

DOI: 10.30612/ tangram.v4i2.11952

A abordagem da geometria esférica no ensino e na aprendizagem matemática: o que apontam as pesquisas realizadas entre 2000 e 2018

The approach of spherical geometry in mathematical teaching and learning: what the research conducted between 2000 and 2018

El enfoque de la geometría esférica en la enseñanza y el aprendizaje matemático: lo que apunta la investigación realizada entre 2000 y 2018

Jussara Aparecida da Fonseca

Universidade Franciscana - PPGECEMAT
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil

E-mail: jussara.mat@gmail.com

Orcid: 0000-0001-6722-0743

José Carlos Pinto Leivas

Universidade Franciscana, PPGECEMAT
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil

E-mail: leivasjc@ufn.edu.br

Orcid: 0000-0001-6876-1461

Resumo: O presente artigo tem por objetivo apresentar os resultados de um mapeamento de pesquisas, realizadas entre os anos 2000 e 2018, vinculadas ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e a programas de pós-graduação em educação, educação matemática, ensino de matemática e/ou ensino de ciências e matemática, de modo a analisar o que é revelado sobre o ensino e aprendizagem da geometria esférica. O corpus do estudo foi constituído de 20 produções, analisadas a partir de critérios estabelecidos pelo processo de categorização, proposto por Moraes (2003). A análise dos dados apontou a preocupação, quanto à aprendizagem da geometria esférica por alunos da Educação Básica, a partir de diferentes encaminhamentos didático-metodológicos, mas pouca discussão sobre o ensino dessa temática em cursos de formação de professores. Tal cenário, nos levou a observar a necessidade de novas investigações que visem alternativas para o ensino da geometria esférica na formação de professores.

Palavras-chave: Geometrias não-euclidianas. Geometria Esférica. Ensino e aprendizagem

Abstract: This article aims to present the results of a mapping of research, carried out between the years 2000 and 2018, linked to the Professional Master in Mathematics on a National Network (PROFMAT) and to graduate programs in education, mathematics education, teaching of mathematics and/or science and mathematics teaching, in order to analyze what is revealed about the teaching and learning of spherical geometry. The corpus of the study consisted of 20 productions, analysed based on criteria established by the categorization process, proposed by Moraes (2003). The analysis of the data pointed out the concern, regarding the learning of spherical geometry by students of Basic Education, from different didactic-methodological orientations, but little discussion about the teaching of this theme in teacher training courses. This scenario led us to observe the need for new investigations aimed at alternatives for teaching of spherical geometry in teacher education.

Keywords: Non-Euclidian Geometries. Spherical Geometry. Teaching and Learning.

Resumen: Este artículo tiene como objetivo presentar los resultados de un mapeo de investigación, realizado entre los años 2000 e 2018, vinculado al Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT) y a programas de posgrado en educación, educación matemática, enseñanza de matemáticas y/o enseñanza de ciencias y matemáticas, con el fin de analizar lo que se revela sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría esférica. El corpus del estudio consistió en 20 producciones, analizadas sobre la base de criterios establecidos por el proceso de categorización, propuesto por Moraes (2003). El análisis de los datos señaló la preocupación con respecto al aprendizaje de la geometría esférica por parte de los estudiantes de Educación Básica, basado en diferentes direcciones didáctica-metodológicas, pero poca discusión sobre la enseñanza de este tema en los cursos de formación del profesorado. Este escenario nos llevó a observar la necesidad de más investigaciones dirigidas a alternativas para la enseñanza de la geometría esférica en la formación del profesorado.

Palabras clave: Geometrías no euclidianas. Geometría Esférica. Enseñanza y aprendizaje.

Recebido em
19/05/2020
Aceito em
03/02/2021

INTRODUÇÃO

Muitos são os aspectos a serem considerados no processo de formação de professores de matemática. Entre eles, o desenvolvimento de conhecimentos de natureza específica e didático-pedagógica, voltados ao ensino e à aprendizagem matemática.

Para Leivas (2009, p. 31), a formação do professor de matemática deve estar pautada em conhecimentos específicos de matemática e de educação matemática, possibilitando “conexões entre diversas áreas do conhecimento matemático, que facilite ou promova inter-relações entre esses conhecimentos e aqueles da matemática da escola básica”.

D’Ambrósio (1993, p. 39), destaca que nos cursos de formação de professores, além das disciplinas de formação matemática e didático-pedagógica, também são essenciais “disciplinas que questionam o conhecimento matemático como algo pronto e acabado, analisando as decisões arbitrárias que levem à legitimação de certas formas matemáticas e ao descarte de outras”.

Nessa perspectiva, uma possibilidade que se apresenta para que os referidos cursos promovam a discussão da construção do conhecimento matemático sob um viés histórico-social e filosófico é a inserção das chamadas geometrias não-euclidianas.

Sobre isso, Bonete (2000, p. 229), aponta que:

[...] o ensino de geometrias não-euclidianas, em um curso de licenciatura, pode proporcionar aos futuros professores, discussões sobre as suas diferentes concepções de verdade matemática e espaço, uma visão mais ampla dos conhecimentos geométricos euclidianos e não-euclidianos e uma compreensão do significado filosófico desses conhecimentos.

Além disso, para a autora a exploração das geometrias não-euclidianas nos cursos de licenciatura em matemática, permite ampliar a visão dos licenciandos

quanto a existência de outros modelos geométricos, tão sólidos e consistentes quanto a geometria euclidiana.

Assim, o desenvolvimento de geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura em matemática pode proporcionar ao futuro professor reflexões sobre a multiplicidade de modelos geométricos existentes, o que pode contribuir para o entendimento do conhecimento matemático como um campo do saber em permanente construção.

Entre os modelos das geometrias não-euclidianas clássicas, oriundas da negação do postulado das paralelas, estão a geometria hiperbólica e a geometria elíptica. Nessa última, encontramos um modelo desenvolvido sobre a superfície de uma esfera, o qual é foco deste trabalho, a geometria esférica.

Dentre as aplicações da geometria esférica merece destaque sua articulação com o globo terrestre. De acordo com Dueli (2013), a geometria esférica possibilita aos alunos a compreensão das propriedades das linhas imaginárias (meridianos e paralelos), bem como dos elementos relacionados a coordenadas geográficas, envolvidas na noção de localização.

Buscando analisar o que pesquisas realizadas no âmbito de programas de pós-graduação (mestrado e doutorado) revelam sobre o ensino e a aprendizagem de tópicos da geometria esférica, elaboramos esse trabalho, o qual é parte integrante da pesquisa de doutorado da primeira autora. O mesmo tem por objetivo apresentar um mapeamento de pesquisas desenvolvidas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profissional (PROFMAT) e em programas de pós-graduação, nas áreas da educação, da educação matemática, do ensino de matemática e do ensino de ciências e matemática, defendidas entre os anos 2000 e 2018.

REVISÃO DE LITERATURA

O postulado das paralelas, como comumente é conhecido o quinto postulado proposto por Euclides (360 a.C – 295 a.C) em sua famosa obra Os Elementos, sempre

foi encarado por matemáticos de diferentes épocas como pouco evidente e intuitivo, levando-os a buscar uma demonstração.

De acordo com Mlodinow (2008), o quinto postulado não parecia tão óbvio ou intuitivo quanto os demais, sendo considerado invenção do próprio Euclides e não parte dos conhecimentos que ele estava organizando e sistematizando em sua obra. Sendo assim, era natural esperar que matemáticos, posteriores a Euclides, encarassem o quinto postulado como um possível teorema, buscando demonstrá-lo.

As tentativas iniciais de demonstração do quinto postulado pautaram-se em uma dedução lógica, baseada nos outros axiomas, tomados como mais intuitivos e evidentes. Com o insucesso deste processo, baseado em demonstrações diretas, alguns matemáticos buscaram aporte em demonstrações indiretas, partindo da negação do quinto postulado, almejando chegar a uma contradição (Davis & Hersh, 2013).

Nas frustradas tentativas de demonstração, de forma direta e indireta, alguns matemáticos perceberam que o quinto postulado realmente era independente e não poderia ser demonstrado. Todavia, constaram que, a partir de sua negação, era possível a criação de outros sistemas geométricos, tão consistentes quanto aquele proposto por Euclides.

Neste sentido, Leivas (2013, p. 648) destaca que:

matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros e que havia sistemas geométricos em que ele, da forma como enunciado por Euclides, não se coadunava, sendo substituído por outro, o qual possibilitava criar um sistema geométrico consistente e perfeitamente compatível.

A negação do quinto postulado consistiu em admitir que dada uma reta e um ponto não pertencente a ela, existem infinitas retas paralelas a reta dada, passando por esse ponto ou não existe nenhuma. A substituição desse postulado, por uma de

suas negações, foi o marco na criação das chamadas geometrias não-euclidianas, consideradas tão sólidas e consistentes como a euclidiana. Neste cenário, configuram-se como geometrias não-euclidianas clássicas: a geometria hiperbólica e a geometria elíptica.

Segundo Coutinho (2001, p. 36),

na geometria hiperbólica, o postulado de Euclides é substituído pelo que afirma que, por um ponto dado P , fora de uma reta r , existe mais de uma paralela a esta reta r , enquanto que na geometria elíptica, postula-se que não existe nenhuma paralela.

A criação da geometria hiperbólica tem nos matemáticos Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e János Bolyai (1802-1860), seus principais representantes e a geometria elíptica, tem como figura central Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Além deles, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também contribuiu no estudo desses novos modelos geométricos, ao estabelecer que “a curvatura de um dado espaço poderia ser estudada na própria superfície apenas, sem referência a um espaço muito maior que possa contê-la – ou não” (Mlodinow, 2008, p. 134). Essa descoberta, mostrou que era possível desenvolver um modelo geométrico de uma superfície curva, sem correspondência a um espaço euclidiano de dimensão maior.

Para Eves (2011, p. 544), as descobertas de Bolyai, Lobachevsky e Riemann colocaram um ponto final na discussão do quinto postulado e mostraram que a geometria euclidiana não era a única existente, findando com a “convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos”.

Dentre os modelos da geometria elíptica proposto por Riemann está aquele construído sobre a superfície esférica. Nesse, os pontos são tomados do mesmo ponto de vista euclidiano e as retas são tidas como circunferências máximas. Para compreender alguns elementos e resultados dessa geometria, façamos uma análise comparativa, a partir daqueles entes que seriam correspondentes na geometria plana.

Como ponto de partida, precisamos compreender que cada modelo geométrico é desenvolvido sobre superfícies diferentes (Figura 1). A geometria plana é construída sobre uma superfície de curvatura nula (plano) e a esférica sobre uma superfície de curvatura positiva (esfera). Ambas admitem o ponto como ente primitivo e assumem diferentes noções para a reta. Na plana, a reta é considerada uma forma unidimensional (linha) infinita e na esférica a “reta” é definida como uma circunferência máxima, a qual é ilimitada, mas finita.

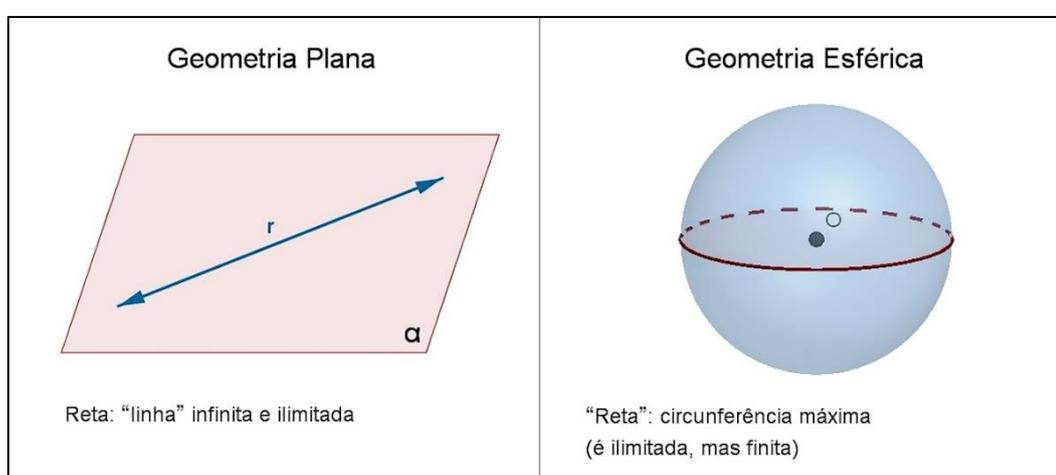


Figura 1 – Superfície e reta na geometria plana e na geometria esférica

Fonte: elaborado pela autora

A forma de determinar uma reta também é diferente nos dois modelos geométricos. Na geometria plana, uma reta é definida a partir de um axioma que afirma: dois pontos distintos determinam uma única reta. Na geometria esférica, um teorema garante que dois pontos antípodas (diametralmente opostos) determinam infinitas “retas”. Na Figura 2, ilustramos a determinação de “retas” em cada modelo geométrico.

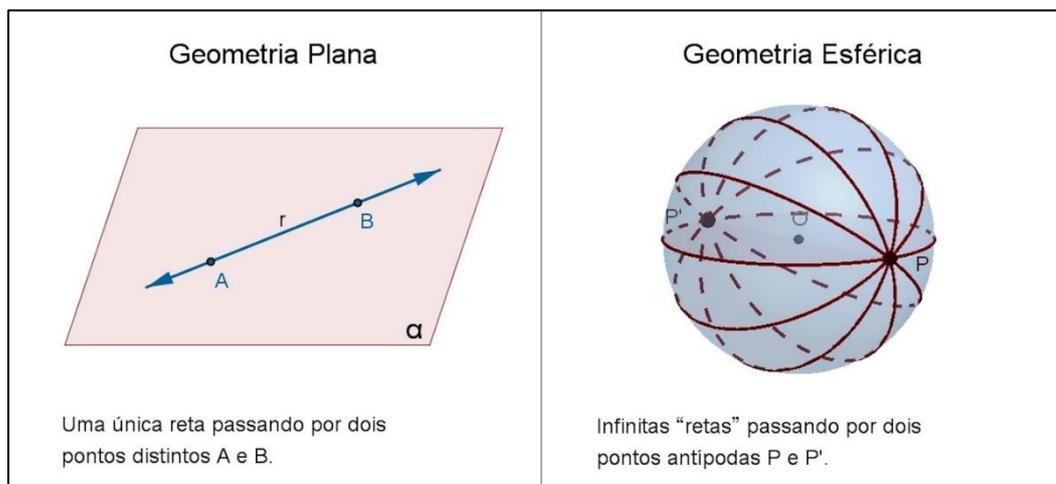


Figura 2 – Determinação de retas na geometria plana e na geometria esférica

Fonte: elaborado pela autora

A noção de segmento como a reunião entre dois pontos distintos e aqueles pontos que estão entre eles é válida nos dois modelos geométricos, sendo que na geometria esférica o "segmento" irá corresponder a arcos de circunferência máxima. Na Figura 3, podemos observar que na geometria plana, dois pontos distintos determinam um único segmento e na geometria esférica definem dois "segmentos", que podem ou não serem iguais. Os pontos C e D definem sobre a circunferência máxima dois arcos distintos (\widehat{CD}) e (\widehat{DC}) . Conseqüentemente, enquanto na geometria plana a distância entre dois pontos A e B corresponde ao segmento (\overline{AB}) (ou (\overline{BA})); na esférica, a distância entre dois pontos C e D é dada pelo menor arco de circunferência máxima definido pelos pontos (\widehat{CD}) .

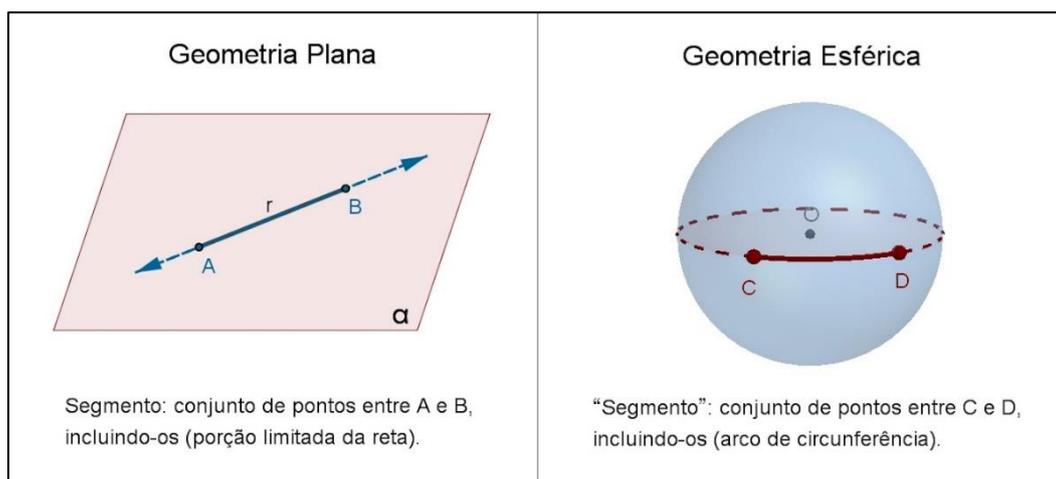


Figura 3 – Segmento de reta na geometria plana e na geometria esférica

Fonte: elaborado pela autora

A medição de um “segmento” na geometria esférica também apresenta distinção em relação àquela realizada na geometria plana. No plano utilizamos, como unidade padrão, o metro e seus múltiplos e submúltiplos; já na superfície esférica podemos lançar mão de outras unidades de medida, como o grau e/ou radianos, visto que, todo arco de circunferência máxima tem associado a ele um ângulo central. Cabe ressaltar que na geometria esférica também podemos medir “segmentos” com as unidades lineares, bastando para isso, considerar o raio da superfície esférica.

A partir dessas noções iniciais, podemos voltar nossa atenção ao resultado que caracteriza a geometria esférica como uma geometria não-euclidiana. De acordo com o axioma das paralelas, na geometria plana, dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta passando por esse ponto que é paralela à reta dada. Como já mencionamos, esse axioma não é aceito na geometria esférica, mas sim uma de suas negações, ou seja, dada uma “reta”, não existe “reta” paralela a ela.

Como consequência, as posições relativas entre duas retas são diferentes nos dois modelos geométricos, como observamos na Figura 4.

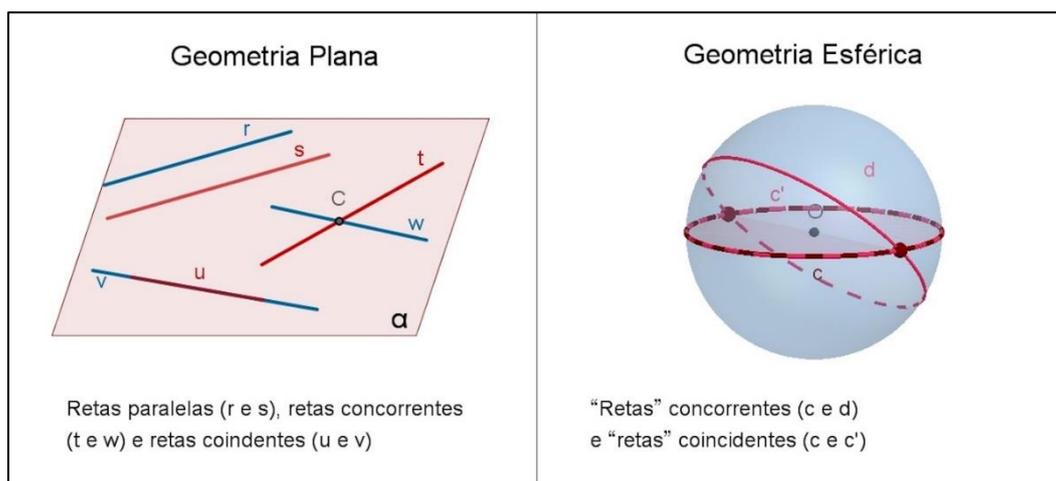


Figura 4 – Posição relativa de duas retas na geometria plana e na geometria esférica

Fonte: elaborado pela autora

Na geometria plana são definidas três posições relativas entre duas retas de um mesmo plano: concorrentes, paralelas e coincidentes. Por sua vez, na esférica, devido a não existência de retas paralelas, ficam determinadas apenas duas posições relativas entre “retas”: concorrentes e coincidentes. Duas “retas” concorrentes na geometria esférica, determinam a figura com menor número de lados desse modelo geométrico – o biângulo (também chamado de fuso esférico). Por sua vez, na geometria plana, a figura com menor número de lados é o triângulo.

Pelo exposto, podemos observar que existem elementos dos dois modelos geométricos que se aproximam e outros que se distanciam. Buscamos aqui apresentar alguns que julgamos principais para o entendimento inicial da construção da geometria esférica.

PERCURSO METODOLÓGICO

O presente trabalho, de natureza qualitativa, se caracteriza como um mapeamento, e é parte integrante da revisão de literatura de uma pesquisa de doutorado realizada pela primeira autora. Para Fiorentini et al. (2016, p.18), um

mapeamento “faz referência à identificação, à localização e à descrição das pesquisas realizadas num determinado tempo, espaço e campo de conhecimento”.

De modo a abranger as características de um mapeamento e alcançarmos nosso objetivo, realizamos quatro etapas. A primeira destinou-se a coleta de dados, realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e em repositórios digitais de alguns programas de pós-graduação, sendo empregados os seguintes descritores: geometria AND esférica, trigonometria AND esférica, “geometria esférica”, “trigonometria esférica” e “triângulo esférico”. Como resultado do levantamento dos dados foram encontradas 267 produções, distribuídas entre teses e dissertações.

Na segunda etapa, de modo a refinar os dados encontrados, excluímos trabalhos não realizados em programas de pós-graduação, nas áreas da educação, da educação matemática, do ensino de matemática e do ensino de ciências e matemática ou do PROFMAT. Foram descartados aqueles realizados antes do ano 2000 e os que apareciam em duplicidade, resultando em total de 56 produções, sendo uma tese e 55 dissertações. Em um novo refinamento, realizado a partir da leitura do resumo dos trabalhos, excluímos aqueles que ficaram apenas no campo teórico, sem realização de atividade prática, determinando, assim, um montante de 20 pesquisas.

A etapa seguinte consistiu na organização dos dados. Com o auxílio de uma planilha eletrônica, identificamos as informações principais dos estudos, tais como: título, autor, ano de publicação, Programa de Pós-Graduação, instituição, participantes, objetivo geral e metodologia.

A partir dessa organização, passamos para a última etapa que consistiu na análise dos dados. Desses, a metodologia e os participantes foram analisados sob uma perspectiva descritiva e os objetivos foram analisados a partir de uma categorização.

De acordo com Moraes (2003, p. 197), uma categorização é um “processo de comparação constante entre as unidades definidas no processo inicial da análise,

levando a agrupamentos de elementos semelhantes. Os conjuntos de elementos de significação próximos constituem as categorias”.

Para o autor, a definição das categorias pode se dar por indução ou por dedução. No modo indutivo, as categorias emergem a partir dos dados da própria pesquisa e no método dedutivo, as categorias são criadas a priori, embasadas em teorias que sustentam a pesquisa.

Em nosso estudo, utilizamos o modo indutivo, construindo categorias a partir dos objetivos gerais das pesquisas analisadas. Neste processo, elencamos as seguintes: (I) apropriação de conceitos da geometria esférica por alunos da Educação Básica; (II) potencialidades da geometria esférica na exploração de outras áreas do conhecimento (interdisciplinaridade); (III) geometria esférica na formação inicial e continuada de professores de matemática e (IV) ensino de geometria esférica por meio de materiais manipuláveis e/ou de tecnologias.

No que segue, apresentamos mais detalhadamente a análise dos dados coletados, destacando os principais resultados e conclusões.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao finalizar a organização das produções selecionadas a partir de nosso mapeamento, elaboramos um resumo, com as respectivas informações de identificação, conforme apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 Pesquisas selecionadas

TÍTULO	AUTOR	ANO	PROGRAMA / INSTITUIÇÃO
As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências	Izabel Passos Bonete	2000	PPG em Educação UNICAMP/

TÍTULO	AUTOR	ANO	PROGRAMA / INSTITUIÇÃO
			UNICENTRO
Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no Ensino Fundamental	Zionice Garbelini Martos	2002	PPG em Educação Matemática UNESP/Rio Claro
Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar	Irene Pataki	2003	PPG em Educação Matemática PUC-SP
As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica: uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de geometria esférica	João Pedro Marqueze	2006	PPG em Educação Matemática PUC-SP
Geometria esférica: uma conexão com a Geografia	Irene da Conceição Rodrigues Prestes	2006	PPG em Ensino de Matemática PUC-SP
Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis	Joana d'Arc da Silva Reis	2006	PPG em Educação Matemática UNESP/Rio Claro
Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico	Maria Lúcia Torelli Doria de Andrade	2011	PPG em Educação Matemática PUC-SP

TÍTULO	AUTOR	ANO	PROGRAMA / INSTITUIÇÃO
Abordagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no Ensino de uma sequência didática	Wanderley Pivatto Brum	2013	PPG em Ensino de Ciências Naturais e Matemática FURB
Geometria esférica: propostas de sequências didáticas interdisciplinares	Leandro de Jesus Dueli	2013	PROFMAT UFJF
Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a Geografia	Luciane Hein	2013	PROFMAT UFRPE
Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade	Adriana Marise Colombera Honda	2013	PROFMAT UEL
Geometrias não-euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas	Anna Karla Silva do Nascimento	2013	PPG em Ensino de Ciências Naturais e Matemática UFRN
Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na Educação Básica	Marlon Mülhbauer	2014	PROFMAT UTFPR
Trigonometria esférica, um ambiente não euclidiano: abordagem introdutória em um curso de formação continuada de professores	Estevam Ferreira dos Santos Filho	2015	PPG em Ensino de Ciências e Matemática PUC-MG
O ensino de trigonometria/geometria esférica: uma proposta de atividades através da sequência CRA	Marcos Patrick Souza Silva	2017	PROFMAT UFOPA
Geometria não euclidiana de curvatura positiva: uma proposta de sequência didática	Bruna de Souza Sena Barbosa	2017	PPG em Ensino

TÍTULO	AUTOR	ANO	PROGRAMA / INSTITUIÇÃO
			UENP
Investigando com o GeoGebra 3D: o método axiomático em atividades de geometria espacial e esférica	Lucas de Souza Barbosa	2017	PROFMAT FURG
Geometrias não euclidianas: uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico	Gracielle Simões de Carvalho	2017	PROFMAT UFV
Uma abordagem sobre a geometria não-euclidiana para o Ensino Fundamental	Maíra Lopes Toledo	2018	PROFMAT UNESP - Bauru
A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do GeoGebra	Francisco José Santos Uchôa	2018	PROFMAT UFC

Fonte: elaborado pela autora

Observando os dados apresentados no Quadro 1, constatamos que o número de produções vem crescendo. Verificamos que antes de 2013, as pesquisas centravam-se nos Programas de Pós-Graduação da PUC-SP e da UNESP-Rio Claro, centros já conhecidos na produção científica da área. A partir de 2013, há uma propagação de pesquisas em programas de pós-graduações em diferentes instituições de ensino superior, com destaque para as produções oriundas do PROFMAT.

Quanto aos participantes, averiguamos que cinco pesquisas se voltaram a alunos do Ensino Fundamental, dez a alunos do Ensino Médio e cinco a professores em formação inicial (3) e continuada (2). Neste cenário, percebemos que a maioria dos trabalhos (75%) buscou discutir a inserção da geometria esférica na Educação Básica, o que nos levou a refletir que há uma preocupação quanto a aprendizagem de tópicos da geometria esférica, mas pouco se discute sobre a formação do professor para o seu ensino.

Ao analisar os procedimentos metodológicos adotados nos trabalhos analisados, averiguamos que todos foram desenvolvidos sob uma abordagem de natureza qualitativa. Oito pesquisas não especificaram seus procedimentos metodológicos, mas tendo em vista as características do trabalho, constatamos que se delineavam em uma perspectiva qualitativa.

Algumas pesquisas (sete ao todo) classificaram seus procedimentos metodológicos quanto aos objetivos. Nesta classificação encontramos: pesquisa ação (2), estudo de caso (2), pesquisa de campo (2) e pesquisa participante (1). Tivemos, ainda, três produções que utilizaram a Engenharia Didática enquanto metodologia da pesquisa.

Em relação aos objetivos gerais das produções, como já indicamos, analisamos a partir de quatro categorias: (I) apropriação de conceitos da geometria esférica por alunos da Educação Básica; (II) potencialidades da geometria esférica para exploração de outras áreas do conhecimento (interdisciplinaridade); (III) geometria esférica na formação inicial e continuada de professores de matemática e (IV) ensino de geometria esférica por meio de materiais manipuláveis e/ou de tecnologias.

Cabe destacar que algumas pesquisas apresentaram elementos que as enquadrariam em mais de uma categoria. Contudo, buscamos relacionar cada produção a uma única categoria, considerando aquelas características que fossem mais predominantes.

Nesse sentido, em relação a primeira categoria, referente à apropriação de conceitos de geometria esférica por alunos da Educação Básica, encontramos oito trabalhos: Marqueze (2006), Andrade (2011), Brum (2013), Mülhbauer (2014), B. S. S. Barbosa (2017), Carvalho (2017), Silva (2017) e Toledo (2018). Desses, como exemplificação, podemos citar o objetivo da pesquisa de Marqueze (2006) e de Brum (2013). A primeira almejou verificar como uma sequência de atividades pode contribuir para alunos do Ensino Médio aprenderem conceitos básicos da geometria esférica enquanto resgatam conceitos da geometria plana e a segundo buscou analisar o desenvolvimento de uma sequência didática e suas contribuições para a

aprendizagem de conceitos elementares de geometria esférica e hiperbólica junto aos estudantes do Ensino Médio.

Na categoria potencialidades da geometria esférica na exploração de outras áreas do conhecimento (interdisciplinaridade), enquadrámos quatro produções: Prestes (2006), Dueli (2013), Honda (2013) e Heim (2013). Como exemplo, podemos mencionar o objetivo das investigações de Honda (2013) e de Prestes (2006). Honda (2013) utilizou a interdisciplinaridade como recurso para compreensão e aprendizagem de conceitos geográficos do ponto de vista da matemática, bem como os conceitos da geometria esférica e sua relação com as coordenadas geográficas e Prestes (2006) analisou possíveis contribuições da matemática no desenvolvimento de tópicos de geografia, com o interesse de contribuir para a melhoria do ensino e com o desenvolvimento de propostas de trabalhos interdisciplinares.

Para a categoria inserção da geometria esférica na formação inicial e continuada de professores de matemática, também catalogamos quatro pesquisas: Bonete (2000), Pataki (2003), Nascimento (2013) e Santos (2015). Para exemplificar objetivos dessa categoria, podemos indicar Bonete (2000), que teve por propósito refletir e discutir o ensino das geometrias não-euclidianas em um curso de licenciatura em matemática, e Pataki (2003), a qual visou examinar as possibilidades de uma sequência didática que proporcionasse aos professores envolvidos aprendizagens, reflexões e questionamentos sobre aspectos do ensino de geometria esférica.

Em relação a categoria ensino de geometria esférica por meio de materiais manipuláveis e/ou de tecnologias, enumeramos outras quatro investigações: Martos (2002), Reis (2006), L. S. Barbosa (2017) e Uchôa (2018). Deste grupo, podemos assinalar como exemplo o objetivo da pesquisa de Reis (2006), que buscou identificar materiais manipuláveis e descrever o seu uso em um processo de ensino e aprendizagem de geometria esférica, bem como a de L. S. Barbosa (2017), que propôs uma atividade de geometria espacial e de esférica, usando o ambiente 3D do software GeoGebra.

Pelo exposto, verificamos que 80% das pesquisas tiveram por objetivo discutir a inserção de tópicos da geometria esférica na Educação Básica, seja por uma perspectiva puramente matemática (40%), com subsídios na interdisciplinaridade (20%) ou com a utilização de materiais manipuláveis e/ou recursos tecnológicos (20%). As demais pesquisas (20%), voltaram-se à investigação do ensino e da aprendizagem de tópicos da geometria esférica com professores, em cursos de formação inicial ou continuada.

Sendo assim, observamos que as pesquisas realizadas em programas de pós-graduação têm buscado discutir a inserção de tópicos da geometria esférica na aprendizagem matemática na Educação Básica, propondo diferentes opções teórico-didático-metodológicas, como a interdisciplinaridade e a utilização de materiais manipuláveis e recursos tecnológicos. Todavia, são escassas as pesquisas voltadas à formação do professor de matemática, de modo a lhe proporcionar subsídios para desenvolver o ensino da geometria esférica na Educação Básica.

Acreditamos que novas pesquisas nessa direção necessitam ser realizadas, de forma a contribuir com a formação, inicial ou continuada, do professor de matemática, fortalecendo o ensino e a aprendizagem de geometrias não-euclidiana, em especial, da geometria esférica. Nesse sentido, o mapeamento ora apresentado subsidiou a definição do problema de pesquisa de doutorado da primeira autora.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscamos refletir sobre alguns aspectos relevantes da geometria esférica. A partir de um breve histórico, com cerne na problemática do quinto postulado de Euclides, elencamos encaminhamentos importantes até a criação das chamadas geometrias não-euclidianas, dando destaque para alguns personagens marcantes como Lobachevsky, Bolyai e Riemann.

Essa etapa nos fez reconhecer a importância de elementos da história da matemática na compreensão da criação ou construção de um dado conhecimento

matemático. Compreendendo esse processo de construção, reconhecemos que o conhecimento matemático não é algo pronto e acabado, como muitas vezes costuma ser apresentado nas aulas de matemática. Ao contrário, para se chegar a determinado resultado, demandam discussões teóricas e filosóficas realizadas por diferentes sujeitos, demorando, muitas vezes, anos para se consolidar.

Destacamos, ainda, alguns aspectos conceituais da geometria esférica, a partir de um paralelo com elementos correspondentes da geometria plana, com o intuito de possibilitar a verificação, mesmo que intuitivamente, de convergências e divergências conceituais dos dois modelos geométricos.

Baseados nesses pressupostos, voltamos nossa atenção ao objetivo do trabalho que consistia em apresentar um mapeamento de pesquisas desenvolvidas no PROFMAT e em programas de pós-graduação, nas áreas da educação, da educação matemática, do ensino de matemática e do ensino de ciências e matemática, defendidas entre os anos 2000 e 2018, de modo a analisar o que pesquisas realizadas no âmbito de estudos de mestrado e doutorado revelam sobre o ensino e aprendizagem de tópicos da geometria esférica.

Ao organizar os dados coletados, reconhecemos alguns elementos das produções selecionadas, tais como: ano e local de publicação, programa de pós-graduação a que está vinculado, a metodologia utilizada e o objetivo geral. Sendo que esse último foi analisado a partir de categorias criadas de acordo com Moraes (2003), o que nos permitiram identificar um perfil das pesquisas que vêm sendo realizadas.

A partir dessas análises, constatamos que as pesquisas têm se voltado, em sua maioria (75%), na discussão da inserção de tópicos da geometria esférica na Educação Básica, por diferentes encaminhamentos didáticos, tais como a utilização da interdisciplinaridade e de recursos materiais e/ou tecnológicos. Porém, pouco tem se discutido sobre a formação docente para o desenvolvimento dessa temática.

Assim, os trabalhos analisados mostraram a viabilidade da inserção de tópicos da geometria esférica na Educação Básica e apontaram a necessidade de novas investigações que busquem alternativas para o ensino da geometria esférica nos

cursos de formação de professores. Nesse sentido, acreditamos que tais discussões e reflexões oriundas das pesquisas vêm na direção de garantir não apenas melhor formação específica, também abre caminhos para a disseminação dessa temática no processo de ensino e aprendizagem de geometria na Educação Básica.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- Andrade, M. L. T. D. (2011). *Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básica*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Barbosa, B. S. S. (2017). *Geometria não euclidiana de curvatura positiva: uma proposta de sequência didática*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Norte do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil.
- Barbosa, L. S. (2017). *Investigando com o GeoGebra 3D: o método axiomático em atividades de geometria espacial e esférica*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, Brasil.
- Bonete, I. P. (2000). *As geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, PR, Brasil.

- Brum, W. P. (2013). *Abordagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no Ensino Médio usando uma sequência didática*. Dissertação de mestrado, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, Brasil.
- Carvalho, G. S. (2017). *Geometrias não euclidianas: uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, Brasil.
- Coutinho, L. (2001). *Convite às geometrias não-euclidianas* (2a ed.). Rio de Janeiro: Interciência.
- D'ambrósio, B. (1993). *Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio*. *Pró-Posições*, 4(1), 35-41.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (2013). *A experiência matemática* (2a ed., F. M. Louro e R. M. Ribeiro, Trad.). Lisboa: Gradiva.
- Dueli, L. J. (2013). *Geometria esférica: propostas de sequências didáticas interdisciplinares*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática* (5a ed., H. H. Domingues, Trad.). Campinas: Editora da Unicamp.
- Fiorentini, D., Grando, R. C., Miskulin, R. G. S., Crecci, V. M., Lima, R. C. R. & Costa, M. C. (2016). *O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa*. In D. Fiorentini, C. L. B. Passos & R. C. R. Lima (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012* (pp. 17-41). Campinas, SP: FE/UNICAMP.

- Hein, L. (2013). *Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a Geografia*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.
- Honda, A. M. C. (2013). *Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.
- Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.
- Leivas, J. C. P. (2013). *Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos*. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(3), 647-670.
- Marqueze, J. P. (2006). *As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica: uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de geometria esférica*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Martos, Z. G. (2002). *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no Ensino Fundamental*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.
- Mlodinow, L. (2008). *A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço* (E. E. Almeida Filho, Trad.). São Paulo: Geração Editorial.
- Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência & Educação*, 9(2), 191-211.

- Mülhbauer, M. (2014). *Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na Educação Básica*. Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.
- Nascimento, A. K. S. (2013). *Geometrias não-euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.
- Pataki, I. (2003). *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Prestes, I. C. R. (2006). *Geometria esférica: uma conexão com a Geografia*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Reis, J. D. S. (2006). *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.
- Santos, Filho, E. F. (2015). *Trigonometria esférica, um ambiente não euclidiano: abordagem introdutória em um curso de formação continuada de professores*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, M. P. S. (2017). *O ensino de trigonometria/geometria esférica: uma proposta de atividades através da sequência CRA*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, PA, Brasil.

Toledo, M. L. (2018). *Uma abordagem sobre a geometria não-euclidiana para o Ensino Fundamental*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Bauru, Bauru, SP, Brasil.

Uchoa, F. J. S. (2018). *A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do GeoGebra*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

1^a autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.

2^o autor: conceitualização; curadoria de dados; análise formal; investigação; metodologia; administração do projeto; supervisão; visualização; redação – rascunho original; redação – revisão e edição.