

DOI: 10.30612/tangram.v4i2.11268

Equações diferenciais ordinárias, Newton e o bolo de chocolate: Modelagem Matemática na Educação

Ordinary differential equations, Newton and the chocolate cake: Mathematical Modeling in Education

Ecuaciones diferenciales ordinarias, Newton y el pastel de chocolate: Modelización matemática en la educación

Rafael Winícius da Silva Bueno

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – IFFar
Alegrete, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: rafael.bueno@iffarroupilha.edu.br
Orcid: 0000-0002-9573-8053

Clarissa Coragem Ballejo

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: clarissa.ballejo@acad.pucs.br
Orcid: 0000-0003-4140-9550

Lori Viali

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS
Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil
E-mail: viali@pucrs.br
Orcid: 0000-0001-9944-3845

Resumo: Este artigo relata uma pesquisa sobre a utilização da prática da investigação matemática em aula, por meio da Modelagem Matemática, no contexto de ensino e aprendizagem de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis. Os sujeitos envolvidos são alunos da Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino em Alegrete, RS. Na fundamentação teórica destaca-se a Modelação como método de ensino e aprendizagem com pesquisa, que busca a contextualização e o protagonismo do estudante. Para tanto, aplicou-se um conjunto de atividades que visou a construção do clássico modelo designado de Lei de resfriamento de Newton, além de um breve questionário, cujas respostas foram estudadas mediante a Análise Textual Discursiva. Os discentes foram instigados pelo método adotado e mostraram satisfação com a possibilidade da união da teoria com a prática, enaltecendo a contextualização dos conceitos estudados.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Modelagem Matemática; Lei do Resfriamento de Newton

Abstract: This paper reports a research on the use of mathematical investigation practice in class, through Mathematical Modeling, in the context of teaching and learning ordinary differential equations of separable variables. The subjects involved are students of the Mathematics Degree of a public educational institution in Alegrete, RS. In the theoretical foundation stands out Modeling as a method of teaching and learning with research, which seeks the contextualization and the protagonism of the student. To this end, we applied a set of activities aimed at the construction of the classic model called Newton's Cooling Law, as well as a brief questionnaire, whose answers were studied through Discursive Textual Analysis. The students were instigated by the adopted method and showed satisfaction with the possibility of the union of theory with practice, highlighting the contextualization of the studied concepts.

Keyword: Ordinary Differential Equations; Mathematical modeling; Newton's law of cooling.

Resumen: Este artículo reporta una investigación sobre el uso de la práctica de la investigación matemática en el aula, a través de la Modelación Matemática, en el contexto de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables. Los sujetos participantes son estudiantes de las Matemáticas de una institución educativa pública en Alegrete, RS. En el marco teórico se destaca la Modelación como método de enseñanza y aprendizaje con investigación, que busca la contextualización y el protagonismo del alumno. Para ello, se aplicó un conjunto de actividades que tuvieron como objetivo la construcción del modelo clásico denominado Ley de Enfriamiento de Newton, además de un breve cuestionario, cuyas respuestas fueron estudiadas a través del Análisis Textual Discursivo. Los estudiantes fueron instigados por el método adoptado y mostraron satisfacción con la posibilidad de la unión de la teoría con la práctica, destacando la contextualización de los conceptos estudiados.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias; Modelización matemática; Ley del enfriamiento de Newton.

Recebido em
23/10/2019
Aceito em
09/12/2020

INTRODUÇÃO

Em uma época em que informações, das mais diversas áreas, são fácil e rapidamente encontradas por meio de dispositivos tecnológicos avançados, permanentemente conectados à internet, as percepções sobre as instituições de ensino têm se transformado. Entende-se que o conceito de escola predominantemente vigente, em que o estudante é tido como um ser passivo, receptivo e copiador (Demo, 2005), foi desenvolvido para a era do lápis e papel (Valente, 2018) e, portanto, não alcança o êxito esperado na busca por cativar os jovens do presente século.

Desta forma, os discentes nem sempre têm se mostrado atraídos pela ideia de passar aulas inteiras recebendo informações compartimentalizadas para anotá-las em seus cadernos para, depois, reproduzir nas suas avaliações o que lhes foi passado. Conseqüentemente, a função do docente contemporâneo consiste em auxiliar seus estudantes a irem além do que são capazes de fazer sozinhos (Moran, 2018).

Aulas somente expositivas perdem espaço, “uma vez que o aluno consegue acessar a mesma informação de modo mais interessante, mais detalhada, incluindo o uso de recursos visuais, que facilitam a sua compreensão” (Valente, 2018, p. 18). De acordo com Biembengut (2016), estudando da forma tradicional é provável que os conteúdos abordados sejam esquecidos tão logo ocorra o avanço para o próximo tópico, pois aprender implica construir conhecimento e não apenas acumular informação.

A respeito da Matemática, percebe-se que essa ainda se concentra, basicamente, no teórico e abstrato, privilegiando manipulações algébricas na busca pela resposta correta. Nesse cenário, é dada pouca (ou nenhuma) atenção a aspectos relevantes dessa ciência, como a formulação e a resolução de problemas, a elaboração e o teste de conjecturas, a participação em investigações, a busca por provas matemáticas, a argumentação e a análise crítica de possíveis resultados encontrados (Oliveira, Segurado, Ponte & Cunha, 1997).

Na busca por mudanças desse panorama, uma das práticas defendidas como alternativa pela Educação Matemática se caracteriza pela realização de investigações em sala de aula. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), essa metodologia de ensino e aprendizagem se constitui em uma forma de construir conhecimento, uma vez que instiga o aluno a mobilizar recursos cognitivos e afetivos com vistas a atingir um objetivo.

Uma maneira de utilizar a investigação em sala de aula, quando se busca tornar o contexto de ensino e aprendizagem relevante para os estudantes é a Modelagem Matemática. Segundo Biembengut e Hein (2003), ela se caracteriza por ser um método de ensino com pesquisa na educação e é estabelecida com o propósito de desenvolver a arte de expressar, por intermédio da linguagem matemática, situações reais, caracterizando-se, portanto, como uma forma de expressão do conhecimento.

Nesse contexto, o problema desta pesquisa é verificar as contribuições da utilização da investigação na sala de aula, por meio da Modelagem Matemática, na construção de conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no Ensino Superior. Destaca-se como objetivo desse trabalho avaliar, sob uma ótica qualitativa, a repercussão entre os alunos a respeito da introdução dessa metodologia no contexto de ensino e aprendizagem. A investigação foi realizada com uma turma do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição pública, localizada no município de Alegrete, no Estado do Rio Grande do Sul.

Para tanto, os discentes foram convidados a (re)construir, com o propósito de desenvolver conceitos referentes às EDO com variáveis separáveis, um experimento clássico da Modelagem Matemática, denominado de Lei de resfriamento de Newton. Posteriormente, os estudantes foram solicitados a responder duas questões dissertativas sobre a prática e as suas narrativas foram interpretadas por meio da Análise Textual Discursiva, segundo proposta de Moraes e Galiazzi (2007).

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Os sistemas educacionais, de acordo com D'Ambrosio (2002), no contexto de ensino e aprendizagem de Matemática, têm sido dominados pela fascinação pelo teórico e abstrato e, normalmente, apenas após a apresentação de definições rígidas e formais, são explorados exemplos, muitas vezes artificiais, que podem ser vinculados à realidade do aluno. Sobre esse contexto, abordando o conceito de derivada, Machado (1991, p. 53) afirma:

Não se podem contestar as raízes geométricas e, sobretudo, as físicas, do seu nascimento. A noção de velocidade, as taxas de variação em geral, a noção de reta tangente, foram o substrato de onde emergiu a abstração unificadora. Entretanto que brutal inversão de perspectivas ocorre quando se passa a pensar na noção de derivada como algo em si, que inclusive “se aplica” ao real! Chega-se, algumas vezes, a pretender, por ingenuidade ou comodismo, que o aluno para entender o que é velocidade de uma partícula precisa conhecer antes a noção de derivada. É como se se dissesse que é necessário entender o esquema de funcionamento do aparelho respiratório para poder respirar.

Ademais, Rosso (2016) sublinha que o ensino da Matemática, restrito aos seus elementos lógicos, tem mantido historicamente obstáculos que interferem negativamente no aprendizado, pois os estudantes pouco veem significado, ou percebem utilidade em um conhecimento construído com essas características. Como alternativa a esse tipo de prática, surgem situações que buscam trazer contextualização aos conceitos abordados e proporcionar ao discente a oportunidade de ocupar o papel central na construção do seu conhecimento, passando a ser sujeito ativo nesse processo. Dessa forma, a Matemática passa a ter mais significado para o estudante e pode, inclusive, contribuir para o desenvolvimento do seu senso crítico e de sua potencialidade criativa, características fundamentais para a formação cidadã.

Ratificando essa ideia, Biembengut (2004) salienta que, ao passar a ministrar a Matemática integrada às situações reais, contribui-se para cultivar nos alunos as importantes práticas de pensar criticamente e questionar. A relevância do fomento

dessa postura se destaca, pois, de acordo com Pais (2006), quando se omite a possibilidade de questionamento e argumentação em sala de aula tende-se a uma postura pedagógica dogmática.

Nesse sentido, defende-se a utilização da investigação em sala de aula. Essa metodologia, ao contrário do que se pode imaginar, não envolve necessariamente apenas problemas sofisticados, na fronteira do conhecimento. Sua essência encontra-se em formular questões cativantes, que agucem o interesse do estudante e, para as quais, não possua uma resposta pronta, de forma que passe a procurá-la, tanto quanto possível, de modo matematicamente fundamentado (Ponte et al., 2016).

A investigação matemática é tida como indispensável por Oliveira et al. (1997) para promover uma visão completa da disciplina, uma vez que se caracteriza como uma parte essencial da atividade matemática. Levando-se em consideração que “não é óbvio como o professor pode articular a realização de investigações com outros tipos de atividades” (Ponte et al., 2016, p. 10), sugere-se que seja colocada em uso por meio da Modelagem Matemática.

SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA

Para Biembengut (2016), um modelo é um conjunto arbitrário de símbolos, como desenhos, gráficos e leis matemáticas que interagem, cooperam e atuam na representação de algo concreto. Sendo assim, Bassanezi (2002, p. 16) afirma que a Modelagem Matemática “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Sua utilização

[...] pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (Biembengut & Hein, 2003, p. 18).

Para Torisu (2018), a Modelagem Matemática pode propiciar discussões relacionadas à formação de futuros professores de Matemática, principalmente associadas aos conhecimentos sobre Educação Matemática. Na Modelagem Matemática, ensino e aprendizagem caminham juntos, conectados às vivências e aos interesses do estudante, ampliando seu campo de aprendizagens, já que “uma produção criativa resulta do envolvimento efetivo do sujeito com o objeto de estudo” (Pais, 2006, p. 37). Ademais, o processo culmina com a formulação de um modelo, que permite processar informações, estimular novas percepções e prover uma visão estruturada que pode incluir relações abstratas. É mediante esses modelos que se expressam representações, significados e, em última instância, o conhecimento (Biembengut, 2016).

Assim, dá-se ao aluno suporte para refletir sobre um fenômeno concreto e para comunicar suas ideias de forma ordenada aos seus pares. Além disso, de acordo com Bassanezi (2002), alia-se teoria e prática, motivando o estudante a buscar meios de compreender a realidade que o cerca e de participar do mundo real, tendo a possibilidade de influenciar em suas constantes transformações. Busca-se, portanto, conforme ressalta Rosso (2016, p. 9), superar a “visão dicotômica entre sujeito e objeto do conhecimento, teoria e prática, escola e sociedade e tantas outras que impedem o desenvolvimento pleno do ser humano”.

Nesse sentido, entende-se a Modelagem Matemática como um processo de ensino com pesquisa, que valoriza o aprendizado, tornando o conhecimento construído útil, agradável e estimulante. A sua distinção, em relação ao modelo tradicional de ensino, é destacada por Biembengut (2004, p. 41), que afirma que, por meio da Modelagem

[...] a Matemática deixa de ser mera transmissão de técnicas de resolução e passa a ser apresentada como ferramenta ou estrutura de outra área do conhecimento. Além disso, proporciona ao aluno valores culturais e alguns princípios gerais concernentes ao papel desempenhado por nós enquanto pessoas responsáveis pela realidade que nos cerca.

Além disso, se a realidade e a Matemática forem percebidas (de forma apressada) como dois conjuntos disjuntos, pode-se quebrar essa dicotomia, fazendo-as interagir a partir de uma intersecção criada com a Modelagem Matemática. Nesse contexto, mesmo que essa perfaça os mesmos caminhos de uma pesquisa científica, não é uma prática que deve se restringir aos cientistas (Biembengut, 2016), pois, de acordo com Biembengut e Hein (2003), em distintos momentos no nosso cotidiano nos deparamos com situações que requerem modelagem. “Basta para isso ter um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático. Nesse sentido, a modelagem matemática não pode deixar de ser considerada no contexto escolar” (Biembengut & Hein, 2003, p. 17).

Sabendo-se que o ensino vigente exige que certos conteúdos sejam desenvolvidos, dentro de determinados períodos (trimestres, semestres, anos, ...), sugere-se adequar o processo de modelagem, de forma que ele não perca a sua essência e, também, percorra, tanto quanto possível, os assuntos previstos nas ementas propostas. Assim sendo, Biembengut e Hein (2003) denominam de Modelação Matemática o método que utiliza o cerne da modelagem, mas que realiza uma adaptação para sua aplicação em cursos regulares, com programas definidos.

Biembengut (2016) destaca como objetivo da Modelação promover situações didáticas capazes de contribuir para a construção de conhecimento por parte do estudante, familiarizando-o com o processo de fazer pesquisa no espaço escolar. Nesse contexto, essa prática oportuniza a cada aluno: entender uma situação concreta; conhecer novas linguagens matemáticas que lhe permitem representar tal situação; e interpretar os resultados obtidos junto com seus colegas.

Nessa perspectiva, segundo Biembengut (2004), o professor pode trabalhar com certos modelos conhecidos, procurando, junto com seus alunos, recriá-los em sala de aula. Para tanto, é necessário que o docente tenha audácia e, sobretudo, o desejo de modificar sua prática, dispondo-se a aprender. Esses predicados são essenciais para a atualização da sua atuação pedagógica, o que é cada vez mais necessário em uma sociedade em transformação contínua.

Conforme afirma Biembengut (2016), para que o aluno aprenda a modelar não é suficiente que o docente apenas apresente ideias, conceitos e definições. É necessário que o estudante seja orientado a identificar a situação que deve ser modelada, expressar suas observações em linguagem matemática, construir relações entre os símbolos matemáticos utilizados e formalizar, a partir dos dados coletados, um modelo que descreva o experimento realizado. Dessa forma, os alunos aprendem a investigar e, como não se faz pesquisa sem conhecimento, são criadas situações de ensino e aprendizagem que permeiam todo o processo de Modelação Matemática.

Destacada a investigação matemática em sala de aula e a possibilidade de construir situações que propiciem sua aplicação por meio da Modelação Matemática, infere-se a relevância de utilizá-las em disciplinas de cursos de formação de professores de Matemática. Assim, os futuros docentes podem vivenciar as contribuições desses métodos para a prática pedagógica e vislumbrar uma nova possibilidade de ensino e aprendizagem.

Emerge, portanto, a importância dessas atividades em cursos de licenciatura, uma vez que, conforme afirma Biembengut (2016), só se aprende a modelar quando modelamos. Nesse contexto, Leite (2008) afirma que todas essas questões se tornam ainda mais relevantes, pois os anseios de aprendizagem não se limitam ao aluno, enquanto indivíduo, mas estendem-se, sobretudo, ao futuro professor de Matemática.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A prática descrita, nesse trabalho, foi realizada no segundo semestre de 2019, com uma turma composta por quatro estudantes, na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), todos formandos do Curso de Licenciatura em Matemática, de uma instituição pública de ensino, localizada no município de Alegrete, no Estado do Rio Grande do Sul. Dentre os objetivos desse curso de formação inicial de professores, destaca-se a intenção de integrar à comunidade profissionais

qualificados e cidadãos capazes de se posicionar de maneira crítica, criativa e autônoma, tanto no contexto escolar, quanto social.

O grupo de alunos participante apresentou idades variando de 24 a 48 anos, sendo dois do sexo masculino e dois do feminino. Na disciplina, com carga horária de 72 horas aula, integrante do sétimo semestre, são trabalhadas EDO de primeira e segunda ordens e suas aplicações. O propósito é que os estudantes construam conhecimentos necessários para serem capazes de identificar, elaborar e resolver os mais diversos tipos de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias.

Nos primeiros dois encontros da disciplina, de quatro horas cada, foram apresentadas, por meio de aulas dialogadas, algumas definições, a diferença entre equações diferenciais ordinárias e parciais, a classificação quanto à ordem e a distinção entre solução geral e particular. Também foi discutido o que se denota por problema de valor inicial.

Após essas aulas introdutórias, começou-se o estudo das EDO com variáveis separáveis, por meio das seguintes perguntas, propostas pelo docente: “Alguém já assistiu a um episódio da série norte americana CSI (Crime Scene Investigation¹)?”; e “Qual a primeira pergunta que o investigador normalmente faz ao perito quando chega ao local em que se encontra um cadáver?”. Após algumas sugestões e debates, a turma chegou à conclusão de que o questionamento inicial frequentemente dizia respeito à hora estimada do óbito².

A partir dessa resposta, foi trazida ao debate, pelo docente, a Lei de Resfriamento de Newton³. Tal lei estabelece que a taxa na qual decresce a temperatura de um

¹ Investigação da cena do crime.

² Na televisão aberta, a série foi transmitida, por alguns anos, na TV Record. Na TV fechada, ainda é possível assistir à trama no canal Sony.

³ Isaac Newton foi um matemático britânico que viveu nos séculos XVII e XVIII. Teve participação fundamental em diversas descobertas e inovações científicas consideráveis, além de ser um dos principais responsáveis pela consolidação do Cálculo Diferencial e Integral como conhece-se atualmente. Segundo

objeto, que está resfriando, e a taxa em que cresce a temperatura de um objeto que está aquecendo, são proporcionais à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente. Sendo assim, informou-se que é com base nessa lei que se torna possível estabelecer a hora aproximada de um óbito. Para tanto, utiliza-se a informação de que o ser humano, enquanto vivo, mantém seu corpo a uma temperatura de aproximadamente 36,5°C e se busca determinar a sua temperatura na hora em que foi encontrado e também a do ambiente.

Sendo assim, a aula teve continuidade com a construção da expressão algébrica capaz de descrever a lei, trazida inicialmente na linguagem natural. Após algumas ideias e discussões, com o auxílio do professor, chegou-se à seguinte equação:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -k(T - T_a)$$

Nessa representação, conforme acordado entre todos os participantes da turma, tem-se que: T corresponde à temperatura do objeto observado, em graus Celsius; t denota o tempo transcorrido, em minutos, a partir do momento que se iniciou a queda ou o aumento da temperatura; k foi designada como a constante de proporcionalidade e T_a foi o símbolo escolhido para a temperatura ambiente.

Essa primeira etapa da Modelação é designada, por Biembengut (2016), de “Percepção e Apreensão” e visa a fomentar nos estudantes o interesse por algum tema familiar, que é escolhido para servir como um guia dos conteúdos que se espera desenvolver. É o momento, segundo a autora, de motivar os alunos a expressar suas percepções sobre o assunto e tomar consciência das diferentes formas de linguagem inseridas na discussão, procurando construir significados.

Feita a apresentação sobre esse modelo clássico, o professor informou que, no próximo encontro, seria realizado um experimento para que algumas questões interessantes a esse respeito fossem investigadas. Nesse momento, houve certo

Leibniz, outro matemático da época, “tomando a matemática, desde o início do mundo, até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade”. (apud BOYER, 1996, p. 269).

estranhamento por parte da turma, pois, até então, tratava-se do modelo no contexto que envolvia a hora da morte de um indivíduo. Em seguida, no entanto, o docente informou que não seria um corpo humano a ser estudado, mas sim um bolo de chocolate que seria assado pela turma. Nesse sentido, a responsabilidade por levar os ingredientes à próxima aula foi assim dividida: um estudante ficou incumbido do leite; outro dos ovos; uma discente se encarregou da caixa com a mistura (massa) pronta; outra da margarina; enquanto ao professor restou levar o chocolate e o creme de leite, para a cobertura.

Segundo Biembengut (2016), a realização desse tipo de atividade com os futuros professores, envolvendo modelos clássicos, é essencial, pois gera uma oportunidade para que vivenciem o processo, coletando dados e interpretando informações que venham a surgir. Além disso, podem compreender melhor esses modelos e, quando acharem conveniente, saberão adaptá-los ao nível de escolaridade pretendido.

Nesse contexto, na aula seguinte, iniciou-se a construção de um modelo simbólico teórico, que requer a compreensão da essência de diversos elementos que agem na natureza, buscando representar uma situação problema, por meio do estabelecimento de relações matemáticas. Esse modelo reflete a interpretação dos investigadores (estudantes) sobre as constantes e variáveis envolvidas nessa situação e que são geradas por meio de observações empíricas do fenômeno estudado. (Biembengut, 2016). A Matemática mobilizada nessas práticas, conforme ressalta Bassanezi (2002), pode ser entendida como um instrumento intelectual e um agente unificador, capaz de sintetizar ideias e construir generalizações com a finalidade de prever tendências.

Essa segunda aula de investigação, envolvendo a Lei de resfriamento de Newton, ocorreu no laboratório sensorial da instituição de ensino. Nesse ambiente, os alunos tiveram ao seu dispor um fogão com forno a gás, recipientes diversos, talheres, um forno de micro-ondas e termômetros.

Inicialmente, ainda sem saber exatamente o que estava por vir, todos os estudantes se engajaram na preparação da mistura para o bolo de chocolate. Assim que essa ficou pronta, foi colocada no forno a gás para que assasse por cerca de 35

minutos, conforme o passo a passo descrito na embalagem. Nesse momento, seguindo as orientações do professor para a preparação da cobertura do bolo, os alunos formaram duplas, dando origem a dois grupos que, nesse artigo, serão designados por grupos A e B. Antes desse trabalho começar, entretanto, foram informados que era nesse item da receita que a pesquisa se concentraria. Ou seja, a turma foi convidada a estudar o resfriamento do ganache de chocolate (uma mistura de chocolate derretido com creme de leite) que serviria para finalizar a produção culinária da aula. Sendo assim, forneceu-se termômetro aos estudantes e solicitou-se que cada grupo construísse uma tabela com o intuito de anotar a temperatura ambiente, os instantes de medição (t_i) e as respectivas temperaturas da ganache (T_i).

Essa segunda etapa da investigação é denominada de “Compreensão e Explicitação”, de acordo com Biembengut (2016), e consiste em propiciar que os discentes identifiquem elementos do tema que, partindo de seus conhecimentos prévios, possibilitem a construção de ideias e conceitos que ainda desconhecem. Para tanto, é necessário relacionar os dados coletados à compreensão, de forma que essa associação contribua para o entendimento da situação-problema em questão.

Nesse sentido, a compreensão dos estudantes se aprimora com a construção de oportunidades para a interação com contextos e linguagens que permeiam o estudo realizado. Ao passo em que se trabalha cada conteúdo, também se contribui para que os estudantes passem a explicitar conceitos matemáticos por meio das mais diversas formas de representação.

Finalizada, então, a preparação do ganache, o grupo A optou por realizar as medições de temperatura da cobertura de minuto em minuto, enquanto o grupo B fez sua tarefa em intervalos de dois minutos. Depois de aproximadamente uma hora, os dois grupos obtiveram todos os dados. Os valores obtidos pelo grupo B podem ser vistos na Figura 1.

t_i	T_i
0	27°
2	26,9°
4	25°
6	24,8°
8	24,1°
10	23,9°
12	23,5°
14	23°
16	22,9°
18	22,6°
20	22,4°

Temp. Ambiente
18°

Figura 1 – Anotações realizadas pelo grupo B

Fonte: a pesquisa.

Coletados esses dados, a investigação teve sequência buscando-se ampliar o quadro inicial, relacionando as informações obtidas de forma que, para cada intervalo de tempo, fosse calculado seu respectivo k_i . Convencionou-se com a turma que o valor da constante k , a ser utilizado na equação da Lei de resfriamento de Newton, seria dado pela média aritmética dos valores parciais obtidos. Nesse contexto, o grupo A obteve um valor de $k = 0,0314$, conforme resultados apresentados na Figura 2.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -k(T - T_a) \quad T_a = 18^\circ C$$

$$\Delta t = 1$$

t_i (Min)	T_i (°C)	ΔT	$\Delta T/\Delta t$	k_i
0	26,5	0		
1	26	-0,5	0,5	+0,0625
2	26	0	0	0
3	26	0	0	0
4	25,9	-0,1	0,1	+0,01267
5	25,8	-0,1	0,1	+0,12821
6	25,6	-0,2	0,2	-0,02632
7	25,2	-0,4	0,4	+0,056
8	25,1	-0,1	0,1	+0,01408
9	25	-0,1	0,1	+0,01423
10	25	0	0	0

$$\bar{x} = \frac{\sum k_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{0,32407}{10}$$

$$\bar{x} = 0,031407$$

Figura 2 – Ampliação do quadro do grupo A e cálculo de k

Fonte: a pesquisa.

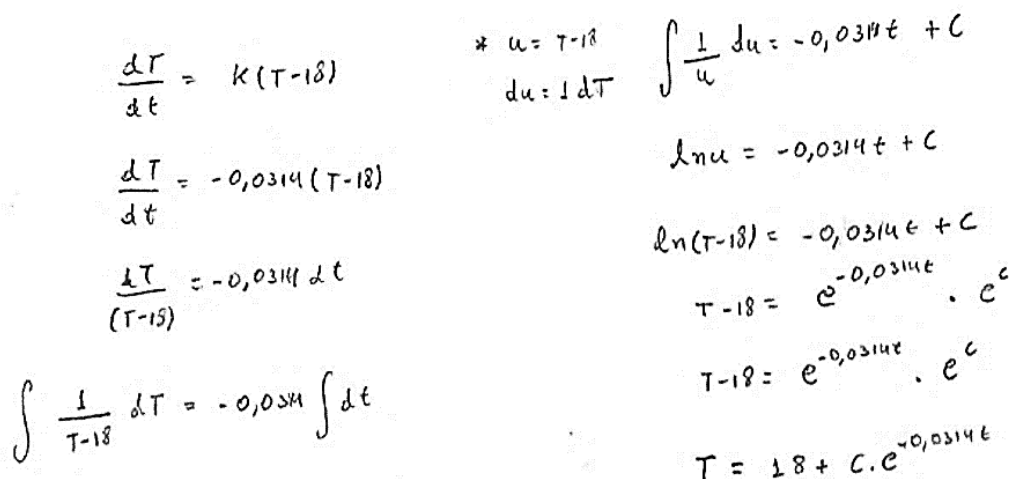
Dessa forma, cada grupo pôde complementar a sua equação inicial, de acordo com as informações coletadas. O grupo A, considerando a temperatura ambiente de 18°C, obteve a seguinte expressão algébrica:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -0,0314(T - 18)$$

Dando sequência à investigação, o professor solicitou que os alunos encontrassem, partindo das ideias relativas às equações diferenciais ordinárias, a expressão de temperatura do corpo em função do tempo. Discutindo algumas questões relativas aos conceitos de derivada e integral, chegou-se à equação relativa à variação instantânea:

$$\frac{dT}{dt} = -0,0314(T - 18)$$

A partir dessa equação diferencial, os estudantes identificaram a necessidade de ferramentas matemáticas que permitissem isolar o T , em função de t . Foram discutidas, então, as especificidades desse tipo de EDO, caracterizadas por suas variáveis separáveis, e o método de solução. O grupo A resolveu a equação, encontrando uma solução geral, dada por uma família de funções, conforme ilustrado na Figura 3.



$\frac{dT}{dt} = k(T-18)$
 $\frac{dT}{dt} = -0,0314(T-18)$
 $\frac{dT}{(T-18)} = -0,0314 dt$
 $\int \frac{1}{T-18} dT = -0,0314 \int dt$

$* u = T-18$
 $du = dT$
 $\int \frac{1}{u} du = -0,0314t + C$
 $\ln u = -0,0314t + C$
 $\ln(T-18) = -0,0314t + C$
 $T-18 = e^{-0,0314t} \cdot e^C$
 $T-18 = e^{-0,0314t} \cdot e^C$
 $T = 18 + C \cdot e^{-0,0314t}$

Figura 3 – Registro de resolução da EDO separável pelo grupo A

Fonte: a pesquisa.

Encontrada a função de cada um dos grupos, iniciou-se a terceira etapa da Modelação, chamada de “Significação e Expressão” (Biembengut, 2016), que consiste na avaliação da validade do modelo e na verificação do que foi aprendido. Segundo a autora, não se trata de avaliar exclusivamente o modelo construído, mas, sobretudo, o alcance do trabalho realizado.

Nesse sentido, analisando as respostas encontradas, a turma percebeu que, para poder fazer uso da função obtida, seria necessário encontrar o valor da constante C . Discutindo essa questão com o professor, os grupos perceberam que poderiam utilizar a informação relativa à temperatura do ganache no início da investigação ($T(0) = 26,5^\circ\text{C}$) para, assim, estabelecer um problema de valor inicial, conforme fora estudado em aulas anteriores. O grupo A obteve, então, a seguinte solução particular:

$$T(t) = 18 + 8,5e^{-0,0314t}$$

Partiu-se, então, para algumas reflexões sobre a função construída, que estabelece uma relação entre a temperatura do corpo analisado e o tempo de resfriamento transcorrido. Inicialmente, construiu-se o gráfico da função, com o auxílio do *software* gratuito de geometria dinâmica GeoGebra, com o qual os alunos já tinham familiaridade. Então, analisou-se que o gráfico possuía uma assíntota em $T = 18^\circ\text{C}$, ou seja, o limite de T , quando $t \rightarrow +\infty$, é igual à temperatura ambiente, conforma apresentado na Figura 4. Mais do que isso, constatou-se que, quanto maior o tempo transcorrido desde o início do resfriamento, mais lentamente a temperatura varia.

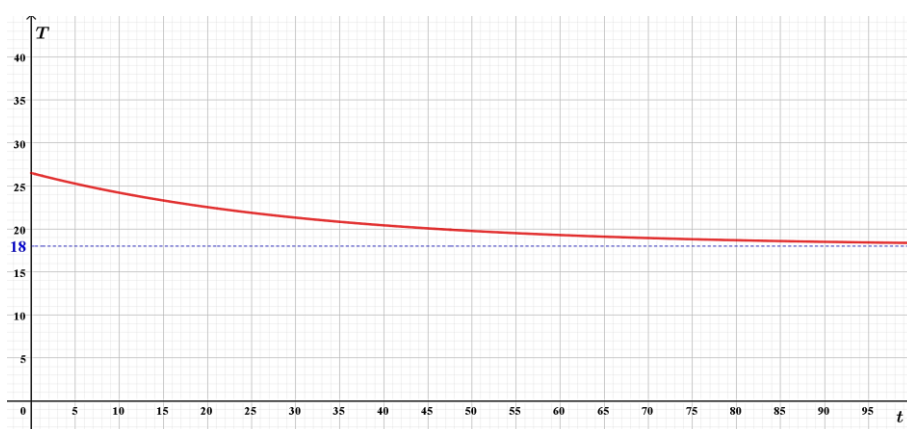


Figura 4 – Registro de resolução da EDO separável pelo grupo A

Fonte: a pesquisa.

Por meio dessa investigação matemática em sala de aula, na qual um processo foi adaptado pelo docente, buscou-se contribuir para que os estudantes pudessem aprender o conteúdo curricular e, ao mesmo tempo, a pesquisar, elaborando um modelo. Nesse sentido, entende-se que os discentes tiveram a oportunidade, mediante uma atividade prática contextualizada, de aprender e compreender melhor conceitos matemáticos, presentes na grade curricular, e a desenvolver seu senso crítico e potencial criativo ao explicitar um modelo, utilizando diferentes tipos de linguagem (Biembengut, 2016).

Nesse contexto, a Modelagem Matemática na Educação assume, segundo Moran (2018), uma das formas mais interessantes de proporcionar o aprendizado, pois baseia-se na investigação em sala de aula, na qual o professor orienta seus estudantes em um processo de desenvolvimento de habilidades, levantamento de questionamentos e procura por soluções. Essa situação requer proatividade dos alunos, no sentido de pesquisar, avaliar situações e pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir riscos e aprender pela descoberta.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Finalizada a atividade de Modelação, com o objetivo de buscar mais informações sobre a investigação realizada, foram propostas duas questões abertas aos estudantes, solicitando a construção de justificativas: “Como você acredita que a investigação realizada contribuiu para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias?” e “Nas suas futuras práticas docentes, é possível que você utilize a Modelação (Modelagem na Educação)? Justifique.”

Os quatro alunos responderam os dois questionamentos, argumentando sobre o tema. Suas narrativas foram, então, estudadas para esse trabalho à luz da Análise Textual Discursiva (ATD), conforme proposta de Moraes e Galiazzi (2007), que a

definem como uma metodologia de análise de informações, de cunho qualitativo, que visa a produção de novas compreensões sobre fenômenos e discursos.

Nesse sentido, ideias são construídas por meio de uma sequência recursiva, composta por três momentos ordenados. Inicia-se pela unitarização, caracterizada pela desconstrução dos textos analisados. Nesse momento, de acordo com Moraes e Galiuzzi (2007), breves fragmentos passam a ganhar títulos que representam a ideia central de cada trecho (unidade de significado). Nessa etapa, exige-se que os pesquisadores assumam interpretações pessoais, caracterizando o passo inicial em direção à autoria inerente à ATD.

Posteriormente há a etapa da categorização, que consiste no estabelecimento de relações entre as unidades. Ela implica em construir categorias mediante o processo de comparar e contrastar as unidades de análise, no qual os pesquisadores organizam conjuntos de elementos semelhantes, com base em seu conhecimento prévio e no referencial de abstração que suporta a investigação. (Moraes & Galiuzzi, 2007).

Por fim, chega-se à construção de metatextos, nos quais uma nova compreensão emergente é comunicada. Segundo Moraes e Galiuzzi (2007), eles expressam a compreensão dos pesquisadores sobre os significados e sentidos construídos por meio da leitura dos argumentos dos sujeitos da pesquisa. Na Figura 5, apresenta-se um esquema com as principais características de cada uma das três etapas da ATD.

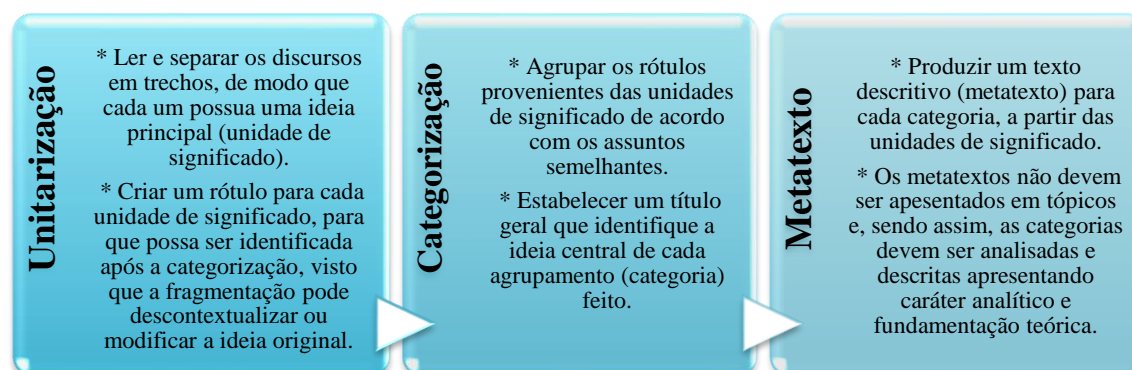


Figura 5: Etapas da Análise Textual Discursiva.

Fonte: Adaptado de Ballejo (2015).

Para iniciar o processo da ATD, primeiramente as respostas dos participantes foram lidas e fragmentadas em unidades de significado. Assim, os discursos foram segmentados em breves unidades constituintes que receberam títulos para representar a ideia central de cada trecho e um código de identificação. Nesta etapa foram identificadas 24 unidades de significado. Posteriormente, procurou-se por possíveis agrupamentos, de acordo com ideias similares. Esta junção foi realizada em mais de uma etapa, até que se conseguisse unificar ao máximo tais ideias. Partindo-se de 6 grupos, releu-se e analisou-se novamente os textos que, então, foram organizados em 2 grandes tópicos. Com isso, o percurso da ATD resultou em duas categorias emergentes, designadas por Moraes e Galiuzzi (2007) de pontes que possibilitam a auto-organização da compreensão do fenômeno pesquisado. São elas: (1) União da teoria à prática e (2) Aulas contextualizadas. Para garantir o anonimato nos metatextos, os quatro estudantes serão identificados neste artigo por meio de letras A, B, C e D.

UNIÃO DA TEORIA À PRÁTICA

Considera-se que aliar a teoria à prática, independente da área de conhecimento envolvida, é essencial para que o aluno consiga estabelecer relações dos fundamentos, princípios e conceitos estudados com a realidade, observando, portanto, suas aplicações concretas. Moran (2015, p. 18) enfatiza, inclusive, a relevância de se proporcionar conexões da teoria com a prática, pois “quanto mais aprendamos próximos da vida, melhor.”

Nesse sentido, cabe a seguinte reflexão: como formar futuros professores de Matemática que utilizem metodologias inovadoras e busquem propiciar aos seus estudantes a experiência da investigação em sala de aula, aliando teoria à prática, se eles próprios não vivenciaram essa realidade durante a graduação, formando-se como educadores?

Quando se oportuniza a conexão do objeto de estudo com a vivência de quem o estuda, o discente se afasta do papel de mero receptor de informação e projeta uma aplicação do conhecimento construído. Para tanto, é necessária a disposição do aluno a esse tipo de organização, envolvendo-se afetivamente na proposta didática. Isso foi observado quando os sujeitos se mostraram curiosos com a relação da preparação do bolo e da cobertura com as equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis. De acordo com o estudante B, nesses casos “*o interesse em resolver e obter respostas é muito estimulante e garante o aprendizado*”.

A partir dos resultados da atividade, descritos na seção anterior, e dos discursos analisados, é possível afirmar que tal experiência foi ressaltada como positiva pelos alunos, uma vez que o processo de Modelação “*proporcionou aliar as equações com algo concreto e utilizável*” (estudante A). De acordo com o estudante C, foi possível “*visualizar o uso de equações na prática que utilizamos várias vezes e nem sabíamos para que servia*”. Concordando com essa visão, Bassanezi (2002) afirma que esse método de ensino e aprendizagem tem o potencial de aliar teoria e prática, motivando seu usuário na procura por um entendimento da realidade e na busca por meios para agir sobre ela e transformá-la.

Nesse sentido, Skovsmose (2000) ressalta que permanecer no “paradigma do exercício”, característica marcante do sistema tradicional de ensino, é ficar na zona de conforto, uma vez que quando se trabalha em um cenário investigação matemática em sala de aula, nem sempre o professor consegue prever questões que podem ser levantadas pelos estudantes. A pesquisa com os discentes, nesse caso aplicada por meio da Modelação, é mais complexa e trabalhosa, posto que não há respostas previamente definidas, devendo o estudante buscá-las, mobilizando seus recursos cognitivos e afetivos (Ponte et al., 2016). Ratificando esses argumentos, o estudante B ressaltou o método utilizado nas aulas, ao escrever que “*acho importante o uso das metodologias na docência e muitas vezes não se usa essas aplicações com os alunos*”.

Para Ponte et al. (2016), pesquisar é procurar conhecer o que não se sabe. Sendo assim, o processo investigativo compreende métodos que convergem para a resolução de um problema inicialmente levantado e que possibilitou “*aliar a teoria aprendida em sala de aula*” à prática (estudante A). Além disso, de acordo com o estudante C, “*usando as duas juntas fica fácil entender sua aplicação*”.

Diante da necessidade de se formar educadores matemáticos preparados para atuarem com estudantes do século XXI, cabe a reflexão acerca da formação que lhes está sendo proporcionada. Considera-se que não se pode cobrar postura inovadora apenas do professor da educação básica, mas também do docente que atua na sua formação, no Ensino Superior, o que requer uma reflexão epistemológica acerca de sua prática docente.

Dessa forma, cabe uma análise sobre se, de fato, prepara-se com qualidade os futuros professores de Matemática. Afinal, não se pode cobrar que um professor da educação básica desenvolva práticas investigativas com seus alunos se, durante sua graduação, nunca teve contato com esse tipo de práxis, uma vez que, conforme ressalta Biembengut (2016, p. 123), “*não há como aprender modelagem sem fazer modelagem*”. Em pesquisa similar, também com graduandos em Licenciatura em Matemática, Torisu (2018) afirmou que os estudantes envolvidos na atividade de Modelagem puderam compreender a característica investigativa que práticas como essa contemplam. Salienta-se, ainda, que nesse contexto de pesquisa em sala de aula, por meio da Modelação, além de aliar a teoria à prática, acentua-se a presença da contextualização.

AULAS CONTEXTUALIZADAS

A discussão sobre contextualização na sala de aula não é assunto novo na Educação Matemática. Conforme ilustra Morin (2003), contextualizar consiste em um processo complexo, que une as partes ao todo e o todo às partes. Essa prática se constrói partindo do global para o particular e, em seguida, do particular para o global,

caracterizando sua interdependência e evitando-se, assim, a especialização excessiva, que separa o conteúdo e o conhecimento de seu significado. No entanto, muitas vezes, aceita-se que, na graduação na área de exatas, o ensino continue pautado somente por aulas consideradas tradicionais, nas quais o professor fala e o estudante apenas escuta, sem espaços para debates e reflexões.

Para Biembengut (2009, p. 24), a maior parte dos docentes do Ensino Superior “raramente relaciona o assunto matemático acadêmico ao que o futuro professor deve enfrentar; apresenta aplicações, ou ainda integra conhecimentos, como forma de apresentar a ele a interdisciplinaridade”. Segundo a autora, há diversas explicações para que isso ocorra, destacando-se as formações que tiveram, “pautadas na memorização de teorias, regras e técnicas [...] e na crença de ser esta a condição para se saber matemática” (Biembengut, 2009, p. 25).

Assim, continua-se cedendo espaço à ideologia da certeza, na qual, segundo Borba e Skovsmose (2001), aceitam-se dados prontos que envolvem modelos matemáticos e, devido ao status de verdade que possuem, não se adentra em discussões sobre a compreensão e a contextualização de tais modelos, no intuito de questioná-los. Morin (2003, p. 14) afirma que “o princípio da separação nos torna talvez mais lúcidos sobre uma pequena parte separada de seu contexto, mas nos torna cegos ou míopes sobre a relação entre a parte e seu contexto”.

Nessa lógica, o estudante A defende a prática de se contextualizar o que se estuda, ao afirmar que “*dessa maneira conseguimos quebrar o tabu que existe sobre a matemática*”, pois, conforme o estudante C, “*muitas vezes vemos conteúdos em sala de aula, onde perguntamos para que serve e a maioria das vezes não sabem explicar bem ao certo a sua utilização*”. Corroborando a essa ideia, o estudante D salienta que a aula contextualizada, por meio da Modelação, “*nos faz ver que nenhuma fórmula está ali pronta para resolver um problema, na verdade foi a partir do problema que se buscou uma fórmula ou se chegou a uma solução, o que torna mais compreensível a aprendizagem das EDO*”.

É válido sublinhar que contextualizar não se resume a citar ou trabalhar com uma aplicação prática de determinado conceito, se essa não faz parte da realidade dos estudantes envolvidos no processo, pois, assim, não se constituirá em uma atividade potencialmente significativa para esses alunos. Nesse sentido, é essencial que o tema a ser contextualizado faça sentido ao discente para que consiga se envolver afetivamente com o assunto, mobilizando suas faculdades cognitivas a estabelecer vínculos com o conteúdo, concebendo um ambiente propício à construção de conhecimento.

Para Moran (2015), a melhor forma de ensinar e aprender combina atividades, desafios e informação contextualizada de forma equilibrada. Sobre isso, os discursos analisados transpareceram a satisfação e o contentamento diante da atividade proposta, pois *“entendemos as variáveis e constantes no processo e conseguimos descrever o comportamento que estávamos procurando”* (estudante A) e *“permitiu entendermos as variações que acontecem na proporção em que o tempo decorre”* (estudante B).

Nesse contexto, a Modelação, além de contribuir para o aprimoramento do ensino e da aprendizagem de Matemática, pode *“provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento”* (Biembengut, 2009, p. 18). Mediante os questionamentos feitos aos estudantes, ficou evidente a construção de significado que tiveram com esta experiência, uma vez que todos escreveram que a pretendem usar com seus futuros alunos. O estudante D, inclusive, descreveu uma breve atividade na qual já se utilizou dessa ideia, quando escreveu que *“utilizei em um plano de aula pra introduzir o conteúdo de função afim, na qual criamos (com os alunos) um material que facilitaria a aprendizagem (um recipiente que pingava água em outro com a quantidade, onde os mesmos tinham um questionário para responder)”*.

O estudante A destacou que pretende utilizar o método futuramente, pois assim se pode *“de uma maneira descontraída construir uma visão com o aluno de que a matemática está presente em tudo, e é possível explorar praticamente todos os tipos*

de comportamento ou mensurá-los". Nesse mesmo sentido, o estudante B afirmou que pretende utilizar a Modelação "*porque as situações a serem analisadas serão do cotidiano vivido pelos alunos*". De forma similar, o estudante C refletiu que "*se tiver a oportunidade usaria sim, pois faz com que os alunos entendam para que servem muitas coisas que aprendem em sala*".

Pondera-se, entretanto, que planejar aulas contextualizadas não é tarefa fácil nem rápida. Sair da zona de conforto, redirecionando os métodos didáticos adotados, nem sempre é algo almejado na docência, posto que gera uma demanda de trabalho e organização extras. No entanto entende-se que essa mudança seja necessária, uma vez que as "ideias centrais da Matemática são resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade" (D'Ambrosio, 2002, p. 11). Essa afirmação, de acordo com Tambarussi e Klübler (2016), incide de forma evidente na formação do professor de Matemática, uma vez que, muitos desses são expostos apenas a ambientes formativos tradicionais e acabam por reproduzir a postura adquirida na sua vida profissional.

Não se procura aqui, de forma alguma, desmerecer os profissionais que optam pelas aulas consideradas tradicionais no Ensino Superior, mas propor e descrever uma prática pedagógica alternativa, que visa a beneficiar a construção de conhecimento que se estenderá dos futuros professores, hora em formação, aos seus alunos. Assim possibilita-se que os estudantes vivenciem um momento de engajamento com um processo investigativo, de maneira ativa, com envolvimento afetivo, o que privilegia o desenvolvimento cognitivo. Podem vislumbrar, portanto, outras formas de construção e interação com o conhecimento matemático, o que possivelmente influenciará positivamente suas futuras atuações como docentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Ensino Superior, caracterizado muitas vezes pela predominância de abstração, evidente pela concentração em manipulações algébricas repetitivas, acaba, muitas

vezes, por ignorar e resistir a práticas inovadoras e métodos diferenciados que contextualizam ideias e conceitos matemáticos. Assim, acaba-se por privar os discentes de um desenvolvimento acadêmico, pessoal e humano, pois “o conhecimento de nós próprios não é possível, se nos isolarmos do meio em que vivemos” (Morin, 2003, p. 14).

Entendendo-a como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema de alguma área do conhecimento (Biembengut, 2009), a Modelação se mostrou como uma metodologia de ensino e aprendizagem adequada ao trabalho com as Equações Diferenciais Ordinárias, em uma turma de formandos do curso de Licenciatura em Matemática. Respondendo aos questionamentos inicialmente propostos nesta investigação, considera-se que os estudantes se mostraram motivados e engajados com o processo de construção do seu conhecimento. Foi visível o interesse de todos durante o desenvolvimento das atividades propostas nos encontros descritos.

Os estudantes se mostraram surpresos e instigados com o método adotado pelo professor, uma vez que, aparentemente, não esperavam que essa disciplina, caracterizada rotineiramente por aulas expositivas tradicionais, pudesse adotar uma metodologia diferenciada. Entretanto, como salienta Bain (2004), as práticas docentes de sucesso no Ensino Superior são caracterizadas por professores que quebram os paradigmas tradicionais de suas disciplinas, auxiliando seus estudantes a aprender a partir de sua (do docente) capacidade de reconhecer a complexidade da construção do conhecimento humano.

Nesse sentido, salienta-se a satisfação demonstrada pelos discentes em relação a sua compreensão e aprendizagem a respeito dos conceitos envolvidos no processo de elaboração e resolução de EDO de variáveis separáveis, nesse caso aplicado à Lei de resfriamento de Newton. Por fim, espera-se que esta investigação possa servir de inspiração, não somente para os futuros professores participantes da investigação, mas para outros professores do Ensino Superior e pesquisadores da área.

AGRADECIMENTOS

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Código 001)

REFERÊNCIAS

- Bain, K. (2004). *What the best college teachers do*. Cambridge: Harvard University Press.
- Ballejo, C. C. (2015). *Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o GeoGebra no 6º ano do ensino fundamental*. (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. S. & Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. 3ª ed. São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. S. (2004). *Modelagem Matemática e Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática*. 2ª ed. Blumenau: Edfurb.
- Biembengut, M. S. (2009). 30 Anos da Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria*, 2(2), 7-32.
- Biembengut, M. S. (2016). *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

- Borba, M. C. & Skovsmose, O. (2001). A Ideologia da Certeza em Educação Matemática. In: Skovsmose, O. (Org.), Educação Matemática Crítica: a questão da democracia (pp. 127-148). 1 ed. Campinas: Papirus.
- Boyer, C. B. (1996). História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher.
- D'Ambrosio, U. (2002) Prefácio. In: Bassanezi, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.
- Demo, P. (2005) Educar pela Pesquisa. 7 ed. Campinas: Autores Associados.
- Leite, M. B. F. (2008) Reflexões sobre a Disciplina de Modelagem Matemática na Formação de Professores. Educação Matemática Pesquisa, 10(1), 115-135.
- Machado, N. J. (1991). Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 2 ed. São Paulo: Autores Associados.
- Moraes, R. & Galiazzi, M. C. (2007) Análise Textual Discursiva. Ijuí: Ed. Unijuí.
- Moran, J. M. (2015). Mudando a educação com metodologias ativas. In: Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. Coleção Mídias Contemporâneas.
- Moran, J. M. (2018). Metodologias Ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: Bacich, L. & Moran, J. M. (Orgs.). Metodologias ativas para uma educação inovadora. Porto Alegre: Penso.
- Morin, E. (2003). Da Necessidade de um Pensamento Complexo. In: Martins, F. M., Silva, J. M. (Orgs.). Para Navegar no Século XXI: tecnologias do imaginário e cibercultura. 3 ed. Porto Alegre: Sulina/EDIPUCRS.

- Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. P. & Cunha, H. (1997). Mathematical Investigations in the Classroom: a collaborative project. In: Zack, V., Mousley, J. & Breen, C. (Orgs.). Developing Practice: teachers' inquiry and educational change. Geelong, Austria: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.
- Pais, L. C. (2006). Ensinar e aprender Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2016). Investigações Matemáticas em Sala de Aula. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora
- Rosso, A J. (2016). O Diálogo Necessário do Contexto Histórico e Cultural com a Lógica na Modelagem Matemática. In: Brandt, C. F., Burak, D. & Klüber, T. E. Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. 2 ed. Ponta Grossa: Editora UEPG.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. Bolema, 13(14), 66-91.
- Tambarussi, C. M. & Klüber, T. E. (2016). Formação de Professores e a Modelagem Matemática na Educação Básica. In: Brandt, C. F., Burak, D. & Klüber, T. E. Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações. 2 ed. Ponta Grossa: Editora UEPG.
- Torisu, E. M. (2018). Construindo ideias acerca da educação matemática em um curso de licenciatura em matemática: uma experiência de modelagem. Tangram, 1(3), 96-107.
- Valente, J. A. (2018). Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. In: Valente, J. A., Freire, F. M. P. & Arantes, F. L. (Orgs.). Tecnologia e educação: passado, presente e o que está por vir. Campinas, SP: NIED/UNICAMP.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1º e 2º autores: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; visualização; redação – rascunho original.

3º autor: conceitualização; administração do projeto; supervisão; redação – revisão e edição.