Artigo

TRANSFORMAÇÕES LINEARES NOS LIVROS DIDÁTICOS:
uma análise em termos de registros de representação semiótica

Monica Karrer[1]
Ana Paula Jahn[2]

Resumo: Este artigo visa apresentar um estudo sobre o objeto de ensino *transformação linear*, realizado sob o ponto de vista da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2000). Concordando com a afirmação desse autor de que, em Matemática, a aquisição de um objeto passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas desse objeto, interessamo-nos em investigar as características semióticas – *representação, tratamento* e *conversão* – relativas a esse conteúdo matemático, tal qual ele se apresenta nos livros didáticos. Para tanto, selecionamos três obras didáticas de Álgebra Linear, freqüentemente presentes nas referências bibliográficas de cursos da área de ciências exatas, de universidades renomadas do país, a fim de verificarmos quais são os registros utilizados na abordagem das transformações lineares e que tipo de exploração é realizada na passagem de um registro a outro. Nossas análises revelam que os livros didáticos apresentam particularidades na forma de explorar os possíveis registros e apontam a existência de deficiências, principalmente no que se refere à utilização do registro gráfico e às conversões entre esse e os demais registros.

Palavras-Chave: Registro de representação semiótica, conversão, transformações lineares, livros didáticos.

1. INTRODUÇÃO

Em seu trabalho de pesquisa, Duval (2000) procura evidenciar a importância da análise do papel das representações, quando se considera um objeto matemático. Um grande problema na aprendizagem Matemática está ligado ao fato de que não é possível acessar um objeto matemático por meio de um instrumento ou, mesmo, pela percepção, dada sua natureza "não real". Com isso, torna-se necessária uma relação de denotação, a qual é possível por meio de um sistema semiótico. Entende-se por sistema semiótico, ou registro de representação, um sistema de signos que permite cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação, não fazendo referência somente às notações convencionais que, por sua vez, não constituem um sistema. Além da língua natural, em Matemática podemos citar como exemplos de sistemas semióticos: o sistema numérico, o algébrico e o gráfico.

Assim, Duval (1995) pressupõe que a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica. Sua teoria está inserida no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a principal preocupação reside na análise das condições cognitivas internas, necessárias para o estudante entender Matemática, as quais compõem o que ele intitula de *arquitetura cognitiva*. Desta forma, na concepção desse autor, o entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, por conseqüência, um indivíduo aprende Matemática se ele integra, em sua arquitetura

[1] Doutoranda do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP. E-mail: mkarrer@uol.com.br
[2] Professora-pesquisadora do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP. E-mail: jahn@pucsp/br

cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação. Em outras palavras, Duval (1995) expressa questões relativas à aprendizagem matemática relacionando, fundamentalmente, os processos de *semiosis* e *noesis*. Entende-se por *semiosis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e, por *noesis*, os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Segundo o autor, "não há *noesis* sem *semiosis*" (1995, p. 5), ou seja, não há aquisição conceitual (conhecimento) de um objeto sem recorrer a sistemas semióticos (representações). Com isso, as representações mentais e as representações semióticas não podem ser vistas como dois domínios totalmente diferentes; ao contrário, há uma estreita interdependência entre elas, de tal maneira que, para garantir o primeiro passo na direção da *noesis*, é necessária a *semiosis*.

Várias pesquisas (HILLEL, SIERPINSKA, 1995; DIAS, 1998; BITTAR, 1998; DORIER, 1998) comprovam que grande parte dos estudantes, independente do nível de ensino, ao converter a representação de um objeto matemático de um sistema semiótico em uma representação de outro sistema, conclui, inadequadamente, que tais representações referem-se a dois objetos distintos. Exemplificando: o conteúdo de um gráfico de uma função não é o mesmo daquele de sua expressão analítica, apesar de denotarem o mesmo objeto matemático.

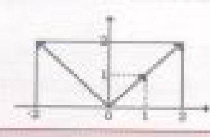
> Sempre que um sistema semiótico é alterado, o conteúdo da representação muda, enquanto o objeto denotado permanece o mesmo. Mas como objetos matemáticos não podem ser identificados com nenhuma de suas representações, vários estudantes não podem discriminar o conteúdo da representação e o objeto representado...[3] (DUVAL, 2000, p. 59).

Segundo D'Amore (2003), esse fato deve ser analisado com muito cuidado pelo professor, uma vez que o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos. Se o professor não tiver consciência desse fato, acreditará que o estudante estará aprendendo conceitos, enquanto, na realidade, ele está "aprendendo", apenas, a utilizar signos. Diante dessa problemática, seria interessante uma abordagem didática que permitisse ao estudante distinguir um objeto matemático de uma representação semiótica particular e reconhecer um objeto matemático através de suas diferentes representações. Para isso, de acordo com Duval (1995), deve-se estabelecer uma coordenação consciente da variedade de sistemas semióticos inerentes a um conceito.

Há dois tipos de transformação entre representações: o tratamento e a conversão. O tratamento é a transformação produzida em um sistema, que resulta em outra representação nesse mesmo sistema. Os sistemas que possibilitam esse tipo de transformação são denominados registros de representação. Já a conversão é a transformação que parte de uma representação em determinado sistema e que produz uma representação diferente em outro sistema. Esse tipo de transformação pode ser exemplificado ao construir um gráfico a partir de uma equação dada, ao escrever uma equação partindo de um gráfico ou ao traduzir uma afirmação verbal em simbologia algébrica. O quadro, a seguir, apresenta um exemplo de tratamento e outro de conversão no estudo das transformações lineares.

Podemos notar que, no primeiro tipo de transformação, o desenvolvimento do exercício envolveu tratamentos no registro simbólico-

Quadro 1 – Exemplos de Tratamento e Conversão

Sejam $T: R^2 \to R^2$ e $S: R^2 \to R^2$ / $T(x,y) = (2x, 2y)$ e $S(x,y) = (-x, y)$. Determinação de SoT.	
TRATAMENTO	**CONVERSÃO**
a) $T(x,y) = (2x,2y)$ *e* $S(x,y) = (-x,y)$. *Então,* $SoT(x,y) = S(T(x, y)) =$ $= S(2x, 2y) = (-2x, 2y)$.	***b)*** $T(x,y) = (2x,2y)$ *e* $S(x,y) = (-x,y)$. Então, SoT(x,y) é uma expansão uniforme de fator 2, seguida de uma reflexão em relação ao eixo y. 

[3] Traduzido por nós do original em inglês.

algébrico. Já no segundo tipo de transformação, o exercício envolveu mudanças de sistema semiótico, ou seja, conversões do simbólico-algébrico para a língua natural e desta para o registro gráfico.

Duval atribui papel central às conversões entre registros, já que na sua teoria, o processo de conceitualização está intimamente relacionado com a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação distintos.

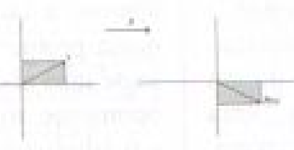
Diante deste panorama e tomando por base os principais pressupostos e conceitos teóricos explicitados por Duval, interessamo-nos em analisar de que forma alguns livros didáticos de Álgebra Linear desenvolvem as conversões entre os registros no conteúdo das transformações lineares, o que será descrito a seguir.

2. A ESCOLHA DOS LIVROS E ASPECTOS ANALISADOS

A escolha dos livros didáticos a serem analisados deu-se a partir de uma pesquisa das obras didáticas de Álgebra Linear, adotadas pelos cursos da área de exatas, de uma amostra de doze universidades renomadas do país. Desta coleta, selecionamos dois livros considerados "clássicos" dessa disciplina e, freqüentemente, presentes nas referências analisadas, os quais serão identificados por **Livro 1** e **Livro 2**, e uma obra de edição mais atual, a qual será identificada por **Livro 3**, que, embora menos citada em tais referências, apresenta diferenças significativas de abordagem em relação aos demais.

Realizamos a análise da parte teórica e dos exercícios propostos dos seguintes tópicos relacionados às transformações lineares: introdução às transformações lineares (introdução, definição, exemplos); transformações geométricas no plano e no espaço; núcleo e imagem de uma transformação linear e matriz de uma transformação linear. Destes tópicos, analisamos os tipos de representação semiótica, presentes, e as conversões estabelecidas entre os possíveis registros. A tabela, a seguir, identifica os tipos de registro utilizados na análise.

Tabela 1 – Classificação dos Registros

Tipo de registro	Representações
Registro simbólico	*Representação simbólico-algébrica: T(x,y,z) = (x,x+y+z) **(Livro 3, p. 154)** *Representação simbólico-matricial: Ex: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ **(Livro 2, p. 148)**
Registro gráfico	*Representação gráfica Ex:  **(Livro 2, p. 148)**
Registro numérico	*Representação em n-uplas Ex: F(1,2) = (3, -1) **(Livro 1, p.108)** *Representação tabular Ex: $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$ **(Livro 1, p. 140)**
Registro da língua natural	*Representação da língua natural em emprego comum (analisada em situações-problema) Ex: Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta x=y. **(Livro 2, p. 171)** *Representação da língua natural em emprego especializado Seja F: U→V uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), ...F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora. **(Livro 1, p. 111)**

3. RESULTADOS DA ANÁLISE

3.1. Livro 1

3.1.1. Parte Teórica e Exercícios Resolvidos

Na introdução às transformações lineares, tanto nas definições como nos exemplos e exercícios resolvidos, os registros dominantes são o simbólico-algébrico e o da língua natural especializada, ou seja, não há exploração dos registros gráfico e simbólico-matricial. Cabe observar, ainda, que, devido à inexistência de situações-problema ou aplicações utilizando a denominação do quadro anterior, o registro da língua natural, em emprego comum, também não ocorre. Ainda, o registro numérico tem ocorrência restrita ao cálculo da imagem de elementos. As conversões são pouco exploradas e limitadas, principalmente, entre os registros simbólico-algébrico e da língua natural especializada.

As transformações no plano e no espaço, praticamente, não são abordadas nessa obra. No bloco de exercícios resolvidos, há um exemplo sobre homotetia, porém, sem apelo ao registro gráfico, como pode ser verificado no quadro a seguir.

Quadro 2 - Livro 1 – Exercício Resolvido nº 10 (p. 109)

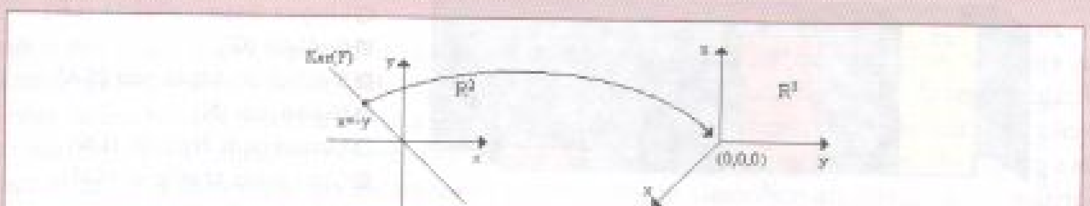
Seja V um espaço vetorial sobre R. Dado $\alpha \in R$ chama-se homotetia determinada pelo escalar α a aplicação $H\alpha\, V \to V$ tal que $H\alpha(u) = \alpha.u,\ \forall u \in V$. Mostrar que $H\alpha$ é um operador linear de V.

Solução: a) $H\alpha(u_1+u_2) = \alpha(u_1+u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2 = H\alpha(u_1) + H\alpha(u_2)$ b) $H\alpha(tu) = \alpha(tu) = t(\alpha u) = t.\ H\alpha(u)$

Ao tratar do tema "Núcleo e Imagem", os autores apresentam a definição formal, seguida de um exemplo, no qual eles exploram a conversão do registro simbólico-algébrico para o gráfico, conforme exposto no quadro seguinte.

Quadro 3 - Livro 1 – Núcleo de uma Transformação Linear (p. 111)

Seja F: $R^2 \to R^3$ a transformação linear dada por: $F(x,y) = (0, x+y, 0)$. Achemos o núcleo de F.
Temos: $(x,y) \in Ker(F) \leftrightarrow (0, x+y, 0) = (0,0,0) \leftrightarrow x=-y$. Logo, $Ker(F) = \{(x,-x)/x \in R\}$



A partir deste ponto, o conteúdo é desenvolvido somente nos registros simbólico-algébrico, da língua natural especializada, e numérico, tornando as conversões limitadas entre esses sistemas. No tópico sobre matriz de uma transformação linear, os registros dominantes são: o numérico, tanto na forma tabular como na representação de n-uplas, o simbólico-algébrico e o da língua natural especializada, sendo que as conversões mais presentes são aquelas entre os registros simbólico e numérico e do registro da língua natural especializada para o numérico. O quadro, a seguir, contém o enunciado de um exemplo que aponta para este último tipo de conversão.

Quadro 4 - Livro 1 – Exercício Resolvido nº 8 Sobre Matriz de uma Transformação Linear (p.134)

Seja V um espaço vetorial de dimensão 3. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Sendo F o operador linear de V tal que $F(e_1) = e_2$ e que deixa fixos todos os vetores de $W = \{xe_1+ye_2+ze_3/\ x-y+z=0\}$, determine $(F)_B$.

3.1.2. Exercícios Propostos

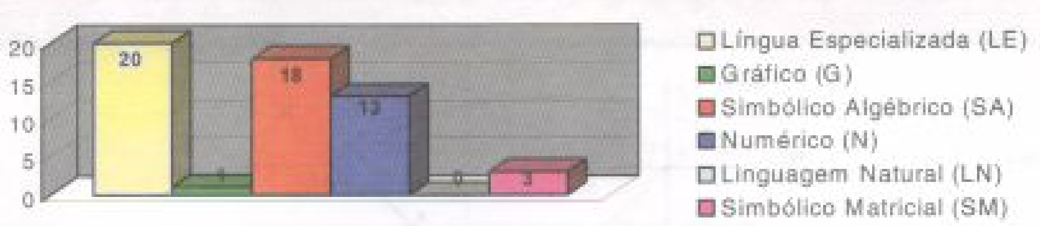
Na introdução ao conceito, há dez exercícios propostos, sendo que todos solicitam algum tipo de demonstração. Em dois exercícios, há itens que envolvem a determinação da transformação linear. A maior parte dos exercícios é proposta ou no registro da língua natural especializada ou no simbólico-algébrico, direcionando o aluno a efetuar a resolução no interior do sistema semiótico, apresentado no enunciado, ou explorando conversões limitadas entre estes dois registros ou, ainda, entre eles e o registro numérico. Não há qualquer exercício a respeito das transformações geométricas no plano ou no espaço. Quanto ao conteúdo de núcleo e imagem, o livro propõe quinze questões, sendo cinco de prova relacionados às transformações em espaços vetoriais genéricos. Neste tópico, os exercícios são enunciados, principalmente, nos registros da língua natural especializada, simbólico-algébrico ou numérico, sendo que o aluno tem a possibilidade de resolvê-los utilizando conversões limitadas, principalmente entre estes registros. O exemplo a seguir apresenta um exercício cuja resolução aponta para a conversão do registro numérico para o simbólico-algébrico.

Quadro 5 - Livro 1 – Exercício Proposto nº 7 (p. 122)

Considere o operador linear F do R^3 definido por $F(1,0,0) = (1,1,1)$; $F(0,1,0) = (1,0,1)$ e $F(0,1,2) = (0,0,4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

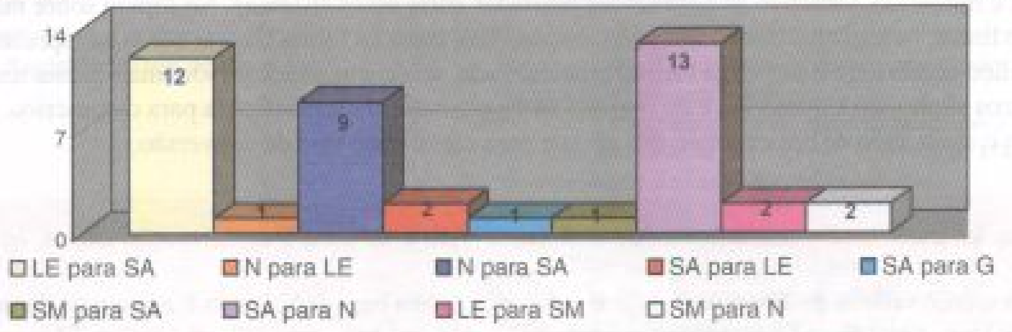
Pudemos, ainda, constatar que, nesta seção, o registro gráfico ocorre em apenas um exercício. Com relação ao tópico de matriz de uma transformação linear, há um total de dezesseis exercícios propostos, desenvolvidos nos registros da língua natural especializada, simbólico (algébrico e matricial) e numérico, sendo o registro simbólico-algébrico o predominante. Há dois tipos básicos de exercício em relação a este conteúdo: o de determinação da matriz de uma transformação linear, dadas uma base do domínio, e outra do contradomínio e o de determinação da transformação linear, dada a matriz e fixadas as bases. A seguir, serão apresentados os gráficos que sintetizam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas, explicitamente, nos enunciados dos quarenta e um exercícios sobre transformações lineares, propostos no livro.

Gráfico 1 – Tipo de Registro Presente no Enunciado



Nota - Total de exercícios propostos no Livro 1: 41

Gráfico 2 – Tipo de Conversão (ou Tratamento com Mudança de Representação) Exigido na Resolução



Nota - Total de exercícios propostos no Livro 1: 41

3.1.3. Conclusão

Diante do exposto, conclui-se que as transformações lineares do **Livro 1**, tanto na parte teórica como nos exercícios, são desenvolvidas basicamente em três registros: o simbólico, o numérico e o da língua natural especializada. As conversões são pouco trabalhadas e estão limitadas, praticamente, nos registros citados, evidenciando uma deficiência na exploração, principalmente, dos registros gráfico e da língua natural em situações-problema, bem como as possíveis conversões entre eles.

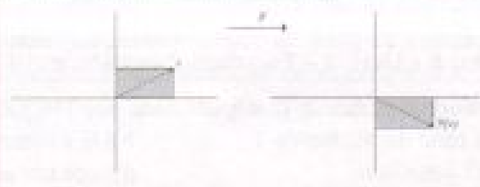
3.2. Livro 2

3.2.1. Parte Teórica

Esta obra já introduz o conceito explorando um pouco mais a diversidade de registros. Inicialmente, apresenta dois problemas que envolvem os registros da língua natural, o registro numérico na forma tabular, o registro gráfico e os registros simbólicos nas duas representações. Apesar de a abordagem explorar, inicialmente, as conversões entre registros, nesses dois problemas iniciais, após a definição das transformações lineares, nota-se o predomínio do registro simbólico.

O livro desenvolve um tópico específico das transformações do plano no plano (*"Transformações do plano no plano", p. 147)*, tratando a expansão (ou contração) uniforme, a reflexão em torno do eixo x, a reflexão na origem, a rotação de um ângulo q e o cisalhamento horizontal. Apresenta a translação como um exemplo de uma aplicação não linear. No tratamento da composição das transformações lineares, exemplifica com a composta de duas transformações no plano, no caso, uma expansão uniforme de fator 2, seguida de um cisalhamento horizontal de fator 2 . Em todos os casos, o livro apresenta os registros simbólico (nas duas representações) e gráfico, conforme ilustrado a seguir.

Quadro 6 - Livro 2 – Transformações Lineares do Plano no Plano (p. 148)

Reflexão em Torno do Eixo- x: $F: R^2 \to R^2$ $(x,y) \mapsto (x,-y)$	 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Na maioria dos casos, a abordagem parte do registro simbólico-algébrico para o gráfico. Somente ao tratar da rotação de um ângulo q, é feita a dedução da representação simbólico-algébrica partindo da representação gráfica. Com isso, nota-se que há uma preocupação em apresentar o conceito explorando registros distintos, oferecendo ao leitor uma visão mais abrangente do tema estudado, porém, verifica-se que nessa apresentação teórica a abordagem não favorece ao aluno a construção do tratamento da representação simbólico-algébrica para a matricial ou das conversões entre os registros simbólico e gráfico, já que tais transformações são estabelecidas pelos autores, de uma maneira finalizada, sem a descrição de como são feitas.

Ao abordar o tópico relativo a núcleo e imagem, há um exemplo que explora a conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico e para o gráfico, conforme apresentado no quadro abaixo.

Quadro 7 - Livro 2 – Núcleo e Imagem (p.152)

$T: R^2 \to R$

$(x,y) \to x+y$ Neste caso temos $\ker T = \{(x,y) \in R^2;\ x+y=0\}$, isto é, $\ker T$ é a reta $y=-x$. Podemos dizer ainda que $\ker T = \{(x,-x);\ x \in R\} = \{x(1,-1);\ x \in R\} = [(1,-1)]$. $\operatorname{Im} T = R$, pois dado $w \in R$, $w = T(w,0)$

Em seguida, é apresentado um outro exemplo de núcleo e imagem, que trata da conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico. Porém, a partir desse ponto, no decorrer do desenvolvimento teórico deste tema, há um predomínio do registro da língua natural especializada, seguido do simbólico-algébrico. Ao lidar com as matrizes, a obra apresenta os registros gráficos de um vetor em duas bases ortogonais distintas. Apesar disso, novamente não é detalhada a conversão realizada entre os registros numérico, simbólico e gráfico. Já no momento de apresentar o processo de obtenção da transformação linear ou da determinação da matriz, são tratadas apenas as conversões entre os registros simbólico-algébrico e numérico tabular. Por fim, os conceitos de matriz de mudança de base, a relação entre posto e nulidade com as dimensões da Imagem e do Núcleo, respectivamente, a composição entre transformações obtidas através de matrizes e de matriz da inversa são desenvolvidos predominantemente no registro da língua natural especializada.

3.2.2. Exercícios Propostos

O livro apresenta cinco exercícios propostos, relacionados à introdução do conceito, sendo três de prova e dois de determinação de uma transformação linear. Neles são apresentados os registros da língua natural especializada, numérico e simbólico (algébrico e matricial), porém, o registro de representação simbólico-algébrico é o predominante. Há pouca exploração de conversões, sendo a maior parte relacionada às transformações do registro numérico para o simbólico-algébrico. Ao tratar das transformações geométricas, o livro apresenta nove exercícios, sendo cinco relacionados com a transformação do plano no plano e quatro com as transformações no espaço, todos exigindo a determinação da aplicação a partir do registro da língua natural. Na maior parte das questões, não há nenhuma solicitação para que o aluno represente essa transformação no registro gráfico, sendo que todas as respostas apresentadas no final do capítulo são dadas, exclusivamente, nos registros simbólico ou numérico. Ainda, várias questões podem ser resolvidas por simples consulta à teoria, não sendo necessária a tentativa de partir da representação gráfica. Com relação ao conteúdo de núcleo e imagem, há oito exercícios formulados, principalmente, nos registros da língua natural especializada, numérico e simbólico. Somente uma questão trata do registro gráfico, explicitamente, no enunciado, como pode ser observado no item "d" do exercício apresentado a seguir.

Quadro 8 - Livro 2 – Exercício Proposto nº 19 (p.173)

Considere a transformação linear T: $R^3 \rightarrow R^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x\text{-}y, -z)$.

a)Determine uma base do núcleo de T

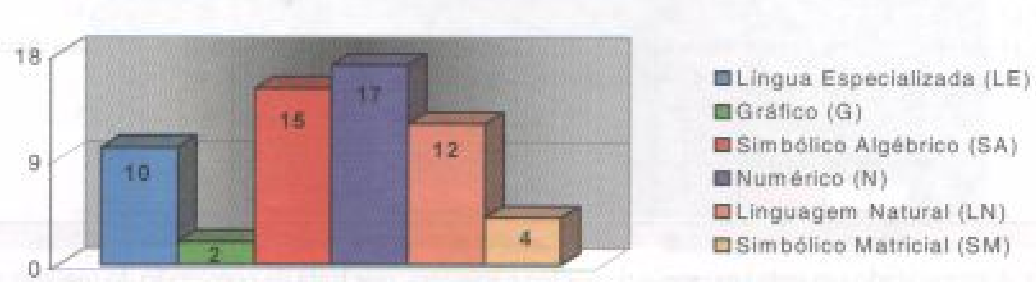
b)Dê a dimensão da imagem de T

c)T é sobrejetora? Justifique.

d)Faça um esboço de kerT e ImT.

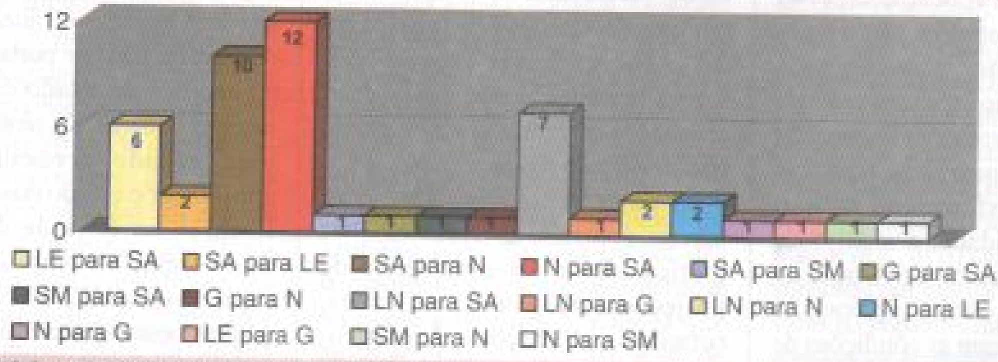
As matrizes são tratadas em dez exercícios, enunciados nos registros da língua natural, numérico e simbólico, sendo o numérico o predominante. As conversões mais presentes são aquelas que envolvem os registros numérico e simbólico. Apesar de os autores incluírem o registro gráfico na teoria relacionada a esta seção, não há exercício solicitando qualquer representação gráfica. Os gráficos, a seguir, sintetizam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas, explicitamente, nos enunciados dos trinta e dois exercícios sobre transformações lineares propostos no livro.

Gráfico 3– Tipo de Registro Presente no Enunciado



Nota - Total de exercícios propostos no Livro 2: 32

Gráfico 4– Tipo de Conversão (ou Tratamento com Mudança de Representação) Exigido na Resolução



Nota - Total de exercícios propostos no Livro 2: 32

3.2.3. Conclusão

O **Livro 2** já trata do conteúdo envolvendo os registros da língua natural, gráfico, simbólico, numérico e da língua natural especializada, sendo que os dois primeiros ocorrem, mais freqüentemente, no tópico específico do livro que trata das transformações geométricas do plano no plano e do espaço no espaço. Apesar de as conversões entre esses registros serem realizadas na parte teórica, nota-se que elas aparecem finalizadas, ou seja, sem oferecer ao estudante uma abordagem favorável para que o mesmo possa construí-las, compreendendo, assim, as especificidades de cada representação. Nos exercícios, nota-se, também, que as conversões envolvendo o registro gráfico ocorrem de forma reduzida, se comparadas com as demais. Notamos que na parte teórica do livro, as conversões tendem a privilegiar um único sentido. Por exemplo: não há conversões realizadas, de forma explícita, no sentido do registro gráfico para o simbólico, com exceção do caso da rotação de um ângulo q. Com relação aos exercícios, o livro tem como particularidade a apresentação de doze questões formuladas na língua natural. De trinta e dois exercícios, somente dois são formulados no registro gráfico e cinco envolvem conversões que requerem, explicitamente, esse registro.

3.3. Livro 3

3.3.1. Parte Teórica

Os autores dividiram o estudo das transformações lineares em dois capítulos independentes. No primeiro capítulo desse tema (Capítulo 4, p. 129), são tratados os seguintes tópicos: estudo de Espaços Vetoriais Euclidianos e as Transformações Lineares de R^n em R^m. No segundo capítulo (Capítulo 8, p. 257), o estudo das Transformações Lineares é realizado em espaços vetoriais arbitrários. Há um capítulo posterior (Capítulo 9, p. 291), intitulado Tópicos Adicionais, que aborda vários temas, dentre eles a Geometria dos Operadores Lineares do R^2. Por fim, há um capítulo (Capítulo 11, p. 363) que trata de aplicações gerais da Álgebra Linear em outros campos. Inicialmente, as transformações lineares são definidas, conforme apresentadas no quadro seguinte.

Quadro 9 - Livro 3 – Definição de Transformação Linear 1 (p. 138)

Transformações Lineares de R^n em R^m. No caso especial em que as equações são lineares, a transformação T: $R^n \to R^m$ definida por estas equações é chamada uma **transformação linear** (ou **operador linear** se m = n). Assim, uma transformação linear T: $R^n \to R^m$ é definida por equações da forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

ou então, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente, por w=A.x. A matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada **matriz canônica** da transformação linear T e a transformação T é chamada **multiplicação por A.**

Deste modo, nota-se que a definição usual de transformação linear como uma aplicação especial entre espaços vetoriais não é dada nessa introdução. Somente após explorar os vários tópicos relacionados às transformações lineares do R^n em R^m (a geometria das transformações, a transformação nula, o operador identidade, a análise da propriedade injetora, a obtenção da inversa, dentre outros tópicos), os autores apresentam as condições de linearidade. A definição geral, que trata das transformações lineares em espaços vetoriais quaisquer, só é apresentada no segundo capítulo desse conteúdo, sendo que, nesse momento, os autores retomam casos do plano e do espaço, abordados no capítulo anterior, com a preocupação de relacioná-los com essa nova definição mais geral. Na introdução do primeiro capítulo, a abordagem é dada nos registros da língua natural especializada, simbólico-algébrico, simbólico-matricial e numérico. Já na parte introdutória do segundo capítulo, o autor inclui exemplos gráficos, tratando de conversões entre esse tipo de registro e o simbólico-algébrico. No primeiro capítulo, que trata das transformações lineares do R^n em R^m, é dedicada uma seção especial para a Geometria das Transformações Lineares. Os autores exploram os aspectos geométricos das reflexões, projeções, rotações e dilatações, tanto no plano como no espaço. A garantia da linearidade de tais transformações é dada pelo fato de as equações que a compõem, serem lineares, e não pelas duas condições inerentes à definição de transformação linear.

O autor dessa obra apresenta tabelas, contendo as representações gráfica, simbólica e numérica de projeções ortogonais, reflexões, rotações e dilatações. A particularidade desse livro vem do fato de que, na parte teórica, ele desenvolve essas transformações também no R^3.

Dessa forma, podemos notar que nesse tópico há uma preocupação em tratar dos registros gráfico, simbólico e numérico, porém, da mesma forma que no **Livro 2**, observa-se que o texto apresenta essas situações já finalizadas, sem um detalhamento das passagens de um registro para o outro. Após a apresentação dessas transformações, são dadas a composição de transformações lineares e a sua relação com o produto das matrizes canônicas. Nessa seção, os autores procuram desenvolver a resolução da composta, através dos registros simbólico-algébrico, gráfico e numérico (multiplicação de matrizes) e, dessa forma, são realizadas as conversões entre esses registros. Como já foi citado, há também no capítulo sobre "Tópicos Adicionais" (Capítulo 9, p. 291), que trata de aplicações da Álgebra Linear, uma seção específica, intitulada "Geometria dos Operadores Lineares de R^2". Apesar de não ser parte integrante do capítulo de estudo das transformações lineares, há, nesse contexto, uma grande preocupação em aprofundar o estudo dos operadores lineares no R^2 e de detalhar as transformações entre os diversos registros, sendo a representação gráfica constantemente solicitada. Os autores retomam o tratamento das expansões, contrações, reflexões, rotações e cisalhamentos, procurando coordenar o trabalho com os registros gráfico, algébrico e numérico-tabular. Ainda nesse capítulo, o autor explora a determinação da matriz canônica pela composição dessas transformações usuais e o efeito geométrico dessas operações. Também mostra ao leitor como analisar o efeito geométrico de uma matriz de ordem 2x2, por meio da sua decomposição em produto de matrizes elementares.

Do conteúdo de núcleo e imagem presentes no primeiro capítulo, que trata das transformações lineares, os autores só exploram a questão da injetividade e da existência do operador inverso, em transformações lineares definidas do R^n em R^n. Para introduzir a propriedade injetora, o livro parte de situações geométricas. O quadro, a seguir, ilustra essa situação.

Quadro 10 - Livro 3 – Propriedade Injetora (p. 148)

Transformações Lineares Injetoras As transformações lineares que aplicam vetores (pontos) distintos são de especial importância. Um exemplo de uma tal transformação é o operador linear $T: R^2 \rightarrow R^2$ que roda cada vetor por um ângulo θ. É óbvio, geometricamente, que se **u** e **v** são vetores distintos em R^2 então também os vetores girados $T(u)$ e $T(v)$ são distintos.

Somente no segundo capítulo, quando os autores abordam as transformações lineares em espaços vetoriais arbitrários, são trabalhados, explicitamente, os conceitos de núcleo e imagem. Quanto ao conteúdo de matriz de uma transformação linear, no primeiro capítulo, que trata das transformações, observamos que a própria definição já era expressa na forma matricial e o conceito de matriz canônica de uma transformação linear aparecia, naturalmente, dessa definição. No segundo capítulo desse conteúdo, há uma seção específica para o estudo de matrizes de transformações lineares arbitrárias em relação a duas bases do domínio e contra-domínio, respectivamente. Nessa seção, os registros presentes são o da língua natural especializada, o simbólico e o numérico, sendo que as conversões mais freqüentes são entre os registros numérico e algébrico.

3.3.2. Exercícios Propostos

Na parte introdutória, tanto na seção de exercícios do primeiro capítulo das transformações como na relação proposta no segundo capítulo, as questões são formuladas, principalmente, no registro simbólico-algébrico. As conversões são desenvolvidas de forma significativa, realizadas em grande parte entre os registros simbólico-algébrico e numérico-tabular, no primeiro capítulo, e simbólico-algébrico, numérico e da língua natural especializada, no segundo capítulo. O que diferencia esse livro dos demais é o fato de ele incluir cinqüenta e uma questões formuladas na língua natural de emprego comum (em situações-problema), sendo que a maioria das conversões exigidas nessas questões parte desse registro para o numérico.

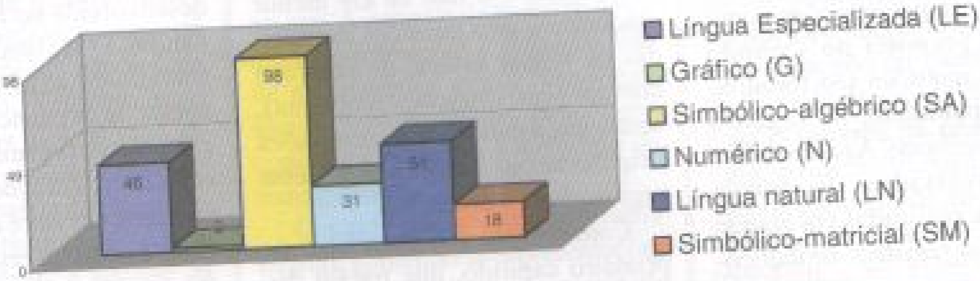
Com relação aos exercícios do primeiro capítulo, que tratam das transformações lineares geométricas no plano e no espaço, nota-se que há uma grande diversificação de registros. São propostas vinte e seis questões, sendo a maior parte desenvolvida no registro da língua natural. O registro gráfico é pouco trabalhado explicitamente, pois, apesar de os enunciados dos exercícios envolverem questões de reflexões, rotações, dilatações e composições entre essas transformações, é possível resolvê-los, em sua maioria, utilizando, apenas, substituições nas fórmulas desenvolvidas no registro simbólico, conforme apresentado no quadro seguinte.

Quadro 11 - Livro 3 – Exercícios de Transformações Lineares no Plano (p. 146)
Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de (-1,2) em torno: (a) do eixo x

O aluno não necessita utilizar qualquer recurso gráfico, tendo em vista que na parte teórica (p. 139) é dada a matriz canônica dessa transformação. No capítulo de "Tópicos adicionais", os exercícios das transformações geométricas já são formulados de modo a explorar a coordenação de registros de uma forma mais aprofundada. Apesar de a parte teórica desse capítulo tratar, apenas, das transformações geométricas no plano, o autor inclui nos exercícios propostos as transformações no espaço. Há um total de vinte e três questões que tratam das transformações lineares no plano e no espaço, sendo o registro gráfico um pouco mais explorado nesse capítulo adicional do que no capítulo que introduz a teoria. Apesar disso, nota-se que, apenas cinco, de um total de duzentos e seis exercícios, fazem uso de conversões, partindo do gráfico para outro tipo de registro.

No primeiro capítulo, das transformações lineares, não se trata de núcleo e imagem de forma explícita, mas há questões sobre injetividade, sobre a possibilidade de um vetor ser imagem da transformação e a determinação de inversa. São propostos doze exercícios, enunciados, principalmente, nos registros da língua natural especializada e simbólico-algébrico, e a maior parte das conversões ocorre entre o simbólico-algébrico e o numérico. O segundo capítulo, que trata das transformações lineares em espaços genéricos, contém cinqüenta e quatro exercícios sobre núcleo e imagem, sendo a maioria formulada nos registros simbólico-algébrico e da língua natural especializada. Há dez conversões que envolvem o registro gráfico, porém, apenas duas partem da representação gráfica para outro tipo de registro. Com relação ao tópico "Matriz de uma transformação linear", no primeiro capítulo, que trata das transformações, a representação tabular assume um papel de destaque nos exercícios. Porém, como foi abordado na parte teórica, nessa fase só é tratada a matriz canônica de uma transformação linear. Os registros presentes são o simbólico-algébrico, o numérico, o da língua natural de emprego comum e o de emprego especializado e há uma grande exploração de conversões entre esses registros. No segundo capítulo, que trata das transformações lineares, há um tópico específico intitulado "Matrizes de Transformações Lineares Arbitrárias", com um total de vinte e dois exercícios, formulados nos registros da língua natural especializada, simbólico, numérico-tabular e da língua natural de emprego comum. As conversões ocorrem, principalmente, entre os registros simbólico-algébrico e numérico tabular. Os gráficos, a seguir, contêm a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas, explicitamente, nos enunciados dos duzentos e seis exercícios sobre transformações lineares, propostos nos dois capítulos sobre transformação linear, analisados nesse livro.

Gráfico 5 – Tipo de Registro Presente no Enunciado



Nota - Total de exercícios propostos no Livro 3: 206

Gráfico 6 – Tipo de Conversão (ou Tratamento com Mudança de Representação) Exigido na Resolução

Nota - Total de exercícios propostos no Livro 3: 206

3.3.3. Conclusão

O **Livro 3** segue uma abordagem diferente dos demais. Dos livros analisados, esse é o que mais explora a diversidade de registros. As transformações no plano são mencionadas constantemente para exemplificar conceitos de injetividade, núcleo, imagem, transformação inversa, composição de transformações, dentre outros tópicos e, dessa forma, os autores fazem com que, na exposição teórica, o registro gráfico assuma um papel de destaque. O registro da língua natural de emprego comum também é extremamente utilizado na abordagem teórica. Um aspecto exclusivo desse livro é o tratamento, na parte teórica, das transformações lineares no espaço e, conseqüentemente, do registro gráfico no R^3. Apesar disso, nessa parte da abordagem, ainda notamos uma exposição teórica que não favorece ao estudante a construção dessas conversões, já que, novamente, os registros são apresentados prontos. Ao contrário da abordagem teórica, nota-se que, nos exercícios, o registro gráfico não é tão explorado, tendo em vista que, apenas duas questões são formuladas nesse registro e que as conversões, envolvendo representações gráficas, aparecem em número reduzido nesses dois primeiros capítulos. Já no capítulo, que trata de "Tópicos adicionais", há um aprofundamento das transformações geométricas no plano e no espaço. Nesse contexto, há um detalhamento maior das conversões, oferecendo ao leitor uma abordagem favorável ao entendimento das particularidades de cada tipo de registro. Porém, nos exercícios propostos nesse capítulo, apesar de o registro gráfico assumir um papel mais predominante do que nos exercícios dos capítulos anteriores, nota-se que pouco se exploram as conversões que partem de representações gráficas para outro tipo de registro.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo procurou mostrar um estudo sobre as transformações lineares, embasado nos trabalhos de Duval (2000) sobre os registros de representação semiótica. A análise de três livros didáticos revelou algumas diferenças de enfoque no desenvolvimento das transformações lineares, com relação aos registros presentes e às conversões estabelecidas.

Constatamos que o **Livro 1** desenvolve o conteúdo e propõe os exercícios desse tema, basicamente, nos sistemas semióticos simbólico, numérico e da língua natural especializada, limitando as conversões entre esses registros. Já a parte teórica dos **Livros 2 e 3** explora a diversidade de registros de maneira satisfatória, porém, a apresentação está mais próxima de uma descrição dos possíveis registros de um mesmo objeto do que de uma abordagem que conduza o estudante a estabelecer a coordenação das conversões entre tais registros.

Com exceção do **Livro 1**, podemos afirmar que as outras obras abordam, na parte teórica, o registro gráfico, porém, nos exercícios propostos ou a maior parte das questões não é enunciada nesse registro ou é proposta de forma a não torná-lo necessário para a resolução, como verificado no **Livro 2** e no primeiro capítulo, que trata das transformações geométricas, do **Livro 3**. Com relação a esse último livro analisado, apesar de ele diversificar as conversões e tratar do registro gráfico com uma freqüência satisfatória, no capítulo de "Tópicos Adicionais" (p. 291), há também deficiências na coordenação das conversões que partem do gráfico para outro tipo de registro. Notamos que nos exercícios propostos dos três livros, as conversões entre os registros simbólico-algébrico e numérico assumem um papel de destaque, quando comparadas com as demais, apesar de o **Livro 3** também incluir várias conversões no sentido da língua natural para o numérico.

Diante destas constatações, interrogamo-nos se tais abordagens podem limitar a compreensão efetiva do conceito de transformação linear, já que o processo *semiosis* desse conceito parece não estar sendo explorado a ponto de favorecer a *noesis*. Tais interrogações originam-se na verificação de dois fatores citados anteriormente: a abordagem não capacita o aluno a estabelecer coordenações progressivas entre os registros, uma vez que a apresentação deles se faz de forma imediata e pronta, sendo insuficiente o trabalho com determinadas conversões.

Por fim, esperamos que este trabalho tenha destacado a importância da exploração de diversos registros, bem como das possíveis conversões ao se tratar de um objeto matemático a ser ensinado. No caso particular das transformações lineares, esperamos que a análise aqui apresentada, apesar das diferentes abordagens encontradas nos livros didáticos, forneça evidências suficientes para identificar o predomínio de certas conversões e, por conseqüência, o prejuízo que esse fato pode trazer na compreensão conceitual do objeto matemático em questão.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BITTAR, M. Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Grenoble 1, 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Joseph Fourier.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L.; WETZLER, H. G. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMORE, B. Semiotica e noetica nell'apprendimento dei concetti in matemática. In: ______. Matematica e didattica: tra sperimentazione e ricerca. Bologna: Pitagora, 2000. p. 37-48.

DIAS, M. Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Paris, 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade de Paris VII, Dennis Diderot.

DOURIER, J. L. État de l'Art de la recherche en didactique. A propos de l'enseignement de l'Algèbre Linéaire à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques. França, v. 18, n. 2, 1998. p. 191-230,.

DOURIER, J. L et al. On the teaching of Linear Algebra. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DREYFUS, T.; HILLEL, J. SIERPINSKA, A. Cabri based linear Algebra: Transformations (1998). Disponível em: < http:www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html >. Acesso em 05 de outubro de 2003.

DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine. Berna: Peter Lang, 1995.

______. Signe et objet (I): trios grandes étapes dans la problématique des rapports entre representation et objet.

Annales de didactique et de Sciences Cognitives, n.6, Strasbourg: IREM, 1998. p. 139-163.

______. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 24, 2000, Hiroshima. Proceedings of the 24th PME. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000. p. 55-69.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

HILLEL, J., SIERPINSKA, A. One persistent mistake in Linear Algebra. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 18. Proceedings of the 18th PME. Lisboa: Université de Lisbonne, 1995. p. 65-72.

PAVLOPOULOU, K. Un problème décisive pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation. Annales de didactique et de Sciences cognitives, n. 5, 1993. p. 67-93.

______. Propédeutique de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation sémiotique. Paris, 1994. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Estrasburgo 1: Universidade Louis Pasteur. Pré-publicação de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Exatas. Ementa de Disciplina Álgebra Linear. Disponível em: <http://sphere1.rdc.puc-rio.br/cgi-bin/microh/microh.s?tb=em2&cd+MAT1200>. Acesso em 28 de agosto de 2004.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://www.inf.pucrs.br//%7Emoraes/engcomp/cursos/4452F.pdf>. Acesso em 03 de setembro de 2004.

SIERPINSKA, A.; DREYFUS,T.; HILLEL, J. Evaluation of a design: Linear transformations. Recherches en Didactique des Mathématiques, France, v. 19, n. 1, 1999. p. 9-39.

SIERPINSKA, A.; TRGALOVÁ, J.; HILLEL, J.; DREYFUS, T. Teaching and Learning Linear Álgebra with Cabri. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 23,1999, Israel. Proceedings of the 23th PME. Haifa, Israel, 1999. p. 119-134.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: DOURIER, J. L (ed.). On the teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 151-245.

SIERPINSKA, A.; NADOZIE, A. A. Methodological problems in analyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 25, 2001. Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht, The Netherlands, 2001. July 11-17, v. 4, p. 177-184.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear para Computação. Disponível em: <http://sistemas1.usp.br:8080/jupiterweb/jupDisciplina?sgldis=MAT0139&codcur=4505>. Acesso em 08 de maio de 2004.

______. ______. Ementa de Álgebra Linear para Engenharia II. Disponível em: <http://naeg.prg.usp.br/relatorio/disciplina.phtml?id_disciplina=MAT2458>. Acesso em 08 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://www.unisinos.br/_disciplinas/caract_disc.php?disc=60119>. Acesso em 04 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://black.rc.unesp.br/cccomp/MMA5677.pdf>. Acesso em 28 de agosto de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear I. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/dmat/education/ementas/MAT606.html> Acesso em 08 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://www.di.ufpe.br/~srlm/icc/ementas96/node2.html> Acesso em 06 de janeiro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra linear. Disponível em: <http:www.enq.ufsc.br/grad/ena/Disciplinas/MTM5245-AlgebraLinear.htm>. Acesso em 08 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://portal.ufsm.br/ementario/disciplina.jsp?codigo=MTM145>. Acesso em 03 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear I. Disponível em: < http://www.ufscar.br/disciplinas/grad/al1/al1.html> Acesso em 05 de junho de 2003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/~rpribas/inep/Bibliografia.pdf>. Acesso em 03 de setembro de 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Departamento de Exatas. Ementa de Álgebra Linear. Disponível em: <http://www.facom1.ufu.br/bcc/ementas_pg.htm> Acesso em 28 de agosto de 2004.