ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

La Comprensión a través de las Concepciones Proceso-Objeto. Un Estudio sobre de los Conceptos que Intervienen en la Resolución de Problemas de Optimización

The Comprehension through Process-Object Conceptions. A Study on the Concepts Involved in the Resolution of Optimization Problems

Betina Williner*

ORCID iD 0000-0001-9650-5019

Adriana Engler**

ORCID iD 0000-0001-8907-5030

Andrea Lavalle***

ORCID iD 0000-0003-4290-967X

Resumen

Este artículo presenta los resultados de un estudio sobre la comprensión de los conceptos de intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos relativos de una función y su incidencia en la resolución de problemas de optimización en estudiantes de ingeniería. Utilizamos como referente teórico las concepciones objeto-proceso definidas por Ana Sfard. Participaron en el estudio 27 equipos formados por dos alumnos cada uno. Mediante la técnica de Análisis de Componentes Principales pudimos reducir el número de variables y agrupar los equipos según características. Dentro de los principales resultados obtuvimos que aquellos equipos que evidenciaron las dos concepciones pudieron resolver los problemas de optimización planteados. La reducción de variables nos permitió caracterizar en término de las acciones de los alumnos las concepciones proceso-objeto de los conceptos mencionados.

Palabras clave: Comprensión. Concepciones. Problemas de optimización. Cálculo. Ingeniería

Abstract

This article presents the results of a study on the comprehension of concepts about growth and decrease intervals and relative extremes of a function and its impacts in the results of optimization problems for Engineering students. Conceptions Process-Object defined by Ana Sfard were used as theoretical reference. In this study, 27 teams formed by two students each participated in the study. Throughout the Analysis of Main Components technique, the number of variables was reduced and the teams were grouped according to their characteristics. Among the main results, we observed that those teams that highlighted the two conceptions could solve the optimization

* Doctora en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (orientación Matemática) UNCo. Docente-investigador en UNLaM, San Justo, La Matanza, Buenos Aires, Argentina. Dirección Postal: Sarachaga 3334, Castelar, Morón, Buenos Aires, Argentina, código postal 1712. E-mail: bwilliner@hotmail.com

** Doctora en Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (IPN) Docente-investigador de UNL, Esperanza, Santa Fe, Argentina Dirección postal: Pasaje Padre Grenón 2521, Esperanza, Santa Fe, Argentina, código postal 3080. E-mail aengler@fca.unl.edu.ar.

*** Doctora en Ciencia y Tecnología (UNGS). Docente-investigador UNCo, Neuquén, Neuquén, Argentina. Dirección postal: Buenos Aires 3800, Neuquén, Neuquén, Argentina, código postal. 8300. E-mail: lavalleandrea@yahoo.com.ar.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

problems. The reduced variables allowed us to characterize the Process-Objects conceptions for the above-mentioned concepts.

Keywords: Comprehension. Conceptions. Optimization problems. Calculus. Engineering.

1 Introducción

En este artículo presentamos parte de una investigación que tuvo como objetivo general el estudio de la comprensión de los conceptos involucrados en la resolución de problemas de optimización (PO) en el contexto de la asignatura Análisis Matemático I de carreras de ingeniería.

La Matemática es una ciencia que le brinda al ingeniero herramientas para la formulación y análisis de determinados modelos y para la resolución de problemas. En la actualidad el uso de tecnología le permite a cualquier profesional realizar cálculos engorrosos, graficar, derivar funciones complicadas, resolver ecuaciones, pero no le indica qué concepto o procedimiento utilizar cuando se enfrenta a una determinada situación.

Para citar algunos casos: un ingeniero industrial puede tener que determinar cuestiones ligadas a la economía como son el establecer el costo o ingreso marginal o la maximización de ganancias o buscar el lote que minimice la función costo. Un ingeniero civil puede tener que estudiar el pandeo de una columna en una determinada estructura sometida a carga y, de esta forma, plantear y resolver ecuaciones diferenciales.

Entonces, es importante que el estudiante adquiera una comprensión profunda de los principales conceptos de la materia para poder aplicarlos en situaciones que requieran un pensamiento reflexivo, creativo, crítico y que participe en espacios en los que pueda comunicar sus ideas, defenderlas con sustento y argumentación.

La realidad revela que, en general, no preparamos a los futuros profesionales de acuerdo a las necesidades planteadas. Diversas investigaciones y la propia experiencia como docentes nos muestran que la enseñanza del Cálculo se brinda de manera muy formal y rigurosa, o como un conjunto de recetas y ejercicios rutinarios. Autores como Artigue (1995), Contreras de la Fuente (2001), Moreno (2005) y Salinas (2010), dan cuenta de que la formalización excesiva o la algoritmación de los contenidos y el discurso simplificado a recetas no producen comprensión de los conceptos.

Una de las investigaciones pioneras sobre esta temática fue realizada por Orton (1983, citado en CARDONA, 2009) y reporta los errores más comunes que cometen los alumnos de nivel medio y superior en torno a los conceptos de límite, derivada e integrales. Se concluye

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

que los alumnos tienen un razonable dominio del cálculo de derivadas e integrales, pero evidencian una notable dificultad a la hora de conceptualizar los procesos de límite subyacentes en los conceptos mencionados.

García (2011) realiza una encuesta a estudiantes universitarios sobre el concepto de derivada, en la cual el 85% de los alumnos la identifica con una fórmula y sólo el 15% con una idea más cercana a la definición. El dominio de tipo algebraico o algorítmico y la carencia de significados se manifiestan en otras investigaciones: Dolores (1996), Sánchez, García y Llinares (2008), Cuesta (2007), Reséndiz (2006), Vrancken (2011).

Lo descripto se observa también en nuestras aulas: dificultades en la comprensión, escasez de transferencia de lo aprendido a situaciones nuevas, memorización de fórmulas, inconvenientes para expresarse en forma oral y escrita, poca interpretación de gráficos y deficiencias para argumentar. Los resultados no satisfactorios en el aprendizaje y en las instancias de examen producen baja motivación para el estudio y hasta un efecto de rechazo *colectivo* hacia la disciplina.

La reflexión sobre lo expuesto nos condujo a preguntarnos: ¿en qué consiste la comprensión en matemática?, ¿cómo los seres humanos comprenden la matemática?, ¿qué evidencias dan cuenta de que una persona comprende?, ¿qué acciones de la enseñanza pueden propiciar la comprensión?, ¿la comprensión *asegura* la resolución de problemas?

Nos centramos en el estudio de los conceptos que se involucran en la resolución de PO: intervalos de crecimiento de una función (IC), intervalos de decrecimiento de una función (ID) y extremos relativos (ER). Una de las razones de esta elección es que el planteo de este tipo de problemas es un primer paso al desarrollo de otros más complejos. Estos aportan una base teórica y metodológica que constituyen la antesala de plantear, analizar y desplegar diversas estrategias de solución en otro tipo de situaciones propias de la ingeniería.

Otro de los motivos por el cual elegimos este tema es la dificultad que tienen los alumnos a la hora de desarrollar y resolver este tipo de problemas. Generalmente, los estudiantes actúan en forma memorística, forzando la obtención de una ecuación que involucre las variables intervinientes y otra a la que calculan sus ER, pero sin comprender en profundidad lo que hacen. Es común que confundan cuál es la función a optimizar y, en muchos casos, sólo obtienen puntos críticos de la misma. Autores como Baccelli et al. (2011), Malaspina, (2007); Moreno y Cuevas (2004) y Cuesta (2007) avalan lo expuesto.

A continuación, presentamos cómo estudiamos la comprensión de los alumnos de ingeniería sobre los conceptos mencionados y cómo pudimos analizar su incidencia en la resolución de PO.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

2 Problemática

Nuestro contexto es la cátedra de Análisis Matemático I. Esta asignatura es común a todas las ingenierías que se cursan en la universidad (informática, electrónica, industrial, civil y mecánica) y consta de un programa tradicional de Cálculo diferencial e integral en una variable. Es de régimen cuatrimestral. Contamos con diez comisiones por cuatrimestre de, aproximadamente, setenta alumnos cada una. En cada curso trabajan dos profesores, uno de ellos a cargo y el otro auxiliar. Por razones de organización realizamos el estudio en la comisión a cargo de quien suscribe.

Según lo expuesto anteriormente, nos formulamos dos preguntas que fueron centrales:

- ¿Cómo es posible mejorar la enseñanza de los conceptos involucrados en la resolución de PO (IC, ID y ER de una función) en las carreras de ingeniería a fin de favorecer la comprensión?
- ¿Cómo estudiar la comprensión de los conceptos mencionados?

Si bien en este reporte nos vamos a concentrar en la segunda pregunta, hacemos una breve referencia a la primera. Incorporamos a la enseñanza las ideas del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) y los registros de representación. El PyLV se interesa por estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación del saber matemático relativos a la variación y el cambio en situación escolar (CANTORAL, 2004).

Este marco recupera la esencia del Cálculo como herramienta poderosa para describir en términos matemáticos ciertos fenómenos de la naturaleza u otras ciencias en los que se involucran situaciones de cambio. A su vez, plantea la necesidad de lograr una ruptura con las formas algebraicas de tratamiento de esos objetos. Diversas investigaciones dan cuenta de resultados alentadores al transmitir la esencia del Cálculo a través de ideas de variación y cambio (CABRERA, 2009; CANTORAL; FARFÁN, 1998; CARDONA, 2009; DOLORES, 1996; GARCÍA, 2011; GUERRERO, 2002; SÁNCHEZ; MOLINA, 2006; VRANCKEN; ENGLER, 2014). Respecto a los registros de representación definidos por Duval (1998), Vrancken (2011) señala que ya es aceptado por la comunidad de Educación Matemática que la incorporación de estos favorece la comprensión de los objetos matemáticos.

Entonces, elaboramos una situación de aprendizaje sobre los conceptos de IC, ID y ER basada en ideas de variación y registros de representación con el fin de favorecer su comprensión. Entendemos por situación de aprendizaje un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas en el tiempo con el fin de realizar un proceso de aprendizaje para un grupo determinado de alumnos. Involucra las actividades que realizan los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

alumnos, su organización, su puesta en marcha y su finalización.

En relación a cómo estudiar la comprensión en matemática, si bien no es lo mismo conocimiento que comprensión, no hay un acuerdo unificado sobre el significado de esta última.

Uno de los primeros en distinguir entre comprensión y conocimiento fue Skemp (1976, citado en MEEL, 2003), quien diferencia entre comprensión relacional (saber qué hacer y por qué se debe hacer) y comprensión instrumental (efectuar reglas sin una razón determinada).

Perkins (1999, p.4) distingue tres conceptos claves: conocimiento, habilidad y comprensión. El conocimiento es la información que dispone una persona y la habilidad constituye el desempeño de rutina. Respecto a la comprensión este autor señala que es "la capacidad de desempeño flexible", es decir actuar flexiblemente a partir de lo que uno sabe.

Existen otros marcos teóricos, inspirados en modelos constructivistas, que tratan de esclarecer los fenómenos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos: la teoría APOE, la comprensión según Tall y Vinner, la comprensión a través de la superación de obstáculos cognitivos, el modelo de Pirie y Kirien, entre otros. No es objetivo del artículo detenernos en los mismos sino de profundizar el que elegimos: la teoría de Ana Sfard (1991).

3 Marco teórico

Sfard (1991) estudia la comprensión en matemática y apoya su teoría en la de Piaget. Esta autora establece la diferencia entre *concepto* como idea matemática en su forma oficial, el constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento de la disciplina y *concepción* como la idea del concepto que vive en la mente humana, que depende de la experiencia personal y está sujeta a cambios.

Tenemos, por un lado, el conocimiento matemático que se comparte socialmente y que está sujeto a transformaciones para poder ubicarlo como objeto de enseñanza, y, por el otro, el conocimiento subjetivo que los estudiantes relacionan con el conocimiento oficial. Según Sfard (1991), de un objeto matemático tenemos una concepción que *vive* en nuestra mente, que depende de las experiencias que haya tenido el sujeto con todo aquello que se relaciona con el concepto. A su vez, es de suponer que esta concepción está sujeta a cambios que dependen de las interacciones entre el sujeto y el objeto matemático en cuestión.

Señala que, a diferencia de los objetos materiales, los conceptos matemáticos avanzados son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos, sólo pueden ser vistos con los *ojos de la mente*. Cuando graficamos una función o escribimos un número tenemos que enfatizar que el signo en el papel es una de las posibles representaciones de la entidad abstracta, que por sí misma no

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

podemos ver ni tocar. Agrega que ser capaz de ver estos *objetos invisibles* parece ser una componente esencial en la habilidad matemática (SFARD, 1991).

Desde la perspectiva de Sfard (1991), la comprensión requiere mucho más que ejecutar procesos y aplicar resultados matemáticos. Es un proceso constructivo que implica elaborar un vínculo entre acciones sobre objetos familiares y representaciones internas de la acción, dando lugar a la construcción de una estructura interna asociada a los signos y significados matemáticos externos.

3.1 Aspecto dual de los objetos matemáticos

Para Sfard (1991, p. 4) existen dos formas de concebir un concepto: como *proceso* o *concepción operacional* (CO) y como *objeto* o *concepción estructural* (CE). Por ejemplo, en el caso de una función, no sólo se puede definir como conjunto de pares ordenados (CE) sino también como un método para ir "de un sistema a otro". Esta última definición pone énfasis en un proceso o algoritmo, con lo cual estaríamos considerándola como CO.

Mora (2006) indica que concebir una entidad matemática como objeto (CE) significa describirla como una cosa real, una estructura estática que existe en alguna parte en espacio y tiempo. Es considerarla como un todo y manipularla sin entrar en detalles. Concebir una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial, más que como una entidad actual, que se nos presenta como una secuencia de acciones. Una CO se relaciona con algoritmos, acciones, que ocurren a nivel físico o mental, es dinámica, secuencial y detallada. Una CE es más abstracta, es estática, instantánea e integrada, menos detallada que la otra.

Sfard (1991) presenta un cuadro, cuya traducción extrajimos de Mora (2006, p.13):

	CO	**CE**
Característica general	Una entidad matemática es concebida como un producto de un cierto proceso o como el proceso en sí mismo.	Una entidad matemática es concebida como una estructura estática, como si fuera un objeto real.
Representación interna	Se apoya en representaciones verbales.	Se apoya en imagen visual.
Su lugar en el desarrollo del concepto	Se desarrolla en la primera etapa de formación del concepto.	Evoluciona de la concepción operacional.
Su papel en los procesos cognitivos	Es necesario, pero no suficiente para la solución de problemas y el aprendizaje	Facilita todos los procesos cognitivos (aprendizaje y solución de problemas)

Cuadro 1 – Concepciones CO y CE
Fuente: MORA (2006, p. 13)

Aunque estas dos formas de concebir un concepto dan la impresión de ser incompatibles son complementarias, una no excluye a la otra, se las trata como una dualidad, no como una

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

dicotomía. La habilidad de ver una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable para una comprensión profunda de la matemática, "cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte" (SFARD, 1991, p. 5). Sfard agrega que la CE es una etapa más avanzada en la formación de conceptos. La autora afirma que tiene buenas razones para pensar que en el proceso de construcción de un concepto la CO debería preceder a la CE.

Mora (2006) sintetiza las características de las concepciones en el siguiente cuadro:

Proceso (CO)	**Objeto (CE)**
El concepto se percibe como algo que se realiza en el tiempo.	El concepto tiene existencia real como cosa.
El concepto tiene una concepción dinámica, detallada y secuencial.	Tiene una concepción estática, que existe en alguna parte en el tiempo y en el espacio.
No existe una visualización integrada del concepto.	Existe una imagen integrada del concepto.
No es posible notar la relación del concepto con otros.	Es posible relacionar el concepto con otros y definir nuevos conceptos a partir de este.
Existe solo una representación del concepto.	Se pueden alternar diferentes representaciones.
No hay integración entre el concepto y sus propiedades.	Existe una coordinación entre el concepto y sus propiedades.

Cuadro 2 – Características de las concepciones CO y CE
Fuente: MORA (2006, p.15)

4 Objetivos de la investigación

Nos formulamos, entre otras, las siguientes preguntas:

- Qué concepción tienen los estudiantes de ingeniería sobre los conceptos de IC, ID y ER: ¿operacional, estructural o ambas?
- ¿Cuál es la incidencia del tipo de concepción que tiene el estudiante de los conceptos de IC, ID y ER en la resolución de PO? Los alumnos que manifiestan las dos concepciones ¿pueden resolver PO?

De las que surgieron los objetivos:

- Caracterizar la comprensión de los alumnos de ingeniería sobre los conceptos involucrados en el estudio de funciones en términos de sus concepciones.
- Estudiar la incidencia de la comprensión en la resolución de PO.

5 Principios metodológicos

La metodología para llevar adelante el estudio se dividió en dos partes; una de índole cualitativa y otra cuantitativa. La primera consistió en concebir, diseñar, realizar, observar y analizar una situación de aprendizaje de los conceptos involucrados en el estudio de funciones (IC, ID y ER) basada en ideas variacionales y dada en diferentes registros de representación. El objetivo principal de la misma fue que los alumnos, por sí mismos, al realizar las diferentes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

actividades, pudieran descubrir la relación entre el signo de la derivada primera de una función y los IC, ID y establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de ER.

La situación de aprendizaje consistió en cinco sesiones de trabajo de cuatro horas cada una que mantuvieron la misma modalidad. Los alumnos se agruparon en equipos de dos personas y realizaron dos producciones iguales. Al finalizar el tiempo destinado a la resolución las profesoras retiraron una producción y la otra quedó en poder de los alumnos para la discusión grupal posterior.

La segunda parte de la metodología examinó las concepciones en términos de Sfard de los conceptos de IC, ID y ER mediante el análisis de los ítems que conformaron la situación de aprendizaje y su aporte a cada una de dichas concepciones. De esta manera, cada uno de los 27 equipos que participaron en la experiencia tuvo una puntuación sobre la CO y la CE de los tres conceptos, quedando determinadas las siguientes variables de estudio:

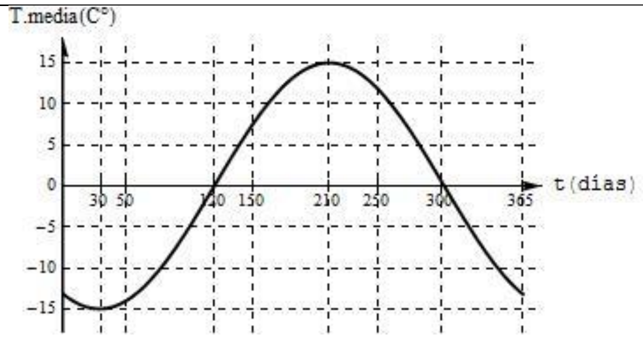
CO-IC: concepción operacional de IC
CO-ID: concepción operacional de ID
CO-ER: concepción operacional de ER
CE-IC: concepción estructural de IC
CE-ID: concepción estructural de ID
CE-ER: concepción estructural de ER

Basándonos en las características propias de las dos concepciones (ver Cuadro 2) y siguiendo la metodología empleada por Mora (2006), Murillo (2013) y Garzón, Vanegas y Delgado (2013) analizamos en la situación de aprendizaje qué acciones aportan a la CO y cuáles a la CE. Esto es, clasificamos cada uno de los ítems de las actividades, teniendo el modelo de CO y CE propuesto por Sfard, donde se mide el nivel de comprensión de un concepto matemático a partir de la superación de logros. El primer nivel está determinado por la capacidad del estudiante para desarrollar algoritmos sin profundizar en la teoría, mientras que el segundo nivel define el conocimiento del tema en la medida en que se tienen herramientas que permiten ver el concepto como un objeto que se puede manipular (MURILLO, 2013).

Mostramos dos ejemplos de cómo establecimos el aporte a cada una de las concepciones a partir de la situación de aprendizaje. La Figura 1 fue parte de la segunda actividad de la primera sesión de trabajo:

Los constructores de un oleoducto en Alaska necesitaron construir una cubierta aislante para la tubería para evitar que el calor derritiera el suelo congelado. Para diseñar esa cubierta fue necesario tomar en cuenta la variación de la temperatura del aire durante el año. De acuerdo a los datos experimentales se pudo hacer un ajuste con la siguiente curva que expresa la temperatura media del aire en cada día del año (en grados centígrados):

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27



a) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura crece
b) Determinar los intervalos de tiempo donde la temperatura decrece

Figura 1 – Parte de la Actividad 2 de la primera sesión de la situación de aprendizaje
Fuente: Elaboración propia

En este caso, cada ítem aporta a la CO de IC e ID debido a que el alumno debe realizar una lectura del gráfico y extraer directamente la información, sin relacionar conceptos ni cambiar de registro.

La Figura 2 fue parte de la segunda actividad de la tercera sesión de trabajo:

La posición de una partícula (en metros) que se mueve en línea recta en un intervalo de $0 \leq t \leq 3$ minutos respecto a un punto inicial está dada por $s(t) = -4t^3 + 4t^2 + 15t$. Se considera la posición hacia la derecha del punto como positiva y a la izquierda de dicho punto como negativa.

a) Calcular la velocidad de la partícula en cualquier instante t
b) Completar la siguiente tabla (indicar unidades):

Tiempo *t*	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Posición *s(t)*							
Velocidad *v(t)*							

c) Representar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos y comparar la función posición con la función velocidad observando las gráficas (ayudarse con los valores de la tabla).
d) Completar la siguiente tabla para analizar el comportamiento de la función según el signo de su derivada:

Intervalos	Signa de *s(t)*	Signo de *v(t)*	Comportamiento de *s(t)* (marcar lo que corresponde)		
			Crece	Decrece	No cambia
0 < t < 1,5					
t = 1,5					
1,5 < t < 2,5					
2,5 < t < 3					

e) Señalar el intervalo de tiempo en que $s(t)$ aumenta. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad?
f) Señalar el intervalo de tiempo en el que $s(t)$ disminuye. En ese intervalo: ¿qué signo tiene la velocidad de la partícula?
g) ¿Qué sucede a los 1,5 minutos de iniciado el movimiento?

Figura 2 – Actividad 2 de la tercera sesión de la situación de aprendizaje
Fuente: Elaboración propia

Los ítems c) y d) que demandan comparar las gráficas de la función posición y su velocidad hacen un aporte a la CE. En efecto, los alumnos tenían que convertir el registro analítico al gráfico, relacionar en cualquiera de los dos registros el signo de la derivada (que debían reconocer en la velocidad de la partícula) con el crecimiento o decrecimiento de la función y encontrar una correspondencia entre el instante de velocidad cero y el máximo de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

posición de la partícula. Escribir en registro verbal todo lo que estaban relacionando y, luego, volcarlo en la tabla. Esto demanda una relación entre cada concepto (IC, ID y ER) con sus propiedades y con otro objeto matemático: la derivada. Los ítems e) y f) aportan a la CO de IC e ID debido a que demandan identificar el concepto en algún registro (el gráfico de la función, el registro numérico del ítem b) o lo realizado en el ítem d)). El ítem g) constituye un aporte a CO-E pues es reafirmar o sintetizar lo que ya se realizó en los ítems c) y d).

Efectuando este análisis en todos los ítems de cada actividad de la situación de aprendizaje quedaron caracterizadas los dos tipos de concepciones en términos de las acciones llevadas a cabo por cada equipo. Hacemos un resumen de estas en el Cuadro 3:

Acciones que caracterizan a CO	**Acciones que caracterizan CE**
Identificar un concepto en un registro en contexto o sin contexto.	Relacionar signos de la razón de cambio media o de la derivada con los IC e ID en cualquier registro.
Extraer información directa de lectura de gráficos, es decir que no conlleve una relación entre conceptos, que sólo sea *mirando* el mismo.	Relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente (en registro gráfico) con el crecimiento o decrecimiento puntual de la función.
Efectuar operaciones, resolver ecuaciones, resolver desigualdades o derivar funciones.	Relacionar puntos de derivada cero o no existencia de derivada con puntos críticos.
Volcar en tablas alguna información estudiada anteriormente o que se desprende en forma directa de lo realizado en ítems anteriores.	Encontrar un método para hallar ER.
	Sacar conclusiones o volcar en una tabla una conclusión no directa o no realizada anteriormente.
	Utilizar varios registros para resolver una situación.

Cuadro 3 – Caracterizaciones de CO y CE en la situación de aprendizaje
Fuente: Elaboración propia

Valoramos con nivel de éxito 1 si en la producción del equipo se evidenciaba la acción determinada, con 0 en caso contrario. Luego, acorde a lo establecido en Mora (2006), cada equipo tuvo una puntuación para cada concepción que se obtuvo promediando los niveles de éxito logrados correspondiente a cada concepto.

Para dar respuesta al segundo objetivo que versa sobre la incidencia de las concepciones en la resolución de PO, los alumnos resolvieron dos PO en la última sesión de trabajo. Los mostramos en el Cuadro 4:

Actividad 1. En una fábrica están probando medidas para un envase de cartón. El mismo tiene forma de caja con base cuadrada y la parte superior abierta (sin tapa) ya que se hará de otro material. Para cada caja se cuenta con 1200 cm^2 de cartón.

a) Realizar un esquema o gráfico que represente la situación anterior colocando variables que representen el lado de la base cuadrada y el alto de la caja.
b) ¿Qué expresión relaciona las dos variables indicadas en el punto a) sabiendo que se cuanta con 1200 cm^2 de cartón?
c) Escribir una función que represente el volumen de la caja teniendo en cuenta las variables determinadas en el ítem a).
d) Con ayuda de la relación calculada en b), expresar el volumen hallado en función de una sola de las variables.
e) Calcular el máximo de la función volumen.
f) ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que hacen máximo el volumen? ¿Cuánto vale ese volumen?

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

Actividad 2. A un ingeniero industrial se le pidió que diseñe una lata con capacidad de 1 litro de agua, con forma de un cilindro circular recto. ¿De qué dimensiones debe ser la lata para usar la menor cantidad posible de material?

Cuadro 4 – PO de la quinta sesión de la situación de aprendizaje
Fuente: Elaboración propia

6 Análisis de los datos recabados

Las puntuaciones obtenidas para cada variable nos permitieron hacer un análisis cuantitativo con respecto a la comprensión de los conceptos de IC, ID y ER de una función en términos de las concepciones CO y CE. Los equipos fueron identificados por un número desde 1 hasta 27. En la Tabla 1 se encuentran dichas puntuaciones y agregamos dos columnas con el desempeño de los equipos en la resolución de los dos PO del último grupo de actividades: PO1 (primer problema), PO2 (segundo problema). Para la valoración de estos últimos consideremos B (bien) cuando el problema estuvo resuelto en su totalidad con respuesta correcta; R (regular) cuando se equivocaron en la respuesta o no la escribieron o hicieron un cálculo mal luego de haber encontrado el extremo en cuestión. En la evaluación M (mal) el equipo no logró terminar de resolver el problema, por ejemplo, sólo plantearon la relación entre las variables, o no aplicaron algún método para saber si el punto crítico hallado era o no ER. Consideramos No cuando los alumnos no hicieron planteo alguno de la situación.

Tabla 1 – Resultados por equipo y por variable

Equipo	CO-IC	CE-IC	CO-ID	CE-ID	CO-ER	CE-ER	PO1	PO2
1	0,9	0,625	0,9	0,375	0,91	0,58	B	B
2	1	0,75	1	0,75	0,55	0,67	M	No
3	1	0,75	0,9	0,75	0,82	0,50	B	R
4	0,8	0,75	0,7	0,875	0,82	0,50	B	B
5	1	0,75	1	0,75	0,91	0,92	B	B
6	1	0,875	1	0,75	0,91	0,75	B	B
7	1	0,875	1	0,875	0,73	0,75	B	B
8	1	0,75	1	0,75	0,91	0,83	B	B
9	1	0,625	1	0,625	0,91	0,42	B	B
10	1	0,625	1	0,625	0,82	0,92	B	B
11	0,8	0,625	0,9	0,625	0,64	0,58	M	M
12	1	0,75	1	0,875	0,82	0,67	B	B
13	1	0,625	1	0,875	0,64	0,50	B	M
14	1	0,75	0,9	0,625	0,73	0,50	M	M
15	1	1	1	1	1	0,75	B	B
16	0,6	0,625	0,7	0,5	0,64	0,42	M	No
17	1	0,875	1	1	0,73	0,75	B	B
18	0,9	0,375	0,9	0,5	0,45	0,33	M	No
19	1	0,875	1	0,875	0,55	0,50	B	R
20	1	0,75	1	0,875	0,55	0,58	B	M
21	1	0,25	0,8	0,375	0,73	0,33	B	M
22	1	0,625	1	0,875	0,64	0,50	M	M
23	0,9	0,625	1	0,75	0,64	0,58	B	B
24	1	0,75	1	0,875	0,64	0,92	M	No
25	1	0,875	1	0,875	1,00	0,67	B	B
26	1	0,75	0,7	0,875	0,82	0,67	B	B
27	0,9	0,25	0,9	0,375	0,64	0,25	M	M

Fuente: Elaboración propia

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

Siguiendo lo establecido por Mora (2006) consideramos que un equipo manifestó alguna de las dos concepciones cuando su puntuación fue mayor o igual a 0,67.

De la Tabla 1 observamos que el único equipo que no logró una CO-IC es el equipo 16. Todos los equipos manifestaron una CO-ID. Esto se diferencia con el concepto de ER, sobre el cual 16 equipos (59%) tuvieron una CO.

Respecto a la CE, el 59% de los equipos (dieciséis del total) manifestaron CE-IC, el 67% (dieciocho grupos) evidenciaron CE-ID y el 44% (doce equipos) mostraron una CE-ER.

La CO de los conceptos de IC e ID se antepuso sobre la CE de dichos conceptos en todos los equipos. En el caso del concepto de ER esto sucedió en el 74% de los equipos. Estos resultados son similares a los que obtuvo Mora (2006) donde la CO del concepto de función se antepuso sobre la CE de este en todos los estudiantes que intervinieron en el estudio.

Los equipos que manifestaron las dos concepciones sobre los tres conceptos (nueve equipos, 33%) resolvieron en forma correcta los dos PO planteados en el último grupo de actividades. Aparentemente la adquisición de las dos concepciones tuvo una incidencia positiva en la resolución de los PO.

Con el fin de resumir la información cuantitativa obtenida en la Tabla 1, realizamos un Análisis de Componentes Principales. El mismo es una técnica estadística de síntesis de los datos o reducción del número de variables tratando de perder la menor cantidad de información posible. Los nuevos componentes principales o factores son una combinación lineal de las variables originales, y además, son independientes entre sí. Un aspecto clave en esta técnica es la interpretación de los factores, ya que ésta no viene dada a priori, sino que es deducida tras observar la relación de los factores con las variables iniciales (TERRÁDEZ, s.f.). Utilizamos el programa estadístico InfoStat (DI RIENZO et al., 2017).

En primer lugar, analizamos la relación entre las variables originales a través del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson. La matriz de coeficientes de correlación entre las variables junto con sus significancias se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2 – Matriz de coeficientes de correlación/probabilidades

	CO-IC	CE-IC	CO-ID	CE-ID	CO-ER	CE-ER
CO-IC	1	0,15754	0,0004	0,0340	0,2455	0,0502
CE-IC	0,2798	1	0,0882	0,0000	0,0394	0,0003
CO-ID	0,6326	0,3344	1	0,0608	0,8042	0,0196
CE-ID	0,4092	0,7993	0,3656	1	0,4995	0,0050
CO-ER	0,2314	0,3987	0,0500	0,1358	1	0,0307
CE-ER	0,3806	0,6470	0,4464	0,5240	0,4166	1

Fuente: Elaboración propia

En la parte triangular inferior se presentan los coeficientes y en la superior el p-valor de cada uno de ellos. Si el p-valor es menor a 0,05 la correlación entre las variables es significativa y si es menor a 0,01 es altamente significativa. Entonces, observamos que existe una alta relación directa entre las calificaciones obtenidas en CO-IC y CO-ID. Esto significa que a altas (bajas) calificaciones en una de las concepciones implica altas (bajas) en la otra. Las calificaciones obtenidas en CO-ER no se relacionan con el resto de las CO. Las calificaciones obtenidas en CE están relacionadas entre sí. Es decir, a altas (bajas) calificaciones en una de ellas implica altas (bajas) en las otras.

En el Análisis de Componentes Principales se realiza una reducción de dimensionalidad con pérdida mínima de información. En este caso, se parte de una estructura de datos que contiene seis variables cuyas relaciones van a ser analizadas en un plano bidimensional. Por lo tanto, en primer lugar, debemos analizar de qué magnitud es la explicación de estos dos primeros ejes (Figura 3).

Análisis de componentes principales
Datos estandarizados
Casos leidos 27
Casos omitidos 0
Variables de clasificación
Caso
Autovalores

Lambda	Valor	Proporción	Prop Acum
1	3,09	0,52	0,52
2	1,13	0,19	**0,70**
3	0,88	0,15	0,85
4	0,47	0,08	0,93
5	0,30	0,05	0,98
6	0,12	0,02	1,00

Figura 3 – Resultados dados por InfoStat
Fuente: InfoStat

En la Figura 4, el número remarcado 0,70 indica que los dos primeros ejes que obtenemos en el análisis mencionado explican un 70% de la variabilidad total (se está admitiendo una pérdida del 30%), lo cual es altamente aceptable.

Autovectores

Variables	e1	e2
COIC	0,38	0,49
COID	0,37	0,58
COE	0,26	-0,53
CEIC	0,48	-0,33
CEID	0,45	-0,07
CEER	0,46	-0,17

Figura 4 – Resultados dados por InfoStat
Fuente: InfoStat

Las componentes principales son combinaciones lineales de las variables originales cuyos coeficientes son las coordenadas de los autovectores de la matriz de correlación (PEÑA,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

2002). En la Figura 4 observamos las coordenadas de los dos primeros autovectores que representan las cargas de las variables en las dos primeras componentes. Todas las variables tienen cargas positivas en la primera componente principal.

En la segunda componente se registran cargas bajas (no significativas) en las variables CE-ID y CE-ER. Las variables CE-IC, CE-ID y CE-ER tienen carga positiva alta solamente en el primer eje, por lo que forman un gradiente horizontal de izquierda a derecha. Las variables CO-IC y CO-ID tienen cargas positivas en ambos ejes, en consecuencia, forman un gradiente oblicuo, del tercer al primer cuadrante. Por último, la variable CO-ER tiene carga positiva en el primer eje y negativa en el segundo, por lo tanto, forma un gradiente oblicuo del segundo al cuarto cuadrante.

A partir del análisis de las correlaciones entre variables y de la significancia de estas en las componentes principales, reforzamos la formación de los gradientes de la siguiente manera:

- Las variables con carga significativa en el primer eje solamente forman un gradiente horizontal, de izquierda a derecha, porque todas las variables tienen carga positiva. Las variables implicadas son todas las CE, por lo que lo llamamos gradiente *Concepción estructural* (indicado con GCE en la Figura 5).
- Las variables con cargas positivas en el primer eje y negativas en el segundo forman un gradiente oblicuo del segundo al cuarto cuadrante. En este caso, está formado por una sola variable: CO-ER, por lo que lo llamamos gradiente *Concepción operacional de extremos* (GCOE en la Figura 5).
- Las variables que tienen cargas positivas en los dos forman un gradiente oblicuo del tercer al primer cuadrante. En este caso como dichas variables tienen que ver con CO de IC e ID, la llamamos *Concepción operacional de intervalos* (GCOI en la Figura 5).

El programa proporciona un gráfico en el que se representa con vectores a las variables originales y con puntos a los equipos (individuos) analizados. Este gráfico, denominado Biplot, se presenta en la Figura 5 y en el cual marcamos los gradientes mencionados:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

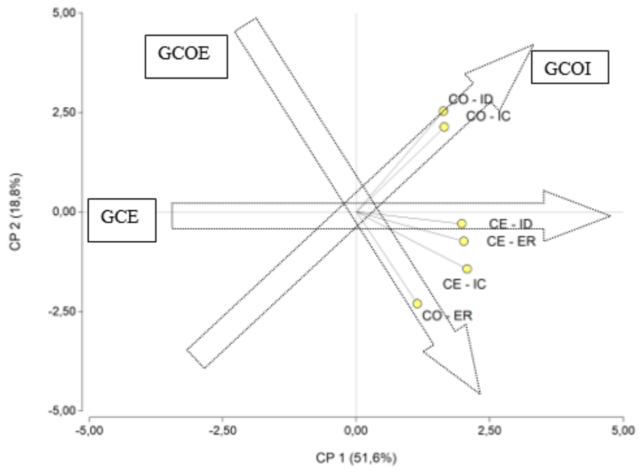


Figura 5 – Gráfico Biplot con gradientes
Fuente: InfoStat

De acuerdo al marco teórico y a los indicadores que aportan a cada una de las concepciones de cada concepto, pudimos caracterizar estas variables de diversas maneras, como explicamos a continuación.

El gradiente *Concepción operacional de intervalos* se asocia con la identificación de los conceptos de IC, ID en los tres registros por separado (gráfico, analítico y numérico) en situaciones de variación y en funciones sin contexto. En las primeras tareas desde la intuición y, luego, ya institucionalizados en clase, desde la definición formal. Se vincula con la acción de completar en tablas los primeros indicios sobre la relación entre los conceptos de IC e ID con el signo de la razón de cambio media en un intervalo y la derivada de la función en un intervalo o en un punto.

El gradiente *Concepción operacional de extremos* se relaciona con el reconocimiento del concepto de ER en todos los registros trabajados en la situación de aprendizaje en problemas en contexto o funciones sin contexto. En las primeras tareas desde la intuición y, luego, desde la definición formal de ER. Se asocia con la acción de volcar en tablas los primeros indicios sobre la relación entre un ER y el signo de la derivada primera o su no existencia. En esta concepción incluimos la identificación del concepto de punto crítico.

En el gradiente *Concepción estructural* se evidencia la integración de los conceptos de IC, ID, ER (dados en sus definiciones formales) con el signo de la función derivada para los dos primeros, y con la anulación o no existencia de esta para el último. Esta integración involucra los registros gráfico, numérico, analítico y verbal en forma conjunta, en situaciones de variación y en funciones sin contexto. A su vez, refleja la distinción entre punto crítico y ER y la obtención de un método para calcular estos últimos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

Agrupamos los 27 equipos de alumnos identificados por cada punto de acuerdo a su proximidad, quedando formados los grupos que designamos: G1, G2, G3, G4, G5 y G6 (Figura 6):

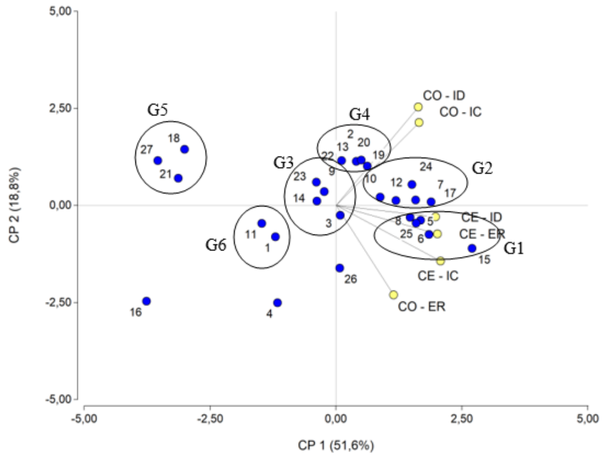


Figura 6 – Formación de grupos de equipos según proximidad
Fuente: InfoStat

Para caracterizar los individuos proyectamos los puntos en forma perpendicular a los gradientes. De esta manera, los equipos que se proyecten en el extremo positivo (negativo) de un gradiente tendrán altas (bajas) calificaciones en dicho gradiente.

Como consideración general tenemos que todos los individuos que están a la derecha (izquierda) del eje vertical obtuvieron altas (bajas) calificaciones en las tres concepciones estructurales. Es decir, el eje horizontal ordena a los individuos de acuerdo a sus calificaciones en el *Gradiente concepción estructural*. Además, los individuos del grupo G3 tienen valores medios en todas las variables, ya que están en el centro del gráfico.

Podemos analizar las características de cada grupo en cuanto a los gradientes determinados y relacionarlas con su desempeño en la resolución de los PO (Cuadro 5).

Grupo	**Equipos que lo forman**	**Gradiente concepción operacional de intervalos**	**Gradiente concepción operacional de extremos**	**Gradiente concepción estructural**	**Observaciones**
G1	5, 6, 8, 15, 25	alta	Alta	media	Todos los equipos resolvieron los dos PO.
G2	7, 10, 12, 17 y 24	alta	alta pero más bajos que G1	media	Todos los equipos salvo el equipo 24 resolvieron los dos PO. El equipo 24 resolvió mal el primer problema y no logró solucionar el segundo.
G3	3, 9. 14 y 23	media	Media	Media	Los equipos 9 y 23 resolvieron bien los dos problemas. El equipo 3 resolvió bien el primero y regular el segundo. El equipo 14 omitió aplicar método como condición suficiente de ER en los dos PO.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

G4	2, 13, 19, 20 y 22	alta	baja	Media	Los equipos 13, 19 y 20 pudieron resolver bien el PO1 y no realizaron el PO2 o lo hicieron en forma regular. El equipo 22 planteó bien el PO1, pero no aplicó método luego de encontrar el punto crítico para saber si es máximo o mínimo y no resolvió el segundo. El equipo 2 llegó hasta la instancia de derivar en el primer problema y no resolvió el segundo.
G5	18, 21 y 27	baja	baja	Baja	El equipo 18 resolvió mal el primero y no realizó el segundo. El equipo 27 resolvió mal los dos problemas, el 21 hizo bien el PO1 y mal el PO2.
G6	1 y 11	baja	media	Baja	El equipo 1 resolvió los dos PO bien y el equipo 11 mal el primero y no realizó el segundo

Cuadro 5 – Caracterización de grupos acorde a los gradientes.
Fuente: Elaboración propia

6.1 Reflexiones

En cualquiera de los grupos establecidos la CO refleja valores más altos que la CE, reflexión que obtuvimos en el análisis de la Tabla 1, observando las puntuaciones por equipo.

De los diez equipos que forman los grupos G1 y G2, nueve pudieron resolver los dos PO. El restante realizó muy pocos pasos del primero y no hizo el segundo.

Los equipos que conformaron el grupo que manifestó una valoración media en sus dos concepciones (grupo G3), resolvieron al menos un PO.

Los grupos restantes (diez equipos en total) tuvieron valoración baja en alguno de los gradientes. En estos casos el comportamiento respecto a la resolución de PO1 no fue parejo: cuatro equipos lo resolvieron bien y uno regular, los demás lo hicieron mal. En el caso del PO2, cinco lo resolvieron mal, uno regular y dos no lo hicieron.

7 Conclusiones

Analizar la comprensión no es ni fue tarea fácil. La situación de aprendizaje fue vital al respecto. El análisis a priori de la misma, en composición con el marco teórico, nos permitieron discernir qué acciones o comportamientos de los alumnos y qué respuestas caracterizaban a cada una de las concepciones. A través del proceso de enseñanza realizamos acciones para

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

ayudar al alumno a construir las dos concepciones, ya que no son estáticas, sino que pueden cambiar a lo largo de la vida, lo que da posibilidades de intervención.

Coincidimos con Sfard (1991) que estas dos concepciones son distintas y no son incompatibles, sino complementarias, una no excluye a la otra. A su vez, acordamos con ella que para comprender el sujeto debe poseer las dos concepciones.

En el análisis estadístico expuesto en el apartado 6 pudimos caracterizar los equipos que participaron de la experiencia según el nivel obtenido en cada una de las concepciones. En el grupo que tuvo puntuaciones más altas en CO y CE, todos sus equipos resolvieron correctamente los dos PO planteados. A su vez, en el grupo caracterizado por puntuaciones bajas en las dos concepciones, sus integrantes prácticamente no fueron capaces de resolver los PO.

En cuanto a:

Caracterizar la comprensión de los alumnos de ingeniería sobre los conceptos involucrados en el estudio de funciones en términos de sus concepciones.

Sobre los conceptos de IC e ID, un solo equipo no obtuvo una CO aceptable sobre el primero. Esto indicó que prácticamente todos los alumnos reflejaron una CO sobre los conceptos de IC e ID. A su vez, esta concepción prevaleció sobre la CE para estos conceptos en todos los equipos. Esta última llegó al nivel aceptable en el 59% de los equipos para los dos conceptos. En cuanto al concepto de ER, 37% manifestaron las dos concepciones. El 60% de estos equipos tuvieron una puntuación de CO mayor que la de CE. Es decir que en el caso del concepto de ER no siempre la puntuación en CO superó a la CE. Quizás esto refuerce la hipótesis que dichas concepciones son complementarias, y coincidiendo con Mora (2006), no existe una linealidad entre las dos, sino que viven en la mente del estudiante en forma conjunta.

De acuerdo a los instrumentos utilizados en nuestra investigación no pudimos dar cuenta si la formación de la CO en los estudiantes se produjo antes, luego o juntamente con la CE. Sí constatamos que poseer una CE requiere un pensamiento más avanzado que el de poseer una CO, por la misma caracterización de ambas.

Mediante la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales logramos reducir el número de variables a tres: Gradiente Concepción operacional de intervalos, Gradiente Concepción operacional de extremos y Gradiente Concepción estructural, lo que permitió reforzar las características de las concepciones.

Respecto a

Estudiar la incidencia de la comprensión de los conceptos de IC, ID y ER en la resolución de PO.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

La incidencia que vislumbramos fue que altas puntuaciones en las dos concepciones incidió en forma favorable en la resolución de dichos problemas. Si miramos las puntuaciones obtenidas en la Tabla 1 los equipos que poseen las dos concepciones sobre los tres conceptos (nueve equipos, 33% del total) resolvieron en forma correcta los dos PO planteados en el último grupo de actividades. Estos equipos se ubicaron en los grupos G1 y G2 del Análisis de Componentes Principales.

Según los resultados obtenidos, parecería que si una persona adquiere sólo una CO no puede llegar a instancias más complejas, con las dos concepciones esto se logra. En palabras de Sfard (1991) la habilidad de *ver* una entidad matemática como objeto y como proceso es indispensable para una comprensión profunda de la matemática, cualquiera sea la definición de comprensión que se adopte.

Referencias

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; L. MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 97-140.

BACCELLI, S.; ANCHORENA, S.; FIGUEROA, S.; PRIETO, G. Análisis de un problema de investigación desde el enfoque ontosemiótico. **Revista de Educación Matemática.** Número especial: trabajos de investigación y propuestas de enseñanza. 2011. Disponible en: <http://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10189>. Acceso el: 7 sep. 2015.

CABRERA, L. **El pensamiento y el lenguaje variacional y el desarrollo de competencias:** Un estudio en el marco de la reforma integral de Bachillerato. 2009. 191 p. Tesis (Maestría en Ciencias en Matemática Educativa) - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México (Distrito Federal), 2009.

CANTORAL, R. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México (Distrito Federal), v.17, p. 1-9, 2004.

CANTORAL, R.; FARFÁN, M. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. **Epsilon**, Cádiz, v. 42, p. 353-372, 1998.

CARDONA, R. **Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada**. 2009. 189p. Tesis (Maestría en Ciencias en Matemática Educativa) - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México (Distrito Federal), 2009.

CONTRERAS DE LA FUENTE, A. La enseñanza del análisis matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En: CONTRERAS, L.; CASTILLO, J.; CLIMENT, N.; SIERRA, M. (Ed.). **Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. España: Huelva, 2001, p. 71-85.

CUESTA, A. **El concepto de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica**. 2007. 295p. Tesis (Doctorado en Didáctica de las

Matemáticas) – Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, 2007.

DI RIENZO, J.A.; CASANOVES, F.; BALZARINI, M.G.; GONZALEZ, L.; TABLADA, M.; ROBLEDO, C.W. **InfoStat versión 2017.** Grupo InfoStat, FCA, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Disponible en: <http://www.infostat.com.ar>. Acceso el: 20 feb. 2017.

DOLORES, C. **Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato**. 1996. 182p. Tesis (Doctorado en Ciencias Pedagógicas) – Facultad de Ciencias, Departamento de Matemática, Instituto Superior Pedagógico: Enrique Varona, La Habana, 1996.

DUVAL, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: HITT F. (Ed.). **Investigaciones en Matemática Educativa II** México (Distrito Federal): Grupo Editorial Iberoamérica, 1998. p. 173-201.

GARCÍA, M. **Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto de derivada.** 2011. 167 p. Tesis (Maestría en Ciencias, área Matemática Educativa) – Unidad académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, 2011.

GARZÓN, M.; VANEGAS, D.; DELGADO, J. Los conocimientos geométricos de docentes en situaciones especiales en el aula. **Encuentro Educacional**, Zulia, v.20, n. 1, p. 34-47, 2013.

GUERRERO, L. **Un estudio exploratorio acerca de las concepciones que referentes al comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores del bachillerato.** 2002. 106p. Tesis (Maestría en Ciencias con orientación en la Enseñanza de la Matemática) – Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad del Estado de Guerrero, Pachuca, 2002.

MALASPINA, U. Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. **Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,** México (Distrito Federal), v. 10, n. 3, p. 365-399, 2007.

MEEL, D. Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** México (Distrito Federal), v. 6, n. 3, p. 221-278, 2003.

MORA, H. **Concepción proceso-objeto de función en la comprensión del teorema fundamental del cálculo**. 2006. 192p. Tesis (Maestría en Ciencias en Matemática Educativa) - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México (Distrito Federal), 2006.

MORENO, M. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En: MAZ, A.; GÓMEZ, B.; Y TORRALBO, M. (Ed.). **Investigación en Educación Matemática**: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Córdoba: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2005. p. 81-96.

MORENO, S.; CUEVAS, C. Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. **Educación Matemática**, México (Distrito Federal), v. 16, n. 2, p. 93-104, 2004.

MURILLO, A. **Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grado noveno y once de los colegios públicos de la Virginia**. 2013. 102 p. Tesis (Maestría en Enseñanza de la Matemática) - Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, 2013.

PEÑA, D. **Análisis de Datos Multivariantes.** Madrid: Mc. Graw Hill, 2002.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a27

PERKINS, D. ¿Qué es la comprensión? En: STONE, M. (Org.). **La enseñanza para la comprensión**. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1999, p. 69-94.

RESÉNDIZ, E. La variación de las explicaciones de los profesores en situación escolar. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,** México (Distrito Federal), v. 19, p. 617-623, 2006.

SALINAS, P. **Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio.** 2010. 300p. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa) - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México (Distrito Federal), 2010.

SÁNCHEZ, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** México (Distrito Federal), v. 11, n. 2, p. 267-296, 2008.

SÁNCHEZ, M.; MOLINA, J. G. Pensamiento y Lenguaje Variacional: una aplicación al estudio de la derivada. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México (Distrito Federal), v. 19, p. 745-751, 2006.

SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 22, n. 4, p. 1-32, 1991.

TERRÁDEZ, M. (s.f.). Análisis de componentes principales. Disponible en: <https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Componentes_principales.pdf>. Acceso en: 2 may. 2017.

VRANCKEN, S. **La construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas.** 2011. 260 p. Tesis (Maestría en Didácticas Específicas) - Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, 2011.

VRANCKEN, S.; ENGLER, A. Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 449-468, abr. 2014.

Submetido em 15 de Fevereiro de 2019.
Aprovado em 18 de Julho de 2019.