puede contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, ya que constituye un método para lograr mayor comprensión y apoyo para las producciones y el entendimiento de los alumnos.

Bibliografía

- CALLEJO, M. L. (1987). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Narcea.
- CAÑADAS, M. C. & CASTRO, E. (2002a). Errores en la resolución de problemas de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. CASTRO, MORENO, A. & M. PEÑAS (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, 147-153.
- CAÑADAS, M. C. & CASTRO, E. (2002b). *La importancia del razonamiento en la formación de profesores. Comunicación en Jornadas sobre Formación Inicial de Profesores*. Granada.
- CAÑADAS, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- GONZÁLEZ, M. J. (1998). *Introducción a la Psicología del Pensamiento*. Madrid: Editorial Trotta.
- IBAÑES, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de Bachillerato*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. (España).
- MOLINER, M. (1986). *Diccionario de María Moliner*. Madrid: Editorial Gredos.
- POZO, J. I. et al. (1994). *La solución de problemas*. Santillana: Madrid.
- RADATZ, H. (1979). *Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.

- **RADATZ, H.** (1980). *Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. For the Learning of Mathematics*, 1, 16-20.
- **SOCAS, M.** (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En **L. RICO** (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: editorial Horsori.