Artigo

O SOFTWARE "MAPLE" NO ESTUDO DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Neri Terezinha Both Carvalho[1]
Rosimary Pereira[2]

Resumo: O presente artigo apresenta os resultados de um estudo sobre o uso do *software* MAPLE V na abordagem de funções de várias variáveis, em particular, no estudo do gráfico e de curvas de nível dessas funções. As variáveis didáticas estudadas são de duas naturezas: relativas ao *software* (comandos) e relativas aos objetos matemáticos estudados (domínio e eixos coordenados). Um aspecto importante evidenciado é a indissociabilidade entre o "nível gráfico" e o "nível teórico". O gráfico (desenho-Maple), por si só não oferece ao aluno oportunidade de avaliação. É o professor quem questiona e cria situações em classe, que desestabilizam o aluno para que ele continue a investigação, seja do gráfico, do domínio ou das curvas de nível. Para isso, o professor precisa conhecer as limitações e as potencialidades do *software* escolhido. Ao preparar uma aula com apoio computacional, o professor precisa criar situações, evidenciando esses pontos.

Palavras-Chave: Maple; funções de várias variáveis; gráfico de funções; curvas de nível.

1. INTRODUÇÃO

Uma simples leitura das ementas da disciplina de Cálculo II, ou equivalente, nos permite afirmar que o estudo de funções de várias variáveis tem lugar explícito nos programas de Cálculo dos cursos de Engenharia, Matemática, Física e Química. Relacionados a esse tema, alguns dos itens estudados são: domínio, gráfico e curvas de nível dessa função.

No estudo feito por Cury (2001), ela destaca que segundo o MEC[3] e a ABENGE[4], os cursos de Engenharia devem dar sólida formação técnico-científica aos alunos, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas.

Também Cury (2001), citando Felder, coloca em evidência a resistência dos professores para mudar os métodos tradicionais de ensino, mudança que demanda aprendizado e, com isto, gasto de tempo e de energia. Neste sentido, Laborde et alli (2001) interrogam-se sobre as resistências à integração, na prática de ensino, das tecnologias de informação e de comunicação educativas e apontam duas causas dessa resistência: os problemas específicos da gestão da classe e a preparação da aula.

Problemas específicos da gestão da classe

Várias são as situações inesperadas que podem ocorrer em classe, as quais o professor deve resolver em tempo real e tomar decisões adequadas:

> [...] existência de problemas práticos ligados ao funcionamento das máquinas, acrescentado da heterogeneidade dos alunos, também da dificuldade de obter dos alunos um certo recuo em relação às máquinas, o perigo de uma superatividade dos alunos gastas na reflexão[5] (LABORDE et alli, 2001, p. 7).

[1] Mestra em Matemática aplicada UNICAMP, Doutora em Didática da Matemática, Professora do Departamento de Matemática/UFSC e Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Do grupo de estudo da informática aplicada no estudo da Matemática – GEIAAM. E-mail- neri@mtm.ufsc.br.
[2] Mestra em Matemática, pela UFSC. Professora do Departamento de Matemática/UFSC. Do grupo de estudo da informática aplicada no estudo da Matemática – GEIAAM. E- mail – rose@mtm.ufsc.br.
[3] Ministério de Educação e Cultura. www.mec.gov.br
[4] ABENGE – Associação Brasileira de Ensino de Engenharia.
[5] Tradução livre.

Preparação da aula

Como preparar uma aula visando ao uso de um programa computacional? [...] quais documentos escrever para os alunos? Que equilíbrio realizar entre as atividades com o computador e em papel e lápis? Quais exercícios de aplicação propor em seguida? Quais sínteses prever? Será preciso usar outras modalidades de avaliação?"[6] (LABORDE et alli, 2001, p. 7).

Levando em consideração o exposto acima e o fato de que o período atual é um período de transição, em que se estuda a utilização de novas tecnologias no ensino, como, também, as possibilidades de interface, proporcionadas pelos programas computacionais que permitem uma aprendizagem da manipulação de base, colocamos algumas questões: Em quais tipos de situações didáticas um programa computacional pode ser uma ferramenta que provoque uma atuação crítica do aluno e, conseqüentemente, a aprendizagem? Em particular, no estudo de funções de várias variáveis, que papéis atribuir ao programa computacional? Quais atribuições serão deixadas a cargo do aluno? Em que momento do ensino utilizá-lo? Em que tipo de problemas?

Para buscar elementos de resposta a estas questões e com o objetivo de dar oportunidade, por meio do estudo de Matemática, para realizar atividades que suscitem a observação e a análise crítica e criativa de uma situação problema, estudamos uma aula desenvolvida com o apoio do programa computacional Maple V.

Nesse estudo, observamos uma aula desenvolvida por dois professores. Tratou-se de uma observação em "classe natural", pois a aula foi preparada pelos professores como aula normal de seu projeto pedagógico. Os professores desenvolvem aulas teóricas intercaladas por aulas práticas de laboratório. Em diálogo com esses professores tivemos acesso à seqüência didática, antes da aplicação em classe. Observamos duas turmas, uma de Cálculo II e outra de Cálculo B, ministradas na segunda fase dos cursos de Física e Engenharia Civil, respectivamente.

2. QUADRO TEÓRICO DE REFERÊNCIA DE NOSSO ESTUDO

Para a realização da observação, nos apoiamos no "dispositivo de observação naturalista", que implica trabalhar com professor voluntário, que aceita que suas práticas sejam observadas antes de, durante e após as situações de ensino serem efetuadas. Na realização deste tipo de observação é importante o *contrato* (COMITI et al, 1995) estabelecido com o professor da classe. Estabelecemos este contrato com dois professores do Departamento de Matemática com os quais trabalhamos. O diálogo estabelecido com os professores em grupo de estudos, antes da observação, nos permitiu identificar as regularidades do funcionamento da classe. O desenvolvimento de aulas laboratoriais com o uso do Maple faz parte da prática desses professores. A seqüência didática dos dois professores consistia de uma série de atividades, das quais escolhemos apenas uma para nosso estudo.

Outros elementos teóricos vêm dar sustentação às análises.

Para este estudo consideraremos, a problemática levantada por Laborde: "A figura vista como relação entre desenho e objeto geométrico: [...] as relações entre um desenho e seu referencial elaboradas por um sujeito, leitor ou produtor do desenho, constituem para esse sujeito o "significado" associado à figura geométrica"[7] (LABORDE ;1994).

Esse significado corresponde ao *figural concept*, segundo Fishbein (1993), citado por Laborde (1994). Ainda, consideramos nesta abordagem, segundo Laborde,

Disso decorre que: "as relações entre desenho e objeto geométrico podem ser caracterizadas, [..], pelo fato de que as propriedades do objeto geométrico se traduzem graficamente por relações espaciais. [...]. Contudo, é importante ressaltar a complexidade das relações entre desenho e objeto geométrico; com efeito, a passagem do desenho para o objeto geométrico revela que:

- de um lado, um desenho geométrico não é necessariamente interpretado por seu leitor como correspondente a um objeto geométrico;
- de outro lado, as interpretações de um mesmo desenho, como significante de um objeto geométrico, são múltiplas por duas razões: a primeira decorre de que as interpretações dependem do leitor e de seus conhecimentos bem como do contexto; a segunda decorre da própria natureza do desenho; sozinho, ele não pode caracterizar um objeto geométrico[8] (LABORDE, 1994, p. 52).

No estudo que faremos, é importante levar em conta que um desenho (gráfico) conduz aos objetos teóricos do conteúdo visado, na medida em que aquele que lê decide fazê-lo. Por isso, trataremos neste estudo, o gráfico como um **"desenho-Maple"**, em que o gráfico é uma representação produzida pelo programa, por meio de um comando do *software*. O desenho-Maple obtido depende do comando do Maple utilizado.

Estamos interessados no funcionamento deste desenho como uma ferramenta heurística na fase de investigação do aluno.

[6] Tradução livre
[7] Tradução livre
[8] Tradução livre

3. A OBSERVAÇÃO

A observação de uma seqüência de ensino utilizando o *software* MAPLE
V, Release 5, a qual foi aplicada para uma classe do Curso de Engenharia
(Cálculo B) e para o Curso de Física (Cálculo 2) é objeto de nosso estudo.

Por que o Maple V ?

O Maple é um programa de computação muito usado nos meios
acadêmicos e científicos. Tem capacidade de efetuar, facilmente e com
precisão, os mais variados problemas de Matemática, algébricos ou
numéricos, como, por exemplo: resolução de sistemas de equações lineares,
matrizes, diferenciação, integração, equações diferenciais. Mas, foi,
sobretudo, o potencial gráfico deste programa que nos levou a utilizá-lo. O
Maple permite que se visualize rapidamente as informações em 2D e 3D.

Antes de apresentar a atividade da seqüência didática de nosso estudo,
apresentamos alguns comandos do Maple V, para esboçar o gráfico de uma
função de duas variáveis e de suas curvas de nível.

Vejamos:

Comandos para esboçar gráficos de funções:
plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);, implicitplot3d(z=f(x,y),x=a..b,y=c..d,z=e..f);
e cylinderplot([r,t,f(r,t)],r=0..a,t=t_1..t_2);

Os comandos *plot3d* e *implicitplot3d*, para uma função definida em
coordenadas cartesianas, e *cylinderplot*, para uma função definida em
coordenadas cilíndricas, são utilizados quando queremos esboçar o gráfico
de uma função de duas variáveis. Podemos rotacionar a superfície esboçada
com pequenos deslizamentos do *mouse*.

Quando escrevemos x=a..b e y=b..c, estamos definindo um domínio
conveniente, dentro do qual será esboçado o gráfico.

Comandos para esboçar curvas de nível:
contourplot(f(x,y),x=a..b,y=c..d) – com este comando temos as curvas de
nível da função f projetadas no plano xy –; e
implicitplot(f(x,y)=k,x=a..b,y=c..d) – com este temos a curva de nível k
projetada no plano xy.

Temos outras opções de visualização das curvas de nível, como, por
exemplo:

• visualização das curvas de nível na superfície, cada uma em seu nível;

• visualização só das curvas de nível no espaço, cada uma em seu nível.

Na barra de opções para o gráfico em 3D encontram-se ícones que
contemplam cada uma dessas opções. Além disso, ao clicar sobre o gráfico,
com as curvas de nível em destaque, pode-se rotacioná-lo, de tal forma que
se visualize todas as curvas projetadas no plano xy.

Devemos notar que, para análise do desenho-Maple, em busca da
informação teórica visada pela atividade proposta, no momento da
investigação, o aluno realiza uma interação entre o nível teórico e o nível
gráfico. A manipulação do saber teórico e gráfico permitirá ao aluno a
visualização, a explicitação, do conteúdo objeto da atividade.

Durante a fase da investigação do aluno, o nível teórico e o nível gráfico
são indissociados. Cabe notar, também, que a "apreensão perceptiva[9]" no
estudo do desenho-Maple não é suficiente, em geral, para a aprendizagem.
A "apreensão operatória[10]" faz-se necessária, e diferentemente do caso
de papel e lápis, aqui ela se realiza através da manipulação direta do *mouse*
e comandos do *software*. O nível teórico, juntamente com a manipulação dos recursos do Maple V, poderá permitir que o desenho (gráfico) exerça o papel de ferramenta heurística na fase da investigação do aluno.

Vejamos, na análise a priori, como as apreensões preceptiva e operatória, bem como as interações teórico- gráficas, intervêm no estudo das funções de várias variáveis.

A seqüência de ensino

A seqüência de ensino é composta de uma série de 5 atividades, das quais, neste estudo, analisamos somente uma. Esta nos dá elementos de ilustração suficientes sobre os aspectos que colocaremos em evidência. Esta seqüência foi aplicada por dois professores, que designaremos ProfA e ProfB, em nosso texto.

ANÁLISE A PRIORI

Nesta análise, em função do programa utilizado e em função dos observáveis, consideraremos varáveis didáticas de duas ordens:

- relativa ao Maple V: comandos do Maple V;

- relativas ao objeto matemático de estudo: domínio, eixos, curvas de nível.

Atividade escolhida para esta análise: *"Trace o gráfico da função $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ e de suas curvas de nível"*.

Análise da tarefa: "Traçar o gráfico da função".

Varáveis didáticas que consideraremos neste estudo: variáveis relativas ao Maple V (comandos plot3d, implicitplot e cylinderplot) e variáveis relativas ao objeto matemático de estudo (domínio, eixos coordenados).

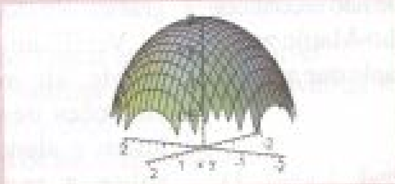
[9] "É aquela que permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma ou um objeto, seja no plano ou no espaço" (DUVAL, 1994, p. 123; Tradução livre).
[10] "É a apreensão de uma figura dada em suas diferentes modificações possíveis em outras figuras" (DUVAL, 1994, p. 124; Tradução livre).

Análise da Atividade Considerando os Comandos

1) Comando: plot3d

Aplicando este comando para a função $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, temos, plot3d(sqrt(4-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2); obtendo o gráfico apresentado na figura1.

Fig.1- Semi-esfera plot3d



Cabe notar que, com este comando, o gráfico da função não fica completo. Este gráfico não permite o reconhecimento da superfície pelo aluno. É preciso um conhecimento de que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é equação do hemisfério superior da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, para se questionar sobre o problema do gráfico. O aluno que não reconhece na equação a respectiva superfície que ela descreve, não tem como avaliar se o gráfico obtido é o gráfico real da equação. Uma passagem pelo teórico faz-se necessária para a identificação de que o gráfico não é o gráfico completo.

O aluno poderá então aceitar o mesmo como gráfico da função $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, ou questionar a validade do gráfico obtido e indagar porque ele não foi o gráfico esperado e buscar outras opções, fornecidas pelo Maple V, para tentar obter o gráfico conforme o conhecimento teórico.

Caso o aluno não tenha o conhecimento teórico, o professor poderá desestabilizar o aluno, solicitando-lhe que use os outros comandos do Maple para ver se o gráfico é este mesmo.

Uma tentativa de melhorar a visualização gráfica é acrescentar a opção "numpoints", que consiste em acrescentar mais pontos na confecção do gráfico.

Por exemplo, se acrescentarmos a opção *num points=20000* ao comando anterior, obtemos o gráfico apresentado na figura 2.

Fig.2 - Semi-esfera *num points=20000*

Uma simples comparação entre as figuras 1 e 2 nos permite supor que o aluno obtém na figura 2 um gráfico que propicia um melhor reconhecimento da superfície mas que é, ainda, incompleto.

2) Comando: cylinderplot

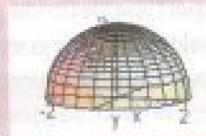
Para utilizar este comando, faz-se necessário escrever a equação da superfície como uma função de duas variáveis, em coordenadas cilíndricas.

Novo problema: "Escrever a equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ em coordenadas cilíndricas".

Solução: $z = f(r, t) = \sqrt{4 - r^2}$. Consideramos que este conhecimento seja disponível para o aluno.

Com esta representação da superfície e com o comando cylinderplot, cylinderplot ([r,t,sqrt(4-r^2)], t=0..2*Pi,r=0..2) obtemos o gráfico da figura 3.

Fig.3 - Semi-esfera *cylinderplot*



Notemos que agora a representação da superfície é completa.

Estudo do Desenho-Maple Obtido:

Notemos que, por apreensão perceptiva, é possível supor que a superfície obtida é uma semi-esfera e, neste caso, o hemisfério superior da esfera de equação dada.

O exposto acima leva-nos à seguinte questão: como um aluno que não detém o conhecimento de que a equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ representa, algebricamente, uma semi-esfera poderá por meio do desenho-Maple identificar tal superfície? Este controle, sobre o objeto matemático, o Maple não fornece. A avaliação requer conhecimentos teóricos ou o auxílio do professor. Então, podemos nos questionar: Fazer a aula de laboratório antes ou depois da aula teórica? Qual a finalidade de cada uma delas?

Temos aqui que a variação dos comandos permite a obtenção do gráfico que representa a superfície teórica. Assim, uma aprendizagem quanto ao uso dos comandos do Maple deve ser levada em conta na elaboração de uma seqüência didática.

Análise do Domínio da Função

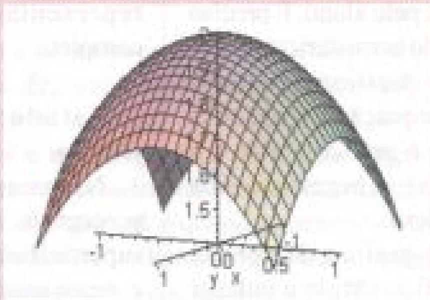
É importante reconhecer o domínio da função para identificar no desenho-Maple a superfície definida pela equação dada.

Na análise do domínio da função, supomos que duas situações podem ocorrer: o aluno identifica a superfície definida pela equação – analisa a equação em nível teórico – e determina o domínio da função ou, então, ele faz um estudo experimental, testando regiões do plano xy, sobre a qual o desenho-Maple representa a superfície em estudo, ou, ainda, ele não reconhece qual a superfície definida pela equação dada e faz o desenho-Maple numa região qualquer do plano xy e conclui que aquele desenho-Maple que aparece na tela corresponde à superfície em estudo.

Exemplos de situações que poderão ocorrer:

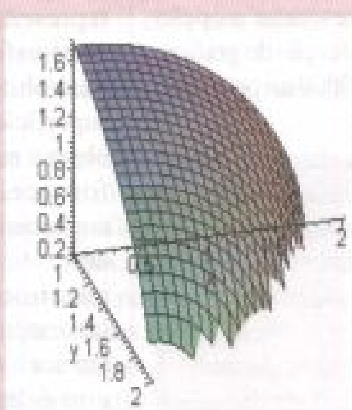
Usando o comando plot3d, plot3d(sqrt(4-x^2-y^2),x=-1..1,y=-1..1), obterá o desenho-Maple da figura 4.

Fig. 4



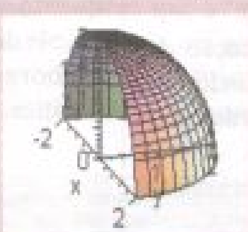
Com o comando plot3d, plot3d(sqrt(4-x^2-y^2),x=0..2,y=1..2); o desenho-Maple obtido será o da figura 5.

Fig. 5



Mas, se o aluno usar o comando cylinderplot, cylinderplot([r,t,sqrt(4-r^2)],t=0..Pi,r=0..2); obterá o desenho-Maple da figura 6.

Fig. 6



A questão continua: Que superfície é o gráfico da função em estudo? A parte da esfera (figura 6) poderá exercer a função de figura heurística na determinação do domínio da função. Para isso, o aluno precisa investir na análise do gráfico obtido.

Verificamos que o desenho-Maple, ele mesmo, não provoca situações desestabilizadoras que levem o aluno a questionamentos sobre a região do plano xy, escolhida, que proporciona uma boa visualização da superfície dada. Ou, se o domínio escolhido é pertinente ou não. O confronto com o conhecimento teórico é obrigatório para avaliar se o domínio escolhido é correto. Que encaminhamento dará o professor?

ANÁLISE DA ATIVIDADE QUANTO AO USO DOS EIXOS COORDENADOS NO GRÁFICO

Por que usar os eixos coordenados?

É conveniente acrescentar os eixos coordenados (usando uma das três opções que estão na barra de opções) ao desenho-Maple, pois, com um simples deslizamento do *mouse*, a superfície poderá ser rotacionada, conduzindo os alunos a interpretações errôneas, na identificação da mesma.

Sabemos que a superfície é o hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Sem este conhecimento, o aluno poderá rotacioná-la e interpretá-la como o hemisfério inferior da esfera citada, mostrada na Figura 7, ou, como um círculo. Ver figura 8.

As rotações do desenho são importantes no estudo da superfície, mas, sem os eixos coordenados poderá acarretar problemas de leitura da figura e, neste caso, as figuras obtidas por rotações se transformam em obstáculo para o estudo da superfície.

Realização da Observação

Os professores aplicaram a seqüência em turmas de graduação da UFSC. Observamos duas turmas e registramos (gravação fita Cassete e notas de observador) o desenvolvimento das atividades durante as aulas.

As observações foram de duas naturezas: geral, isto é, observamos e registramos o trabalho realizado na classe como um todo, desenvolvimento dado à aula pelo professor, intervenções dos alunos etc; e particular, ou seja, fizemos observações específicas de algumas duplas de alunos. Consideramos que, em um trabalho em que os alunos usam um programa computacional, somente a observação e o registro dos diálogos entre os alunos, do que se passa com cada dupla, pode permitir recuperarmos os fenômenos ocorridos durante a realização das tarefas.

A seqüência didática foi aplicada em uma sessão de duas aulas, de 50 minutos cada. Os professores, em um primeiro momento, apresentaram o *software* MAPLE V, com seus comandos básicos, e deram orientações iniciais para o desenvolvimento da seqüência. Sempre que solicitados, eles esclareceram as dúvidas quanto ao *software* e quanto ao conteúdo em si.

ANÁLISE A POSTERIORI

Faremos a análise a posteriori referente a cada uma das variáveis consideradas neste estudo.

Quanto aos Comandos:

Os alunos, aplicando o comando plot3d para a *função* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, obtiveram o gráfico conforme figura 14.

Fig. 14

Constatamos que os alunos não questionaram se o desenho Maple obtido era uma boa representação da superfície expressa pela função, ou não.

É o professor quem questiona os alunos e provoca a dúvida quanto ao gráfico obtido:

"Para quem já tem o gráfico, notou alguma coisa estranha?" [...] "Compare o gráfico obtido com o desenho feito em sala de aula" [...] "Reescreva a equação em coordenadas cilíndricas, depois plote o gráfico" (Protocolo; PROF.A).

"Experimentem usar o outro, dos comandos apresentados; verifiquem se o gráfico da função em estudo é este aí?" [...] "Lembrem do estudo em classe. Qual a superfície que representa esta equação? (Protocolo; PROF.B).

O professor A decidiu mostrar à classe o gráfico obtido, após escrever a função em coordenadas cilíndricas usando o comando *cylinderplot*. E pergunta a classe: *"O que vocês viram, agora? É a semi-esfera como vocês viram em sala de aula?"* (Protocolo; PROF.A).

Já o professor B não trabalha com a classe como um todo, durante o desenvolvimento da sessão. O Professor B acompanha a evolução de cada dupla, questiona, sugere, até que cada dupla obtenha, cada uma a seu tempo, o gráfico esperado.

Nota-se que são as intervenções dos professores que fazem os alunos se servirem dos diferentes comandos e de fazerem relação com o teórico estudado, em classe, para evoluírem para a obtenção dos resultados esperados e, conseqüentemente, às conclusões.

QUANTO AO DOMÍNIO DA FUNÇÃO

Num primeiro momento, em geral, os alunos não observaram, ou melhor, não estudaram a função para identificar ou determinar o domínio da mesma. Eles começam atribuindo um intervalo qualquer para a variação de x e de y, sem uma reflexão, de maneira aleatória, como consideramos, a priori, que esta seria uma possibilidade.

Por exemplo: os alunos, experimentalmente, sem qualquer reflexão, usaram os seguintes comandos: plot3d (sqrt(4-x^2-y^2),x=-10..10,y=-10..10); plot3d (sqrt(4-x^2-y^2),x=0..5,y=1..5); cylinderplot ([r,t,sqrt(4-r^2)],t=0..Pi,r=0..2) e cylinderplot ([r,t,sqrt(4-r^2)],t=0..2*Pi,r=0..2) (Notas do observador).

É importante notar que, para a obtenção da representação do gráfico almejado, a evolução do trabalho do aluno se realiza com relação à exploração experimental do domínio e com relação ao uso de diferentes comandos do Maple.

O confronto com o conhecimento teórico é feito com a intervenção do professor.

"O domínio definido por vocês está correto? O estudo do domínio de uma função é muito importante.

É conveniente estudar a expressão da função analiticamente para determinar o domínio da função (PROF.A e PROF.B).

As diferentes tentativas realizadas pelos alunos levaram-nos a tomar consciência da importância e do significado do domínio da função.

Quanto ao Uso dos Eixos Coordenados:

As duas representações errôneas da superfície, previstas a priori, foram encontradas pelos alunos. Estas representações só foram questionadas quando o professor sugeriu colocar os eixos. *"Coloque os eixos e identifique a superfície"* (PROF.B).

Neste caso, a manipulação direta sobre o desenho, possível de realizar sobre um desenho-Maple juntamente com a realização de uma relação com o teórico, permite fazer evoluir para a obtenção do gráfico solução. Neste caso, a apreensão operatória e perceptiva é muito presente. Como previmos, a priori, o não uso dos eixos coordenados é um dos obstáculos na identificação da superfície.

Quanto às Curvas de Nível:

Os alunos usaram os comandos contourplot ou implicitplot sob orientação do professor.

Os professores ainda propuseram o estudo das curvas de nível, usando os ícones contidos na barra de opções para gráficos em 3D. *"Se vocês querem ter uma visão espacial das curvas de nível, usem os comandos da barra de opções para os gráficos em 3D"* (PROF.B).

Após o estudo destes desenhos-Maple, foi sugerida aos alunos a volta aos desenhos-Maple anteriores, para identificarem as curvas de nível na outra representação. Nota-se que aqui, também, a variação dos comandos tem um papel importante na compreensão do objeto matemático em questão. Neste caso, as curvas de nível, segundo diferentes representações gráficas.

CONCLUSÕES

A observação da aplicação da seqüência proposta pelos professores nos leva a algumas conclusões.

O fato da não identificação, por parte dos alunos, da superfície que representa a função estudada leva a um aceite do gráfico apresentado na tela do computador, sem muito questionamento. Isto pode levar a uma interpretação errônea do gráfico. Todo o tempo, durante a aula, foi o professor que buscou desestabilizar os alunos, seja questionando sobre o que foi visto em classe, ou seja, solicitando aos alunos a retomada de outros comandos e a manipulação direta sobre o gráfico com o uso do *mouse*.

Outro fato relevante que também prejudica o estudo sobre a representação gráfica de funções de duas variáveis é a determinação dos limites das variáveis livres x e y, ou seja, o domínio da função. Nos parece que, na frente do computador, o aluno esquece parte da teoria explorada em sala de aula, talvez pela rapidez de resolução do *software* em esboçar o gráfico. Foi sempre necessário que o professor provocasse nos alunos uma verificação empírica, isto é, que fizessem um estudo do gráfico, fazendo variar o domínio, até obterem a superfície completa, conforme o conhecimento teórico.

Quanto às curvas de nível, nos problemas que apareceram, o aluno não identifica que o conjunto dos níveis (conjunto dos k) é o conjunto de pontos da imagem da função.

Para uma aula com apoio computacional, sobre representação gráfica de funções de duas variáveis, temos duas possibilidades de trabalho: fazer, antes, em sala de aula, o estudo sobre os conteúdos: domínio, imagem, curvas de nível e gráficos de funções de duas variáveis e, depois, uma aula de laboratório, ou, elaborar as atividades da seqüência didática, de maneira que solicite, dos alunos, a exploração dos diferentes comandos, e um estudo empírico do domínio e das curvas de nível. Os resultados observados serão, depois, institucionalizados nas aulas teóricas.

Cabe, aqui, um estudo sistemático, sobre as duas modalidades, para termos parâmetros mais precisos sobre as vantagens e/ ou desvantagens dos diferentes usos da aula laboratorial com o Maple.

O uso dos diferentes comandos, bem como a manipulação direta sobre o desenho obtido, o estudo empírico do domínio e sobre as curvas de nível oferecido pelo Maple, permitiram ao aluno formular uma concepção do tipo de superfície que representa a função estudada, a concepção do conceito de domínio da função e das curvas de nível.

Temos, aqui, um trabalho a fazer (e um lugar onde se pode fazer): desenvolver, no aluno, a pesquisa, a análise crítica, a exploração dos meios, etc. no desenvolvimento das atividades. Identificamos que é muito forte para o aluno um resultado dado por um programa. O computador é tido como uma máquina que só fornece respostas adequadas. Este é outro aspecto para ser trabalhado em uma aula de laboratório com *softwares*.

Evidenciamos, neste estudo, alguns elementos que poderão ser úteis aos professores no momento de preparar uma aula de laboratório e/ou de escolher o *software* para trabalhar um determinado conteúdo matemático.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ABELL, M. L.; BRASELTON, J. P. Maple V by example. AP. Profressional.

COMITI , C.; GRENIER D. e MARGOLINAS, C. Niveaux de connaissances em jeu lors d´interactions em situation de classes et modélisation de phénomène didactiques. In: ARSAC et AL.(Coord.). *Différents types de savoirs et leur articulation.* Pensée Sauvage, 1995. p. 92-113..

CURY, H. N. Diretrizes Curriculares para os Cursos de Engenharia e Disciplinas Matemáticas: opções Metodológicas. *ABENGE* - Revista de Ensino de Engenharia, v. 20, nº 2, 2001. p. 1-7.

DUVAL, R. Les différents fonccionnements d'une figure dans une demarche géométrique. *Repères-IREM*, nº 17, 1994. p.121-137.

LABORDE, C. et alli. Géométrie avec Cabri: scénarios pour lé lycée. *CRDP* de l'Académie de Grenoble, 2001.

LABORDE, C. et CAPONNI, B. Modélisation à double sens. In: *Noirfalise (éd) VIIIe école et université d'été de didactique et acquisition des connaissances scietifiques.* Actes du Colloque de Sèvres, editions la pensée sauvage. Grenoble, p. 65-86.

Orientações para o Envio e Apresentação de Trabalhos a Serem Publicados

1) Os textos devem ser inéditos, e enviado unicamente em arquivo formato "DOC", por via eletrônica para revista@sbem.com.br

2) O texto deverá conter título, seguido do(s) nome(s) do(s) autor(es) e da(s) respectiva(s) instituição(ões).

3) O texto deverá ser digitalizado em Word para Windows, formato A4, fonte Times New Roman, corpo 12, recuo 0, espaçamento 0, alinhamento justificado e entrelinhas 1,5.

4) O texto não deverá superar 40 páginas para artigos, 20 páginas para relatos de experiência, 10 páginas para crônicas e 5 páginas para resenhas.

5) As imagens deverão estar em formato tif, com resolução de 300DPIs.

6) As citações literais, com mais de cinco linhas, deverão ser colocadas com parágrafo recuado de 4cm, em itálico, seguidas do sobrenome do autor, em letras maiúscula, ano de publicação e página citada (tudo entre parênteses). As citações com menos de cinco linhas, em itálico, poderão ser incorporadas ao texto.

7) No final do trabalho, em ordem alfabética, serão incluídas as referências bibliográficas do texto, obedecendo ás normas atuais da ABNT.