ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p387-407

Un estudio sobre el uso de CAS como caja negra para el aprendizaje de factorizaciones

A study on the use of CAS as a black box for the learning of factorization

---

ABIGAIL GONZÁLEZ MALDONADO [1]

MARIO SÁNCHEZ AGUILAR [2]

Resumen

En este artículo se reporta una investigación en la cual se intenta averiguar si los estudiantes pueden adquirir habilidades necesarias para realizar factorizaciones algebraicas, utilizando software matemático. Para contestar la interrogante de la investigación, se aplicaron actividades a estudiantes de nivel secundaria y bachillerato, donde debían calcular factorizaciones algebraicas con ayuda del software GeoGebra, posteriormente se les pedía que buscaran patrones en los resultados que arrojaba el software para poder generar una factorización general. Después de analizar los resultados de la experimentación se encontró que los estudiantes son capaces de producir factorizaciones algebraicas generales, aunque presentan ciertas dificultades. Este trabajo cierra haciendo una discusión de las implicaciones que pueden tener los resultados encontrados.

Palabras clave: *álgebra; factorización; uso de CAS como caja negra.*

Abstract

This paper describes a research study focused on finding out if mathematics students can acquire skills necessary to perform algebraic factorizations by using mathematical software. To answer the research question, a group of lower secondary school students and high school students were involved in mathematical activities where there should calculate algebraic factorizations using the software GeoGebra, then they were asked to look for patterns in the results generated by the software in order to produce a general factorization. After analyzing the results of the experimentation, it was found that students are able to produce general algebraic factorizations, but some of them have some difficulties in doing so. This work is closed by a discussion of the implications of the research results.

Keywords: *algebra; factorization; use of CAS as black box.*

[1]Licenciada en matemáticas: Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas – gomabi.mate@outlook.es
[2]Doctor en investigación en didáctica de las matemáticas: Instituto Politécnico Nacional, CICATA Unidad Legaria, Programa de Matemática Educativa – mosanchez@ipn.mx

Introducción

Con el paso del tiempo las herramientas que se utilizan para el estudio de las matemáticas han tomado un avance muy acelerado y esto ha impactado, entre otras cosas, la enseñanza de las matemáticas en las aulas. Hoy en día podemos hacer cálculos complejos de una manera simple y rápida; por ejemplo, con solo introducir unos valores, una calculadora nos puede arrojar un resultado de manera precisa sin detallar el procedimiento utilizado. A este proceso en el que una herramienta tecnológica—calculadora, *software*—produce resultados matemáticos sin clarificar el procedimiento por medio del cual se obtienen se le conoce en la literatura especializada como "caja negra".

El concepto de caja negra se vuelve relevante en la discusión de los posibles beneficios—o perjuicios—que las herramientas tecnológicas pueden brindar a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, es común escuchar que algunos profesores e investigadores argumenten que el uso de la tecnología como caja negra puede ser perjudicial para los estudiantes ya que éstos no obtienen una idea clara de las técnicas matemáticas y algoritmos que subyacen a los resultados que arroja una calculadora o *software* (LAGRANGE, 1999; PIMM, 1995). Por otro lado, hay autores que respaldan este uso de la tecnología, argumentando que el uso de la caja negra de una calculadora no impide el encuentro de los estudiantes con el razonamiento matemático (HEID, 1988; DOERR y ZANGOR, 2000; DRIJVERS, 1995).

Un propósito de este trabajo es poner a prueba la hipótesis de que el uso de las herramientas tecnológicas como caja negra no es necesariamente perjudicial para el aprendizaje de los estudiantes; es decir, intentamos mostrar que si se utilizan adecuadamente, el uso de herramientas tecnológicas como caja negra puede producir resultados útiles para el entendimiento relacional de las matemáticas (SKEMP, 2006) por parte de los estudiantes. De manera más específicas, en este estudio se trata de contestar la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Si los estudiantes utilizan software matemático como caja negra, es posible que ellos construyan factorizaciones generales?*

En la pregunta de investigación, el término *factorizaciones generales* se refiere a expresiones algebraicas que comprenden un número amplio de casos de factorizaciones algebraicas particulares, por ejemplo

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1), n \in \mathbb{N}$$

es una factorización general ya que contiene todos los casos de la factorización de la expresión $x^n - 1$ para cualquier número natural *n.* Nos concentramos en este tipo de factorizaciones algebraicas ya que consideramos que la capacidad del estudiante de construir factorizaciones generales como la anterior —es decir, no solo memorizar la fórmula sino también ser capaz de deducirla a partir de casos particulares— requiere de entendimiento relacional de las matemáticas, en este caso de reglas algebraicas y las relaciones entre ellas.

Antecedentes bibliográficos

En las primeras investigaciones que se hicieron sobre el uso de la tecnología como caja negra, dicho concepto estaba presente de manera tácita. Por ejemplo en el trabajo de Heid (1988), aunque no se menciona de manera explícita el concepto de caja negra, la mayoría de las actividades didácticas utilizadas en su trabajo se enfocaron en promover esta manera particular de usar la tecnología. De manera más específica, la autora se enfocó en averiguar el impacto que tendría una falta de énfasis en las habilidades algorítmicas que tienen los estudiantes, sobre su conocimiento de contenidos matemáticos. El estudio reportado por Heid (1988) constó de un grupo de control que recibía instrucción tradicional sobre la materia de cálculo y uno experimental en el cual se hizo énfasis en la comprensión de conceptos, y las tareas y exámenes requerían del dominio de conceptos de cálculo, mientras que la computadora hacía los algoritmos de rutina.

Cuando se le comparó a la clase experimental con una clase tradicional de cálculo, la autora notó una gran diferencia en la compresión conceptual por parte de los estudiantes de la clase experimental con respecto a los estudiantes de la clase tradicional, aun cuando no se habían desarrollado a fondo las habilidades algorítmicas:

> Los estudiantes de las clases experimentales hablaron sobre los conceptos del cálculo con más detalle, con mayor claridad, y con más flexibilidad que los alumnos del grupo de comparación. Ellos aplicaron conceptos de cálculo más adecuada y libremente. (HEID, 1988, p. 21, nuestra traducción).

La autora afirma que su investigación desafía las creencias que se tienen de que los estudiantes no pueden entender adecuadamente conceptos sin previo dominio de las habilidades básicas.

Otro estudio pionero es el de Buchberger (1990), donde se discuten por primera vez los conceptos de caja blanca y caja negra para el uso de *software* computacional en educación matemática. Buchberger formula la siguiente pregunta: “¿Deberían los estudiantes de matemáticas aprender un área X de las matemáticas cuando esta área ha sido trivializada?” (BUCHBERGER, 1990, p. 2, nuestra traducción). El autor establece que un área de las matemáticas es *trivializada* cuando hay un algoritmo que puede resolver cualquier problema de esta área. Él propone que “es totalmente inapropiado responder a tal pregunta con un estricto ‘si’ o ‘no’. Más bien la respuesta depende del área de enseñanza X” (BUCHBERGER, 1990, p. 4, nuestra traducción). Buchberger argumenta que en la etapa en la que el área X de las matemáticas es nueva para el estudiante, podría ser desastroso usar *software* simbólico como caja negra para la realización de algoritmos. Esta área debe ser estudiada a fondo, es decir, los estudiantes deben aprender conceptos básicos, teoremas, hacer demostraciones y cálculos a mano. Por otro lado si el área X se ha estudiado a fondo, se debe permitir a los estudiantes utilizar *software* simbólico para resolver problemas de esta área.

El principio de caja blanca/caja negra propuesto por Buchberger (1990) promueve el uso de *software* simbólico como caja negra después de haber estudiado cierta área de las matemáticas a fondo, sin embargo el autor manifiesta que pudo haber sido un poco “puritano” y que podría resultar interesante, en futuras investigaciones, tratar algoritmos como caja negra para el aprendizaje de los estudiantes de un área nueva de las matemáticas. Este último planteamiento del autor se relaciona con el enfoque de este trabajo, el cual trata de averiguar si un grupo de estudiantes puede construir factorizaciones algebraicas generales, utilizando *software* como caja negra, a pesar de que ellos no tengan un conocimiento previo de este tipo de factorizaciones.

Otro estudio en el que se ve plasmado el concepto de caja negra es el de Mounier y Aldon (1996) (citado en LAGRANGE 2005), en el cual se les pedía a estudiantes de bachillerato que conjeturaran y probaran la forma general de la factorización de $x^n - 1$. Los autores hicieron tres versiones de esta actividad. En la primera versión los estudiantes solo podían utilizar lápiz y papel, además la actividad se realizó en una sola sesión. En la segunda versión de la actividad, los estudiantes tenían que utilizar el *software* Derive para realizar la factorización de $x^n - 1$ para algunos valores de *n*, después de observar los resultados ellos debían encontrar la forma general de la factorización, la actividad fue realizada en una sola sesión. En la tercera versión los estudiantes trataron la factorización de $x^n - 1$ como “un problema a largo plazo”, es decir, en la primeras sesiones ellos se familiarizaron con los comandos de Derive, además practicaban en casa y en clase discutían el problema. Como resultado del experimento los autores encontraron que en la primera versión de la actividad, sus estudiantes fueron capaces de identificar que $x - 1$ era un factor, posteriormente ellos intentaban hacer división polinomial, pero les resultaba tedioso realizar las manipulaciones con lápiz y papel. Debido a la variedad de resultados que mostraba el *software* Derive, los alumnos no pudieron llegar a una conjetura en la segunda versión de la actividad. Los alumnos fueron capaces de realizar pruebas de factorizaciones más complejas después de la tercera versión de la actividad.

Por otro lado, el trabajo de Trouche et al. (1998) (citado en LAGRANGE 2005), describe una actividad en la que se usa tecnología como caja negra para el aprendizaje de cálculo diferencial. Los autores plantearon un problema a estudiantes de bachillerato donde debían calcular la derivada n-ésima de $(x^2 + x + 1)e^x$. Con la ayuda de la calculadora TI-92 los alumnos fueron capaces de identificar patrones cuando calcularon la primera, segunda y tercera derivada de dicha expresión, además ellos demostraron sus conjeturas.

Un último ejemplo es la investigación de Cedillo y Kieran (2003), donde se reporta un proyecto de investigación, en el cual, estudiantes de nivel secundaria de 15 escuelas de México fueron equipados con calculadoras que poseían un sistema algebraico computacional (CAS). El objetivo de este proyecto fue evaluar la forma en la que el uso de CAS influye en el aprendizaje de los estudiantes del álgebra.

En su trabajo, Cedillo y Kieran mencionan que a menudo se piensa que las actividades de caja blanca deben ser utilizadas, esencialmente, antes de utilizar un CAS como caja negra. Los autores manifiestan que tal vez las personas piensan así porque utilizan caja negra con los alumnos, simplemente como una herramienta para la resolución de problemas después de haber aprendido a razonar los mismos. Por lo que plantean que no se debe discutir qué tipo de actividad es primero si caja blanca o caja negra, en su lugar, proponen utilizar el CAS en un ambiente de "caja gris" el cual entrelaza ambos, caja blanca y caja negra. En el estudio que ellos realizaron, el CAS no se utilizó únicamente para la resolución de problemas, sino también para aprender conceptos de álgebra.

Los resultados arrojaron que los estudiantes estaban desarrollando la noción de una letra como un símbolo el cual representa cualquier número—una idea subyacente al concepto de variable, y una expresión algebraica como un programa que se utiliza para hacer una tabla o resolver un problema. Así, los investigadores concluyen que los estudiantes que se introdujeron al álgebra utilizando CAS, aprendieron código algebraico mientras ellos lo describían y producían.

Como se evidencia en esta revisión bibliográfica, las investigaciones en las que se promueve que los estudiantes usen herramientas tecnológicas como caja negra con el propósito que aprendan nociones matemáticas, no son muchas. Además, la mayoría de ellas se centran en tópicos como el álgebra y el cálculo. Otra característica de estas investigaciones es que se basan en intervenciones de largo y mediano plazo, es decir, no se reportan los efectos que se podrían generar en el aprendizaje de los estudiantes al utilizar la tecnología como caja negra en plazos de tiempo cortos, como los disponibles en una clase de matemáticas.

Una de las contribuciones de este trabajo es explorar los posibles beneficios y limitaciones que el uso de tecnología como caja negra puede generar en el aprendizaje matemático de los estudiantes, en tiempos de intervención cortos similares a los tiempos de instrucción que tienen lugar en la escuela. De manera particular nos enfocamos en analizar los efectos del uso del *software* GeoGebra en el aprendizaje de factorizaciones algebraicas generales.

Marco conceptual

Esta investigación se basó en un marco conceptual integrado por varios elementos los cuales nos sirven para designar una manera particular de utilizar tecnología en la enseñanza de las matemáticas. En particular, el marco conceptual está integrado por: (1) las nociones de entendimiento relacional e instrumental de las matemáticas, y (2) el concepto de caja negra.

Entendimiento relacional e instrumental

Una distinción básica sobre el tipo de entendimiento matemática que pueden desarrollar los estudiantes es la de entendimiento relacional e instrumental propuesto por Richard Skemp (SKEMP, 2006; STAR, 2014). El entendimiento relacional se refiere a saber qué hacer ante una situación problemática pero también entender el porqué se hace, mientras que el entendimiento instrumental se puede reducir a la aplicación de reglas sin razonamiento o sin entendimiento sobre el porqué de su funcionamiento.

En el contexto algebraico en el que se desarrolla este estudio, particularmente en el aprendizaje de factorizaciones, un entendimiento instrumental puede entenderse como la capacidad del estudiante de memorizar y aplicar fórmulas que le permitan factorizar expresiones algebraicas —como las fórmulas de productos notables—; por otro lado un entendimiento relacional implicaría no solo poder memorizar y aplicar fórmulas, sino también entender sobre las relaciones entre esas fórmulas, y sobre su origen y significado.

El concepto de caja negra

Un concepto que sirvió de enfoque para esta investigación es el de *caja negra* (BUCHBERGER, 1990), el cual se utilizó para clasificar el uso particular de un *software* matemático. Como ya se mencionó en la sección anterior, podemos definir caja negra como un proceso en el cual se obtienen resultados a un problema mediante el uso de *software* matemático o calculadoras, pero sin detallar el proceso interno realizado para ello. Es importante aclarar que el concepto de caja negra no siempre es utilizado en entornos tecnológicos, es decir, cuando se habla de caja negra no siempre se está refiriendo al uso de herramientas tecnológicas. Un ejemplo es el trabajo de Williams y Wake (2007) en el que el concepto de caja negra se utiliza para referirse al uso de las matemáticas en el trabajo.

Al proceso a través del cual se generan resultados de operaciones matemáticas —ya sea con herramientas tecnológicas o lápiz y papel, mostrando detalladamente los pasos que se siguieron para llegar a dichos resultados, se le denomina *caja blanca* (BUCHBERGER, 1990). Este de alguna manera puede considerarse como un concepto opuesto al de caja negra. Una mezcla de ambos conceptos—caja blanca y caja negra—es el de *caja gris* (CEDILLO y KIERAN, 2003), el cual se refiere a utilizar CAS, no solo como caja negra, sino también como caja blanca, es decir, como una herramienta que ayuda a crear significados simultáneos para los objetos y las transformaciones del álgebra (p. 221).

Método

En esta sección del artículo se describe el método seguido en el estudio para responder a la pregunta de investigación.

Población y contexto de estudio

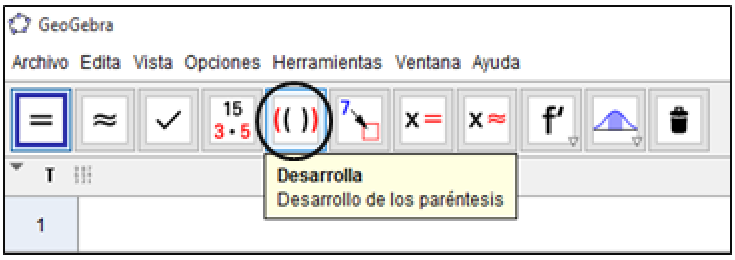
En este estudio participaron trece estudiantes, seis de ellos hombres y siete mujeres. La edad de los estudiantes variaba entre 14 a 16 años. Una de las estudiantes cursaba el 3° año de secundaria, y el resto se encontraba en 1° semestre de bachillerato. En cuanto a su experiencia en el tema de factorizaciones, todos los participantes tenían un nivel de conocimiento muy básico y ninguno de ellos conocía el desarrollo o la factorización de las expresiones que se utilizaron para las actividades descritas más adelante. La participación de todos los estudiantes fue voluntaria y anónima.

A los estudiantes se les proporcionó una computadora, hojas de trabajo y lápices. Las computadoras contaban con el *software* necesario para llevar a cabo las actividades.

Software utilizado

El *software* que se utilizó para las actividades fue GeoGebra, el cual es un *software* de geometría dinámica con capacidades algebraicas. De manera particular, una de las herramientas con las que cuenta este *software* es el Sistema de Cómputo Algebraico (CAS), la cual se utilizó para desarrollar las actividades aplicadas durante el estudio. En particular, los comandos que se utilizaron fueron "desarrolla" y "factoriza"(ver figura 1 y 2).

Figura 1: comando "desarrolla" de Geogebra



Fuente: *software* Geogebra (2016)

Figura 2: comando "factoriza" de Geogebra

Fuente: *software* Geogebra (2016)

Actividades aplicadas

Se escogieron dos actividades, ambas aplicadas en una sola sesión. Se seleccionaron porque son actividades comúnmente utilizadas en clases de álgebra, sin embargo, ninguno de los alumnos participantes conocía la forma general de las expresiones, dicho de otra manera, ellos solo habían visto casos particulares de las actividades que se utilizaron, pero jamás habían visto su forma general.

La primera actividad fue del desarrollo del binomio de Newton el cual es el siguiente

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Donde n y k pertenecen al conjunto de los números naturales y $\binom{n}{k}$ se le llama *coef iciente binomial* y lo podemos calcular como se sigue

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Esta actividad se realizó con el fin de familiarizar a los estudiantes con los comandos de GeoGebra y con la manera de introducir las expresiones algebraicas, además para explorar los conocimientos que tenían del tema. Por otro lado, a través de esta actividad los estudiantes tendrían una idea de lo que se pedía para la actividad dos, es decir ellos observarían cómo se construía la generalización.

Esta primera actividad fue un poco más guiada que la segunda. Primero se les pidió a los estudiantes que calcularan el desarrollo de la expresión para n=2 y posteriormente para n=3, entonces se le pedía a alguno de ellos que dictara sus resultados para así anotarlos en el pizarrón de modo que todos pudieran comparar y corroborar sus cálculos. Posteriormente se les preguntaba qué era lo que podían notar al comparar las dos ecuaciones, esto con el fin de que ellos llegaran a una generalización del desarrollo. Ya que con solo dos expresiones no bastaba para comenzar a identificar patrones, se les pidió que le dieran a n los valores de 4 y 5, y entonces se volvía a anotar en el pizarrón el desarrollo de las expresiones para estos valores de n, debajo de las que ya se habían anotado, y nuevamente se les preguntaba qué patrones encontraban.

La interfaz de GeoGebra les permitía observar todos los cálculos que se realizaban anteriormente, de este modo no solo se podían ver en el pizarrón todos los cálculos que se desarrollaron, sino que también ellos podían verlos en su computadora.

Todos los comentarios por parte de los estudiantes en esta actividad fueron en grupo, es decir cualquiera podía contestar y el resto escuchar la respuesta de sus compañeros. Esta actividad tuvo una duración aproximada de 20 minutos y posteriormente se pasó a realizar la segunda actividad.

La segunda actividad consistió en la factorización de $x^n - 1$, tomada de Mounier y Aldon (1996) citado en Lagrange (2005), la cual tiene la siguiente forma:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1), n \in \mathbb{N}$$

Los estudiantes trabajaron de forma individual, es decir ya no trabajaron en conjunto en el pizarrón como en la primera actividad, no se les impedía preguntar o comentar algo, pero se les pedía que trataran de trabajar de la manera más autónoma posible.

Se les dijo que calcularan la factorización para los valores que ellos quisieran darle a *n*, no había un orden para calcular las factorizaciones, y la sesión terminaba cuando ellos sintieran que ya habían calculado las factorizaciones necesarias para llegar a una generalización o en caso contrario: si ellos ya habían hecho varios cálculos y no podían concluir nada. Ya que la actividad dependía del trabajo individual de cada estudiante, no todas las actividades tuvieron el mismo tiempo de duración, pero varió entre 20 y 40 minutos.

Recolección de datos

Antes de comenzar las actividades se les pidió autorización para que al finalizar se les grabara en audio con un teléfono celular. En dichas grabaciones ellos debían explicar sus conclusiones respecto a la segunda actividad (la factorización de $x^n - 1$) y los procedimientos que se utilizaron para llegar a ellas.

También, se les dieron hojas a los participantes con el fin de que hicieran anotaciones y/o escribieran sus conclusiones en ellas.

Método de análisis

Este estudio es de tipo descriptivo, ya que su fin es identificar y describir los procesos de razonamiento de los estudiantes, cuando resuelven un problema apoyados con un CAS. Por ello, para analizar los datos fue necesario interpretar y describir las respuestas proporcionadas por los estudiantes, además de realizar un seguimiento de las acciones realizadas durante el transcurso de la actividad. Este tipo de metodología permite darnos cuenta, por ejemplo, de la forma en que los estudiantes utilizan la herramienta, los problemas que se presentan al utilizarlas y los significados que producen en ellos. Además las respuestas proporcionadas por los estudiantes fueron sometidas a un análisis cualitativo el cual permitió generar resultados, que se explicarán con detalle más adelante.

Presentación y análisis de resultados

Como el lector recordará la pregunta de investigación que se planteó en esta investigación es la siguiente:

> ¿Si los estudiantes utilizan *software* matemático como caja negra, es posible que ellos construyan factorizaciones generales?

Después de realizar un análisis cualitativo de los datos empíricos obtenidos a través de la aplicación del método, se ha encontrado evidencia de que los alumnos sí son capaces de construir factorizaciones algebraicas generales, sin embargo, también se han identificado algunas dificultades.

Enseguida se discute qué fue lo que lograron los estudiantes, así como las dificultades que presentaron.

Logros de los estudiantes

A continuación, se presentan evidencias de los logros que tuvieron los estudiantes al momento de construir factorizaciones generales utilizando el *software* GeoGebra.

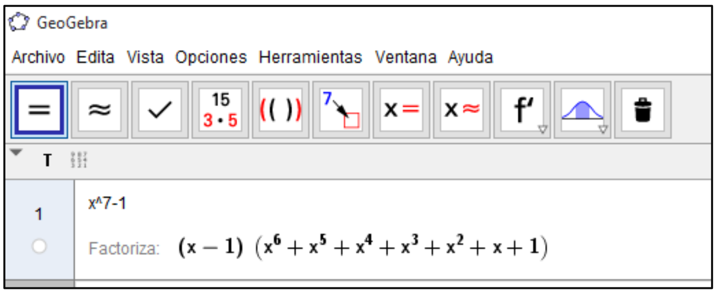
Antes de presentar los logros de los estudiantes es importante recordar que la actividad que se utilizó para responder a la pregunta de investigación fue la factorización de $x^n - 1$, la cual tiene la siguiente forma general:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1), n \in \mathbb{N}$$

Dependiendo del valor que tome *n*, la expresión $x^n - 1$ tiene otras factorizaciones las cuales frecuentemente son las que muestra el CAS cuando se factoriza esta expresión. Los casos de factorizaciones se presentan a continuación.

Cuando *n* es un número primo la factorización contiene exactamente dos factores (ver figura 3): $(x-1)$ y $(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

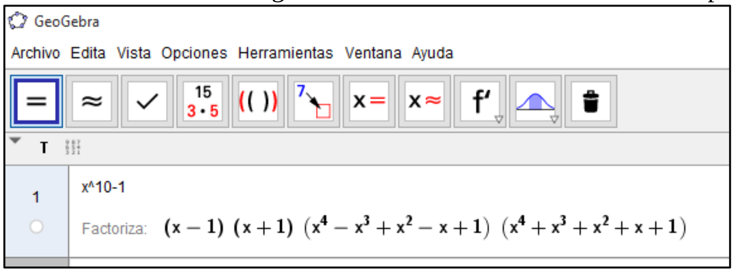
Figura 3: ejemplo de factorización en Geogebra de $x^n - 1$ cuando n es un número primo.



Fuente: software Geogebra (2016)

Cuando *n* es un número par, mayor que dos, se obtienen más de dos factores y $x + 1$ es siempre uno de ellos. Además ya que la identidad $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ puede ser aplicada a la expresión $x^n - 1$ cuando *n* es par, entonces el factor $(x-1)$ es siempre obtenido en este caso (ver figura 4).

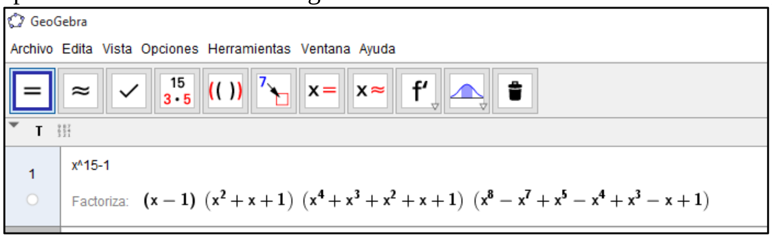
Figura 4: ejemplo de factorización en Geogebra de $x^n - 1$ cuando n es un número par mayor que dos.



Fuente: software Geogebra (2016)

Cuando n es un número impar mas no primo, la factorización de $x^n - 1$ contiene más de dos factores, uno de ellos es $(x - 1)$, pero no lo es $(x + 1)$ (ver figura 5).

Figura 5: ejemplo de factorización en Geogebra de $x^n - 1$ cuando n es un número impar no primo.



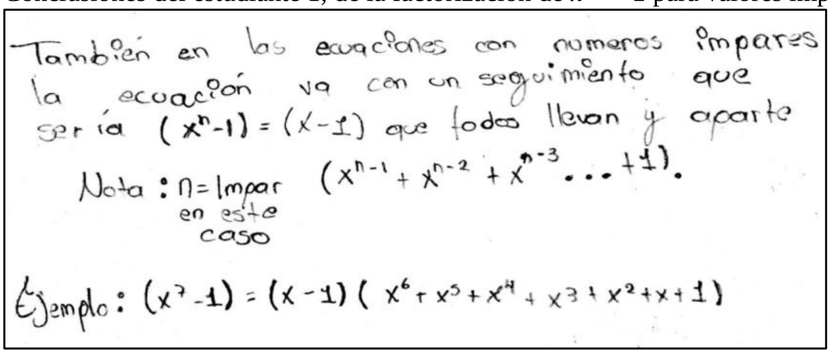
Fuente: software Geogebra (2016)

Factorización para *n* impar

Algunos estudiantes no llegaron a una construcción general para cualquier valor de *n*, sin embargo, sí pudieron hacer conjeturas en el caso en que toma valores impares.

Un ejemplo es el estudiante 1 que fue capaz de encontrar los patrones que seguía la factorización $x^n - 1$, cuando *n* es un número impar (ver figura 6).

Figura 6: Conclusiones del estudiante 1, de la factorización de $x^n - 1$ para valores impares de *n*.



Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

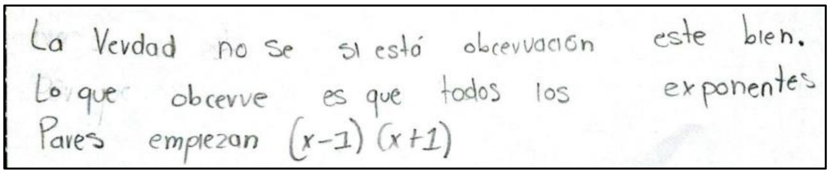
El estudiante 1 identificó los dos factores en los que se descompone la expresión $x^n - 1$ (para valores impares de *n*), y pudo escribirlos de forma general utilizando un lenguaje simbólico, es decir, expresó sus ecuaciones en función de *n*.

Factorización para *n* par

Algunos estudiantes fueron capaces de identificar dos o más factores, en la factorización de $x^n - 1$, cuando *n* es un número par.

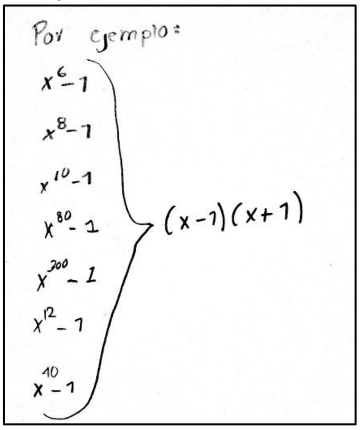
El estudiante 2 reconoció que dos factores que siempre resultaban de hacer la factorización de $x^n - 1$ cuando *n* es un número par, eran $(x - 1)$ y $(x + 1)$ (ver figura 7). Además, a partir de esta conclusión generó ejemplos para ilustrar su conjetura (ver figura 8).

Figura 7: Conclusiones del estudiante 2, para la factorización de $x^n - 1$ cuando *n* es un número par.


La Verdad no se si está obcervuación este bien.
Lo que obcerve es que todos los exponentes
Pares empiezan (x-1) (x+1)

Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

Figura 8: Ejemplos de1 estudiante 2, de la factorización de $x^n - 1$ cuando *n* es un número par.



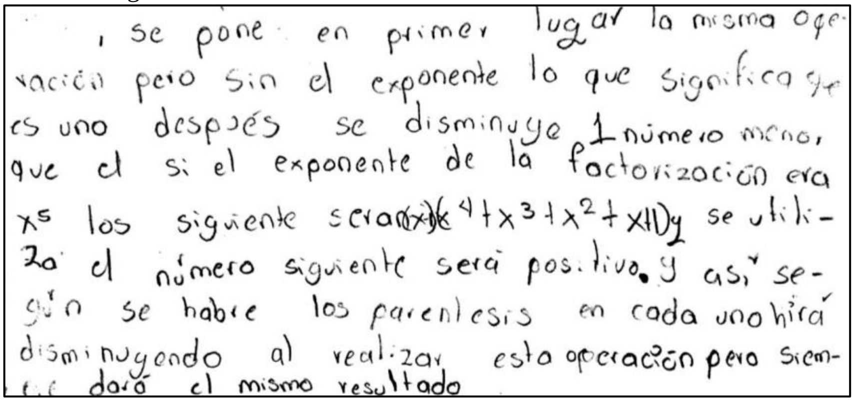
Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

Factorización para cualquier *n*

En las hojas donde los estudiantes redactaron sus conclusiones, así como en las grabaciones de audio, se encontró evidencia de que algunos de ellos pudieron describir cuál era la forma que tenía la factorización para cualquier valor de *n*. Es decir ellos pudieron identificar que el primer factor era siempre $(x - 1)$, y fueron capaces de describir cómo se comportaban los exponentes del segundo factor $(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

A continuación se muestra, en la figura 9, una redacción por parte de la estudiante 3 en donde se evidencia que es capaz de identificar la forma general de la factorización de $x^n - 1$.

Figura 9: Conclusiones del estudiante 3 al factorizar $x^n - 1$.


, se pone en primer lugar la misma ope-
ración pero sin el exponente lo que significa que
es uno después se disminuye 1 número menor,
que el si el exponente de la factorización era
x^5 los siguiente sera $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ y se utili-
za el número siguiente será positivo. y así se-
gún se habre los parentesis en cada uno hira
disminuyendo al realizar esta operación pero siem-
pre dará el mismo resultado

Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

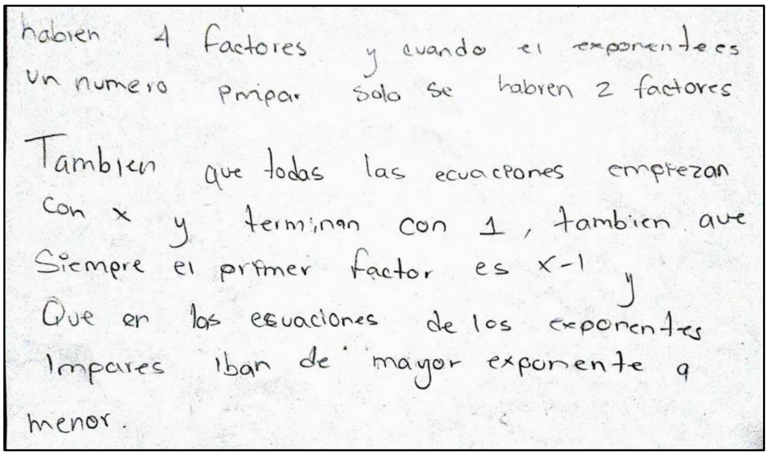
Cuando el estudiante 3 habla de "operación", se interpreta que se está refiriendo a un factor; cuando él menciona "se disminuye 1 número menor que el" nuestra interpretación es que, en el segundo factor, el exponente de la variable *x* disminuye de uno en uno, respecto al exponente de la variable *x* en la expresión factorizar, y cuando dice "el número siguiente será positivo" se interpreta que el estudiante quiso decir que, en el segundo factor, los términos se están sumando. Esto sugiere que el estudiante 3 se dio cuenta que el primer factor es $(x - 1)$ el cual es de grado uno, y que en el segundo factor $(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ el primer término *x* tiene un grado menor que la expresión a factorizar $x^n - 1$ y posteriormente el exponente de los términos disminuye de uno en uno.

Patrones en los exponentes.

Algunos estudiantes pudieron identificar los patrones que seguían los exponentes del término *x* en el resultado de factorizar $x^n - 1$.

Como el caso del estudiante 5 que fue capaz de encontrar y describir los patrones que seguían los exponentes de la variable *x* al realizar la factorización, es decir él conjeturó que en algunos factores los exponentes de *x* van disminuyendo de uno en uno (ver figura 10).

Figura 10: Conclusiones del estudiante 5, para la factorización de $x^n - 1$ para valores impares de “n”.


habien 4 factores y cuando el exponente es
un numero impar solo se habien 2 factores

Tambien que todas las ecuaciones empiezan
con x y terminan con 1, tambien que
Siempre el primer factor es x-1 y
Que en los esuaciones de los exponentes
Impares iban de mayor exponente a
menor.

Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

Otros logros

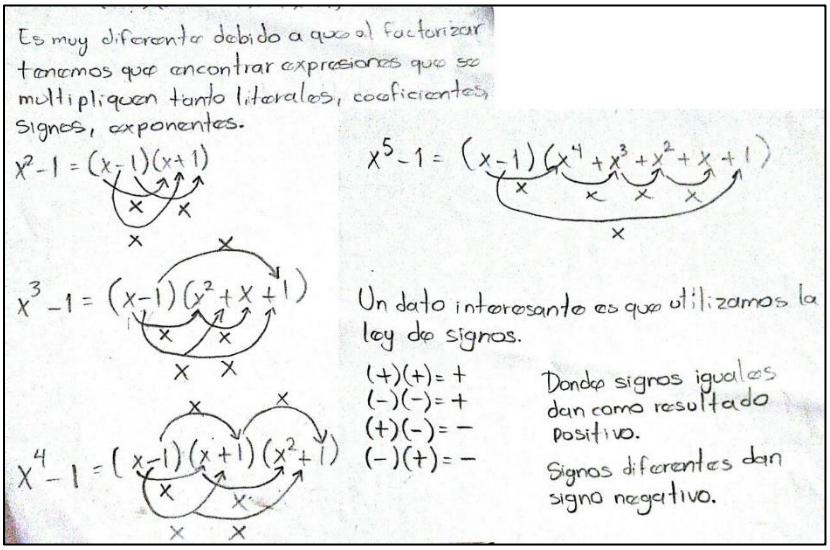
A pesar de que el enfoque de la investigación era determinar si los estudiantes podrían construir factorizaciones generales, se encontró evidencia de otro tipo de logros que tuvieron algunos estudiantes cuando factorizaron $x^n - 1$.

Debido a la variedad de cálculos que realizó con el *software* GeoGebra, el estudiante 5 fue capaz de ver la relación entre los factores y la expresión factorizar, en sus grabaciones de audio mencionó lo siguiente:

> *Estudiante 5: lo que le entendí al factorizar es que tenemos que multiplicar literales, coeficientes, signos, exponentes para poder encontrar la expresión, o sea por ejemplo x elevado a la dos menos uno, cuando factorizamos éste tenemos que poner paréntesis por ejemplo para esa expresión multiplicamos sería la expre, este sería entre paréntesis x menos uno por x más uno, porque x por x da x al cuadrado y menos uno por más uno da menos uno.*

Las evidencias muestran que para el estudiante 5 factorizar es encontrar expresiones que cuando se multiplican darán el resultado de la expresión que se factorizó, lo cual es una concepción adecuada. Las conclusiones del estudiante se basaron en los análisis de los resultados obtenidos con GeoGebra (figura 11).

Figura 11: Conclusiones del estudiante 5 acerca de los términos de la factorización de $x^n - 1$.



Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

Dificultades de los estudiantes

A continuación se presentan las dificultades que tuvieron los estudiantes cuando factorizaron la expresión $x^n - 1$ la cual tiene como resultado:

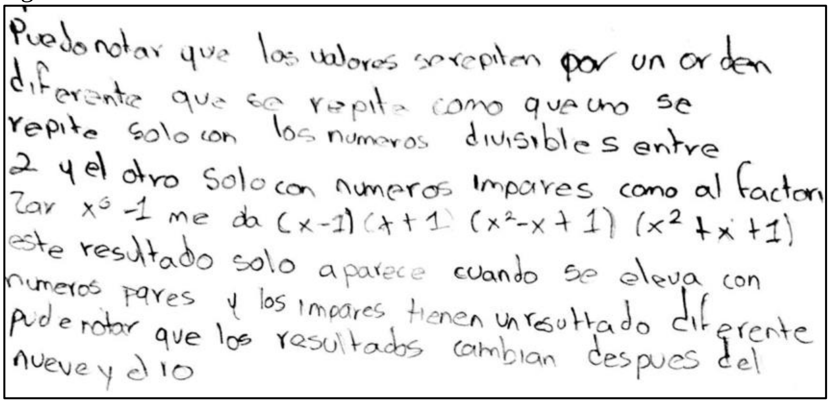
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1), n \in \mathbb{N}$$

Factorización para *n* no primo

El comando "factoriza" de GeoGebra solo da la descomposición en dos factores cuando *n* es un número primo, mientras que para los demás valores da una forma más desarrollada, es decir los descompone en varios factores. Debido a esto algunos estudiantes conjeturaron que había dos factorizaciones generales distintas y esto causó confusión para muchos.

El estudiante 6 presentó dificultad para construir la factorización $x^n - 1$ ya que obtenía resultados muy distintos cuando *n* era un número par y cuando era un número impar (ver figura 12). Cuando el estudiante menciona que "los resultados cambian después del nueve y el diez" puede ser debido a que del uno al diez todos los números impares también son primos y por eso él observó que para impares siempre habrían dos factores, pero al probar el número nueve, debido a que es impar más no primo, obtuvo una descomposición de tres factores, por lo tanto estudiante entró en conflicto ya que la conjetura que había hecho para números impares no se cumplía para el nueve.

Figura 12: Conclusiones del estudiante 6 acerca de la factorización de $x^n - 1$.



Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

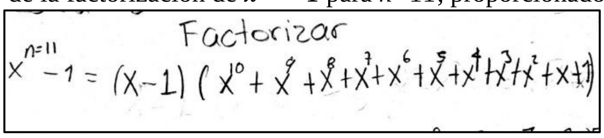
Representación simbólica

Una dificultad que se presentó en la mayoría de los estudiantes es la de representar simbólicamente sus hallazgos, es decir los estudiantes tenían una idea de la forma general de la factorización de $x^n - 1$, sin embargo, ellos no podían representar sus conclusiones de manera simbólica o formal, al contrario ellos recurrían a ejemplos particulares para poder explicar sus conclusiones. Este tipo de dificultades por parte de los estudiantes para trabajar con representaciones simbólicas, ha sido reportado con anterioridad (PANASUK y BEYRANEVAND, 2011).

En su grabación de audio el estudiante 7 utilizó un ejemplo, que después escribió en una hoja, para explicar el comportamiento del exponente de la variable *x* al realizar la factorización.

> *Estudiante 7: Si le pongo factorizar este ya varía, porque ya va en disminución… aaa por decir que, también lo que descubrí que un este por decir si pongo 11, por decir si pongo $x^{11} - 1$, el valor de x, el valor siempre va a ir disminuyen (ver figura 13).*

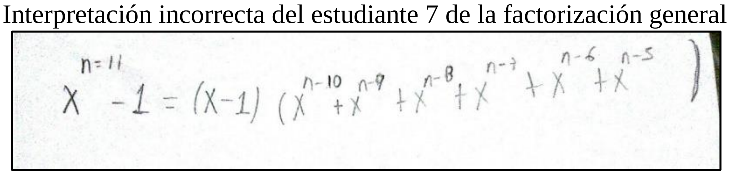
Figura 11: Ejemplo de la factorización de $x^n - 1$ para *n=11*, proporcionado por el estudiante 7.



Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

Cuando se le pidió al estudiante 7 explicar las conclusiones a las que había llegado, pero ahora en función de *n*, él proporcionó una respuesta incorrecta (figura 14).

Figura 14: Interpretación incorrecta del estudiante 7 de la factorización general de $x^n - 1$.



Fuente: hojas de trabajo de los estudiantes (2015)

En la siguiente sección del artículo se discuten los resultados que hemos presentado y se mencionan algunas de sus implicaciones.

Conclusiones

Implicaciones para la enseñanza

Los resultados obtenidos en esta investigación muestran que el uso de herramientas tecnológicas como caja negra, particularmente GeoGebra, puede ser útil para el aprendizaje de factorizaciones algebraicas generales. Si se utilizan adecuadamente, pueden enriquecer el conocimiento de los estudiantes sobre este aspecto del álgebra.

Debido a la amplia variedad de cálculos que les permitió realizar el *software* GeoGebra, los estudiantes que participaron en el estudio fueron capaces de identificar patrones en las expresiones algebraicas que el *software* arrojaba, para así construir a una factorización general. Las expresiones algebraicas que ellos factorizaron tenían exponentes que iban desde el 1 hasta el 200, por lo tanto calcular ese tipo de factorizaciones sin ayuda de un CAS, hubiese resultado tedioso para los estudiantes. Esto sugiere que el uso del *software* matemático puede ayudar a los alumnos a tratar con problemas algebraicos más complejos que los que comúnmente se desarrollan en las clases de álgebra. Por otro lado, el tiempo que los estudiantes se ahorraron en hacer cálculos a mano les permitió comprobar sus resultados, esto es algo que puede servir para retroalimentar su actividad matemática cuando están resolviendo problemas algebraicos.

Que los estudiantes construyan una fórmula para calcular un tipo de factorización, puede ser más productivo para el aprendizaje de este concepto, ya que no es una regla que se les dio para que ellos la memorizaran, al contrario, es algo que ellos mismos fueron capaces de deducir a través de un proceso de experimentación con el *software*, de identificación de patrones y de formulación de conjeturas. Argumentamos que este tipo de habilidad manifestada por los estudiantes indica cierto nivel de desarrollo de un entendimiento instrumental de las factorizaciones algebraicas.

Relaciones entre método, resultados y literatura

Existen relaciones entre el método utilizado en esta investigación, los resultados obtenidos, y la literatura especializada. En el caso del método utilizado, el enfoque de esta investigación se relaciona con lo propuesto por Buchberger (1989). Él menciona en su trabajo que podría ser útil experimentar si los estudiantes pueden aprender conceptos de matemáticas, utilizando software simbólico, antes de que ellos dominen dichos conceptos, el autor plantea que si los estudiantes ven las soluciones de los problemas típicos, que son proporcionadas por el CAS, esto puede facilitar drásticamente su entendimiento. El enfoque de este trabajo es una experimentación basada la propuesta del autor, ya que nuestros estudiantes construyeron factorizaciones algebraicas generales con solo ver los resultados particulares que arrojaba el CAS, pero sin conocer cómo éstos eran producidos.

En el caso de las actividades presentadas a los estudiantes que participaron en este estudio, el diseño de ellas se basó en el reconocimiento y reproducción de patrones, al igual que en las actividades desarrolladas en el trabajo de (CEDILLO Y KIERAN, 2003).

Sobre los resultados obtenidos en esta investigación y su comparación con lo reportado en la literatura, sabemos que (Heid, 1988) encontró que los estudiantes pueden aprender conceptos matemáticos sin tener un dominio previo de las habilidades básicas; algo similar a lo que se encontró en esta investigación, en la cual los estudiantes construyeron una factorización general para una expresión algebraica, sin haberla visto antes; más aún, los estudiantes seleccionados no dominan al cien por ciento las técnicas de factorización, algunos ni siquiera las conocían.

Por otro lado, los estudiantes participantes en el estudio de Cedillo y Kieran (2003) aprendieron el significado de una expresión algebraica mientras ellos la describían y producían, es decir ellos no habían entrado en contacto con el álgebra antes de su investigación. Algunos de nuestros estudiantes participantes no sabían lo que significaba una factorización algebraica, antes de realizar el estudio, sin embargo los resultados muestran que ellos estaban aprendiendo el significado de factorización algebraica.

Limitaciones del estudio

Algunas limitaciones de nuestro estudio que deben ser consideradas son las siguientes:

La aplicación del método no se hizo en una clase usual de matemáticas, sino que se llevó a cabo en un ambiente controlado con un grupo pequeño de estudiantes. Es probable que la aplicación del método en una clase tradicional puede producir resultados diferentes, aunque sería necesario realizar más investigación al respecto.

Por otro lado, el método se desarrolló en una sola sesión y solo se aplicaron dos actividades. Se reconoce que el aplicar el método en varias sesiones, puede dar oportunidad para incluir más actividades y quizá así mejorar los logros de los estudiantes.
La mayoría de los estudiantes que participaron en el estudio poseían dominio de la computadora, por lo tanto fue sencillo para ellos utilizar el *software* GeoGebra, sin embargo en casos en los que lo participantes no estén familiarizados con el uso de éste, se sugiere realizar una sola sesión dedicada al manejo de los comandos del *software* y las funciones principales de la computadora que permiten insertar expresiones algebraicas.

Rutas de investigación futuras

El uso de herramientas tecnológicas como caja negra para el aprendizaje de las matemáticas es un tema que aún tiene mucho por explorar. Primero que nada, sería beneficioso que se realizara un estudio como este, pero dentro del aula, para determinar las similitudes o diferencias con los resultados que se reportaron en este trabajo, que como ya se ha mencionado, se llevó a cabo en un ambiente controlado.
Este artículo se enfocó en un aspecto del aprendizaje del álgebra, sin embargo, sería útil experimentar con otras áreas con las que no se ha experimentado como la estadística, por ejemplo, y también en contextos de representación distintos al algebraico o simbólico.
Este trabajo de investigación solo evaluó algunos aspectos del aprendizaje del álgebra como las capacidades algorítmicas y de generalización de los estudiantes. Otro ángulo que encontramos interesante de explorar es el aspecto emocional o afectivo de utilizar herramientas tecnológicas como caja negra; es decir, si después de darles a ellos acceso al uso de este tipo de tecnología para aprender matemáticas, desarrollan o no, experiencias afectivas positivas por las herramientas y por las matemáticas mismas.
Otra posible ruta de investigación, es experimentar el impacto que tiene el uso de tecnología como caja negra en los profesores de matemáticas, por ejemplo, analizar las dificultades que ellos pueden presentar al tratar de implementar este tipo de herramientas en el aula o incluso explorar sus percepciones sobre este tipo de recurso para la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

BUCHBERGER, B. Should students learn integration rules? *SIGSAM Bulletin*, v. 24, n. 1, p. 10-17, 1990.

CEDILLO, T.; KIERAN, C. Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators. In: FEY, J.T. (Ed.), *Computer Algebra Systems in School Mathematics* (pp. 219-240). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

DOERR, H.M.; ZANGOR, R. Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, v. 41, n. 2, p. 143-163, 2000.

DRIJVERS, P. White-box/black-box revisited. *The International Derive Journal*, v. 2, n. 1, p. 3-14, 1995.

HEID, M.K. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 19, n. 1, p. 3-25, 1988.

LAGRANGE, J.B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching precalculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 4, n. 1, p. 51-81, 1999.

LAGRANGE, J.B. Using symbolic calculators to study mathematics. In: GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 113-136). New York: Springer, 2005.

MOUNIER G.; ALDON G. A problem story: factorizations of x^n-1. *International DERIVE Journal*, v. 3, n. 3, p. 51-61, 1996.

PANASUK, R.M.; BEYRANEVAND, M.L. Preferred representations of middle school algebra students when solving problems. *The Mathematics Educator*, v. 13, n. 1, p. 32-52, 2011.

PIMM, D. *Symbols and Meanings in School Mathematics.* London: Routledge, 1995.

SKEMP, R.R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 12, n. 2, p. 88-95, 2006.

STAR, J. Instrumental and relational understanding in mathematics education. In: LERMAN, S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 304-307). Netherlands: Springer, 2014.

TROUCHE, L. *Expérimenter et prouver. Faire des Mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques. 38 variations sur un thème imposé.* Montpellier: IREM, Université Montpellier II, 1998.

WILLIAMS, J.; WAKE, G. Black boxes in workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64, n. 3, p. 317-343, 2007.