Artigo

A QUESTÃO DA ESCALA E AS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES AO ANALISAREM GRÁFICOS DE FUNÇÕES f: R→R OBTIDOS EM CALCULADORAS.

Ana Maria Carneiro Abrahão *

Gilda de La Rocque Palis **

RESUMO: As concepções do professor ao interpretar gráficos de funções reais produzidos em computadores e sua preparação para lidar com os erros e falsas concepções apresentados por alunos motivou uma pesquisa junto a professores de matemática regentes no nível médio. Esse artigo apresenta e põe em discussão resultados dessa pesquisa. A análise das concepções dos professores ao se depararem com gráficos não usuais, obtidos em calculadoras e computadores, diferentes do chamado "o gráfico" da função, mostra, dentre outras, suas dificuldades com escalas. O fato da calculadora nos permitir manipular as escalas gráficas com muita facilidade pode nos ajudar a ver com detalhe comportamentos específicos da função, todavia, há necessidade de se fazer associações entre as representações gráficas e o conhecimento teórico da função. As dificuldades de interpretação gráfica apresentadas pelos professores nos levam a pensar que o entendimento de escala não é imediato e precisa ser mais explorado.

PALAVRAS-CHAVE: funções reais, gráficos, calculadoras, concepções errôneas, escala.

1-Introdução

A utilização de tecnologia (computadores e calculadoras) no ensino de matemática tem sido motivo de palestras e muita discussão nos encontros matemáticos. Evidenciam-se as potencialidades da tecnologia gráfica, como, por exemplo, a diminuição do volume de cálculos necessários para se construir tabelas de pares ordenados e a facilidade em se traçar gráficos cartesianos de famílias de funções. Hector (1992), Demana e Waits (1990) e Minton (1995) argumentam que a tecnologia libera tempo da sala de aula e impõe necessidade de mudanças no currículo de matemática do ensino médio e fundamental. Dependendo da metodologia usada pelo professor, a análise de gráficos com a ajuda da tecnologia, pode gerar uma dinâmica de sala de aula que expõe o aluno a desafios constantes, encoraja a investigação e pode aumentar sua participação na construção da aprendizagem de funções, já que ele, segundo Dugdale e outros (1995), explora problemas, estabelece conexões, discute resultados, apresenta conjecturas baseadas nas observações feitas, testa e verifica hipóteses, comunica idéias e escreve conclusões.

Revistas especializadas em ensino de matemática no nível médio mostram muitos resultados positivos do uso da tecnologia gráfica no ensino-aprendizagem de funções e, ao mesmo tempo, pesquisas recentes apontam algumas dificuldades que os alunos têm encontrado. Trabalhos de alguns autores indicam preocupação com as concepções do professor ao interpretar gráficos de funções (WILSON e KRAPFL, 1994) e com sua preparação para lidar com os erros e falsas concepções apresentados por alunos que trabalham com novas tecnologias (WILLIAMS, 1993). Esse artigo tem por objetivo apresentar depoimentos de quatro professores regentes na 1ª. série do ensino médio (de ensino público e particular) e discutir como

* ISERJ – UVA – SMERJ – UERJ. E-mail: anaabrahao@terra.com.br.

** Departamento de Matemática – PUC-Rio. E-mail: gilda@mat.puc-rio.br

esses professores interpretam alguns gráficos não usuais de funções f:R®R produzidos em computadores e calculadoras gráficas.

A análise das concepções dos professores ao se depararem com esses gráficos mostra que sua compreensão não é imediata. Nem sempre os professores conseguem conciliar seu conhecimento teórico com a visualização gráfica. Suas dificuldades se concentram na escala gráfica, na questão da resolução das telas gráficas e no processo que a máquina usa para traçar gráficos de funções. Neste artigo destacaremos as dificuldades encontradas por alguns professores por nós entrevistados no que se refere às escalas gráficas. Sobre outros aspectos ver Abrahão (1998) e Palis (1997).

2- As dificuldades quanto à escala gráfica

Após conhecerem algumas potencialidades da calculadora gráfica no ensino de funções reais, os entrevistados, em entrevistas individuais, analisaram atividades montadas a partir de idéias e exemplos tirados da bibliografia especializada e com as quais alunos tinham encontrado dificuldades de interpretação e problemas com a questão de escala.

Dentre as dificuldades abordadas que os alunos encontram ao lidar com gráficos produzidos em máquina, estão principalmente aqueles que se apresentam de forma "não usual"[1] ou diferentes do chamado "o gráfico" da função.

O fato de a calculadora gráfica nos permitir manipular as escalas gráficas com muita facilidade faz com que vejamos o gráfico de uma função em diferentes janelas. Não estando acostumados com essa forma de apresentação variada, é natural que não só o aluno, mas também o professor encontre dificuldades. Os resultados apresentados a seguir mostram que a utilização de diferentes escalas na representação gráfica de algumas funções pode desequilibrar o professor, levando-o a rever e reavaliar seus conhecimentos.

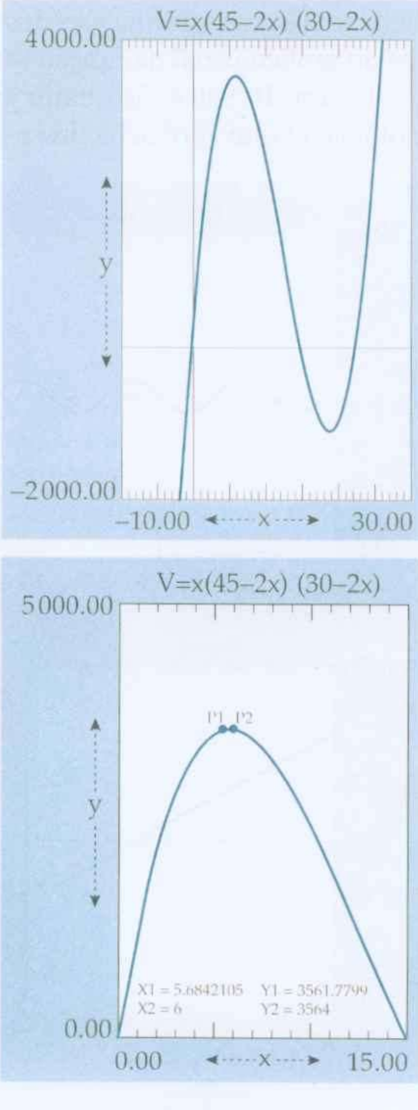
2.1 Atividade I:

"Uma caixa aberta é feita de uma folha de metal retangular de 30 cm por 45 cm, removendo quadrados iguais de cada canto desse retângulo e dobrando seus lados para cima. Qual é a medida aproximada do lado dos quadrados removidos para que a caixa assim formada tenha volume máximo?"

Nesse problema de modelagem apresentado aos professores a escolha da escala (janela gráfica) era fundamental para a análise da questão mediante a sua representação gráfica. Acontece que alguns professores não perceberam que, além de montar a equação algébrica $V(x)=x(45-2x)(30-2x)$, era necessário delimitar os intervalos da janela gráfica que interessava ao problema (ver Fig. I) e interpretar as informações que esse trecho do gráfico fornecia. Um dos professores, ao visualizar uma janela na qual o gráfico da função cúbica tinha aspecto parabólico, entendeu esse gráfico local como sendo o "gráfico completo"[2] da função cúbica e, mais ainda, quis aplicar resultados algébricos relativos à função quadrática. Mesmo após alertado para o fato de que a função era polinomial do terceiro grau ele insistiu em querer aplicar as fórmulas algébricas $Yv = -\Delta/4a$ e $Xv = -b/2a$ para identificar as coordenadas do vértice da "parábola". Segundo Hector (1992) esse é um problema que os alunos também encontram.

Fig. I

$V(x) = x(45-2x)(30-2x)$



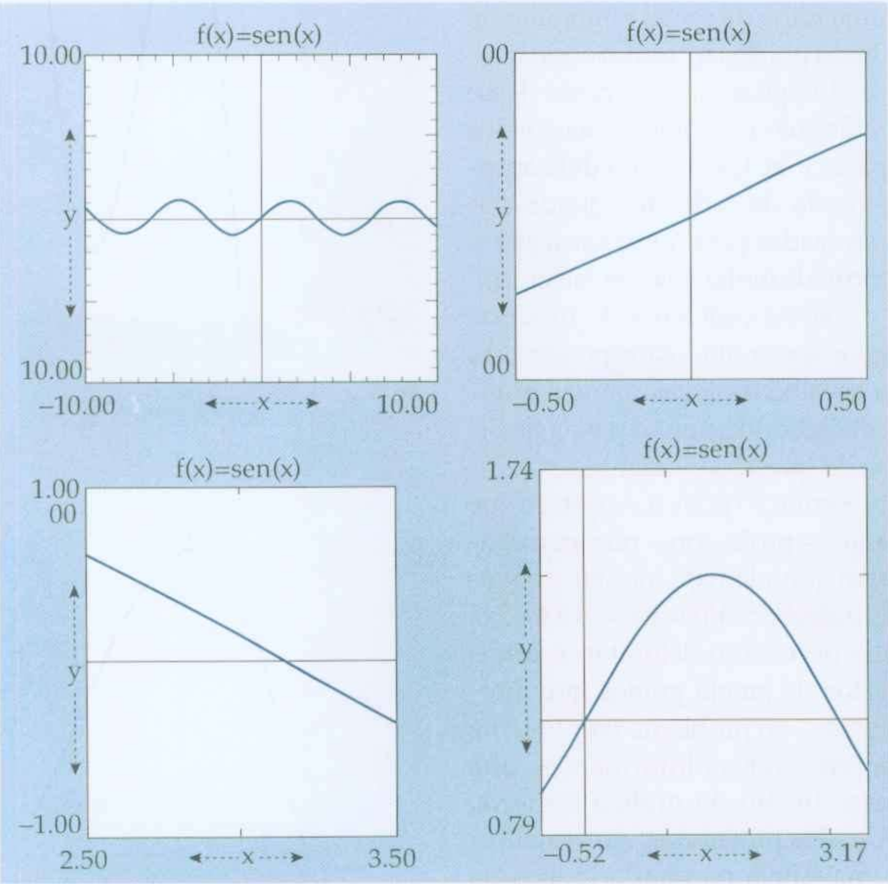
2.2 Atividade II:

Ao visualizar o gráficos de $f(x) = sen(x)$ em quatro diferentes janelas (Fig. II) e portanto em diferentes escalas, um dos professores achou que três gráficos es-

[1] Chamaremos de "gráfico completo" o gráfico que mostra várias propriedades da função: zeros, intervalos onde a função cresce e decresce, assintotas, mudan ças de concavidade, etc.
[2] Essa razão é a mesma se considerarmos a relação entre o número de pixels (quadrados) na vertical pelo número de pixels na horizontal (v/h = 2/3).

tavam"malucos" porque não se apresentavam como a tradicional curva senóide. Outro professor ficou chocado ao ver uma representação com aparência de uma reta ser apontada como gráfico da função seno. A reação desses professores vem ao encontro das colocações de Dugdale e outros (1995): *"para alguns é difícil aceitar um gráfico onde somente algumas características da função estão presentes como um gráfico da função"*. Também lhes foi difícil posicionar cada gráfico parcial que exibia um comportamento local, sobre o gráfico que representava o comportamento global da função. Um dos professores ficou muito confuso e não conseguiu ver a relação entre as representações parciais e o gráfico usual. Não conseguiu fazer a leitura da janela gráfica e nem analisar as informações dos gráficos apresentados para conectá-los ao gráfico usual da função seno.

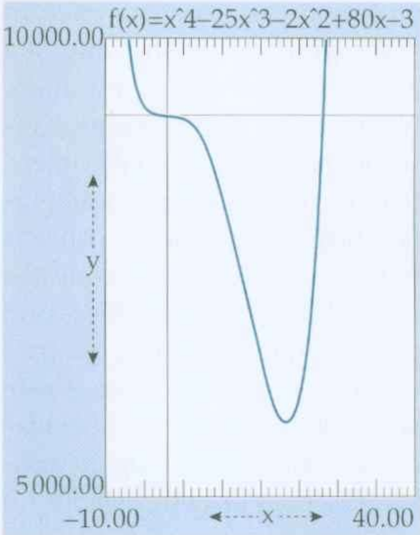
Figuras II "Estes são quatro gráficos de f(x)=senx gerados via tecnologia. O que você acha dessas figuras?"



2.3 Atividade III:

Ao analisarmos o gráfico de função polinomial de 4° grau não é incomum encontrarmos situações do tipo apresentado na Fig. III, onde às vezes é impossível encontrarmos uma única janela que mostre o comportamento global da função. Ao analisarem o gráfico de f na janela [-10,40]x[-50000,10000] nenhum dos quatro professores entrevistados percebeu o fato da unidade usada na escala do eixo Oy ser muito menor do que a unidade do eixo Ox. Somente após serem conduzidos para uma análise algébrica da função é que alguns dos entrevistados observaram que as unidades nos eixos eram diferentes.

Fig. III – Esse é um gráfico de f(x)=x^4-25x^3-2x^2+80x-3 obtido na calculadora gráfica. O que você interpreta dele?



Para um dos professores a região perto da origem onde o gráfico *"parecia tangenciar o eixo OX"* seria toda de *"pontos de zero da função"*. Ao pensar num intervalo contínuo de zeros em torno da origem, o professor esqueceu que uma função do 4° grau pode ter no máximo quatro raízes reais.

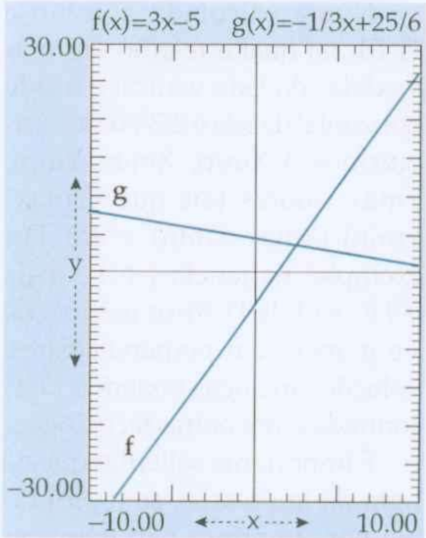
Como os alunos que freqüentemente não usam resultados algébricos para verificar resoluções gráficas e vice-versa (WILLIAMS, 1993), a análise deste exercício mostrou que, às vezes, o professor também não usa seus conhecimentos numéricos e algébricos para desconfiar, confirmar ou verificar o resultado da máquina. O professor nem sempre percebe que o estudo gráfico de uma função não pode ser dissociado do estudo algébrico da mesma.

Ao se utilizar tecnologia gráfica para entender o comportamento de uma função, um só gráfico não costuma ser suficiente. É necessário olhar certas regiões em diversas escalas, explorar diferentes janelas e usar os conhecimentos teóricos para escolher as regiões que precisam ser ampliadas ou reduzidas.

• 2.4 Atividade IV:

Ao associar os gráficos de $f(x) = 3x\text{-}5$ e $g(x) = -1/3x + 25/6$ apresentados na Fig. IV com retas perpendiculares (uma associação freqüente), somente dois dos professores entrevistados perceberam, após uma análise cuidadosa, que o não perpendicularismo geométrico era um problema de escala. Mesmo sendo alertados em exercícios anteriores sobre a importância da escala na interpretação gráfica, eles não usaram essa informação nesse exercício.

Fig. IV



Em Física, Química, Biologia, história e outras disciplinas, os alunos colhem daods, formam tabelas de pares ordenados e traçam gráficos cartesianos nos quais a escala de cada eixo é decidida a partir dos dados fornecidos pelos experimentos. Em Matemática, por outro lado, problemas envolvendo funções são tradicionalmente apresentados graficamente em eixos cartesianos com a mesma unidade nos eixos Ox e Oy. Dessa forma, generaliza-se, por exemplo, que o gráfico de f(x) = x é sempre a reta bissetriz do 1° quadrante. Entretanto, quando as escalas nos eixos x e y são diferentes, o ângulo que f(x) = x faz com Ox é diferente de 45°.

Observe, nos dois exemplos abaixo (Figuras IV-B e IV-C), que, dependendo das unidades de comprimento sobre os eixos Ox e Oy, podemos obter ângulos bem diferentes entre a reta $y = x$ e o eixo horizontal. Somente quando escalas idênticas são usadas em ambos os eixos, a reta $y = x$ faz ângulo de 45° com o eixo Ox.

Fig. IV-B

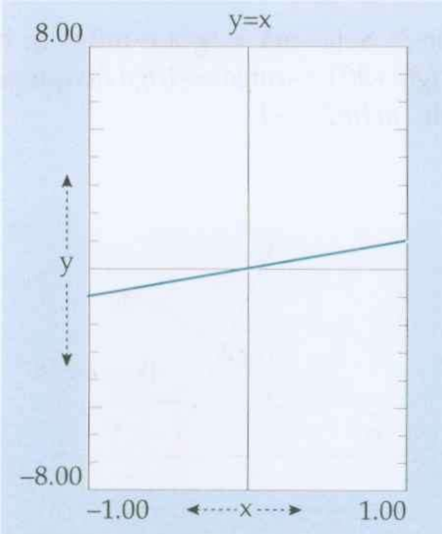
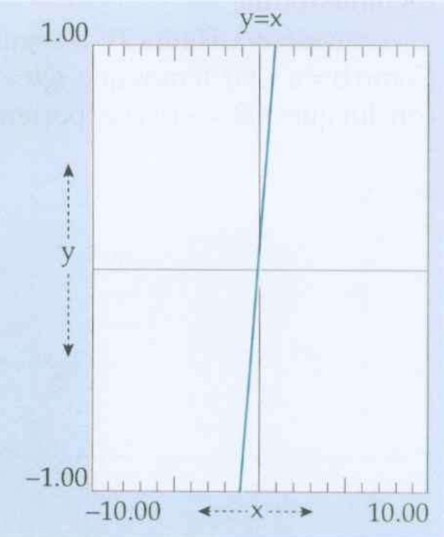


Fig. IV-C



Por outro lado, retas com coeficientes angulares diferentes podem formar o mesmo ângulo com o eixo Ox (Ver Figuras IV-D e IV-E).

Fig. IV-D

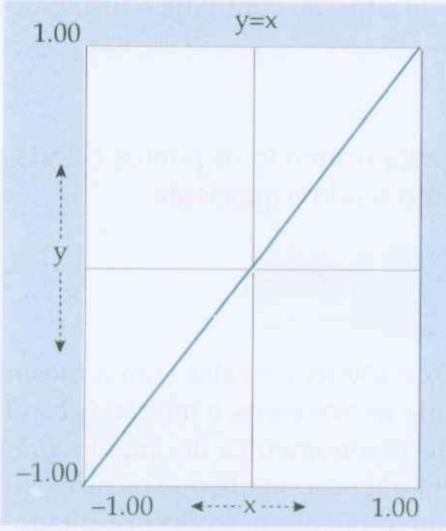
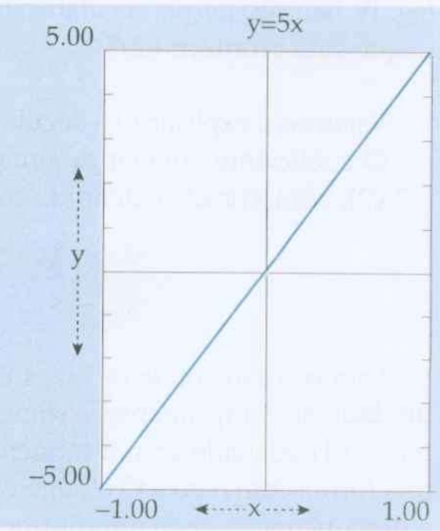


Fig. IV-E



Assim também duas retas cujo produto dos coeficientes angulares é (-1) formam ângulos de 90° apenas quando as escalas de Ox e Oy forem iguais (HECTOR, 1992). Vejamos isso com mais detalhe.

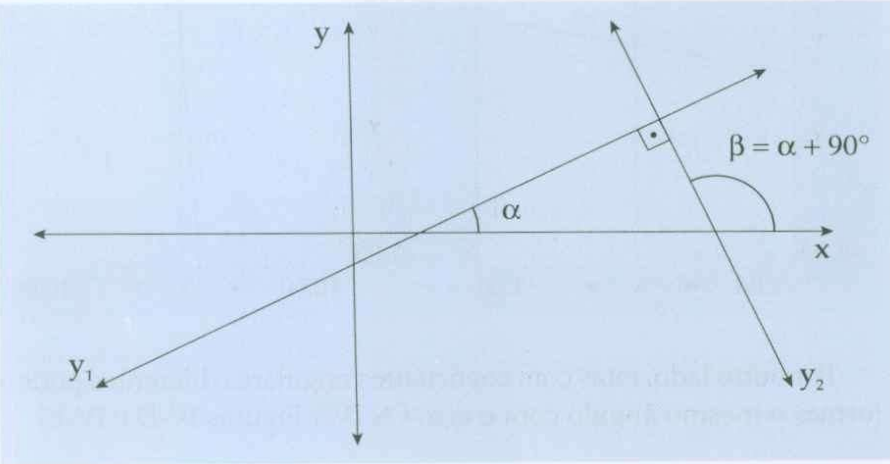
Geometricamente, duas retas são ditas perpendiculares quando se encontram formando ângulos adjacentes congruentes. Nesse sentido, as retas *f* e *g* da Fig. IV não são perpendiculares, pois não se cortam formando ângulos adjacentes de mesma medida.

Observando as equações dessas retas, lembramos de um resultado da Geometria Analítica que diz que o gráfico de $y1 = m1\, x + b1$ é perpendicular ao gráfico de $y2 = m2\, x + b2$ se e somente se o produto de seus coeficientes angulares for -1.

Usualmente, para fazer essa demonstração considera-se que o coeficiente angular "m" de uma reta $y = mx + b$ é a tangente trigonométrica do ângulo que essa reta forma com o eixo Ox e procede-se da seguinte forma:

Considere a Figura IV a seguir-A. Seja m1 = tg a e m2 = tg b. Como b = a + 90° temos que $tgb = tg(a+90^\circ) = -cotga = -1/tga$ do que se conclui que $m2 = -1/m1$ e, portanto, $m1m2 = -1$

Fig. V-A



No exemplo em questão temos que 3(-1/3) = -1 mas as retas na Fig. IV não são perpendiculares. Esta situação contradiz o resultado? O que está acontecendo?

Vejamos a explicação a seguir.

O coeficiente angular de uma reta contendo os pontos (x1,y1) e (x2,y2), com x1# x2 é definido como sendo o quociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_1 \neq x_2$$

Para os casos onde os eixos Ox e Oy têm escalas com a mesma unidade de comprimento, e somente nesses casos, a relação (y2 - y1) /(x2 - x1) coincide com a tangente trigonométrica do ângulo que a reta forma com o eixo Ox. Logo é também somente nesses casos que a demonstração dada anteriormente está correta e o seu resultado é verdadeiro.

No caso da Fig. II estamos utilizando escalas diferentes nos eixos Ox e Oy. Portanto, a relação 3(-1/3) = –1 não implica no perpendicularismo entre os gráficos de f(x)=3x-5 e g(x)= –(1/3)x + 25/6.

Poderíamos nos perguntar: Como conseguir uma janela onde $y1 = m1\, x + b1$ e $y2 = m2\, x + b2$ apareçam perpendiculares no caso de se ter m1m2 = -1?

Sabemos que as coordenadas dos vértices da janela retangular [Xmin , Xmax]x[Ymin , Ymax] determinam a escala em seus eixos. Mesmo quando (Ymax-Ymin)/(Xmax-Xmin) = 1, os gráficos de y1 e y2 podem não aparecer perpendiculares. Isso acontece porque a maioria das telas das calculadoras não é quadrada, o que torna diferentes as unidades de comprimento nos eixos.

Como obtermos então uma janela onde a unidade de medida no eixo Ox seja igual a unidade de medida no eixo Oy?

Numa calculadora como a TI-81, na qual a relação entre as medidas do lado vertical e o lado horizontal da tela é 2/3[3], basta atribuirmos a Xmin, Xmax, Ymin, Ymax valores tais que (Ymax-Ymin)/(Xmax-Xmin) = 2/3. Por exemplo, na janela [-6.4 , 6.4]x [-9.6 , 9.6] da TI-81 os gráficos de f e g aparecem perpendiculares. Soluções análogas podem ser encontradas com outras tecnologias.

É importante salientar que na hora da impressão, se o programa para imprimir não mantiver essa relação 2/3, as retas do gráfico em questão não aparecerão perpendiculares.

No ensino usual de gráficos matemáticos tendemos a utilizar a mesma unidade em ambos os eixos e, a partir daí, desenvolvemos o conteúdo programático da matemática escolar. O ensino da matemática, porém, pode ficar dissociado da Física e da realidade reportada em gráficos de revistas, jornais e livros didáticos de outras disciplinas, onde é raro encontrar gráficos nos quais são empregadas escalas idênticas nos eixos horizontal e vertical.

3- Observação dos professores sobre a utilização da calculadora gráfica para resolver as atividades propostas.

Os professores entrevistados foram unânimes em afirmar que a visualização do comportamento gráfico da função facilitada pela calculadora gráfica pode favorecer o aprendizado de funções no ensino médio. Afirmaram também que o tempo de sala de aula geralmente gasto em cálculos e construção manual de gráficos pode ser usado para explorar exercícios mais complexos e mais variados. Alegaram ainda que a utilização pessoal da calculadora gráfica poderia enriquecer e melhorar seus conhecimentos matemáticos. Didaticamente, sua utilização em sala de aula permitiria sair das representações estáticas tradicionais, comparar, fazer analogias e gerar um ambiente criativo e prazeroso de aprendizagem. Afirmaram que a entrevista os levou a refletir sobre seus conhecimentos, suas falhas conceituais e a pensar em hipóteses que jamais levantariam em situações usuais.

Um dos professores comentou que normalmente levamos o aluno a sempre ver o gráfico como um todo e os gráficos não usuais não são mostrados e nem colocados em discussão. Por isso, quando o professor trabalhar com o recurso da tecnologia, ele tem que se preparar para esclarecer o aluno e alertá-lo para possíveis situações problemáticas. Enquanto um professor afirmava que não se deveria apresentar gráficos de interpretação problemática ao aluno, outro argumentava que, ao lidar com a máquina, o aluno sempre irá se deparar com gráficos não usuais, motivo pelo qual, é melhor que ao encontrá-los ele esteja preparado para interpretá-los corretamente. Hillel (1995) afirma que o aluno precisa saber quando ele pode acreditar num resultado obtido na máquina e que tal senso só pode ser desenvolvido através da discussão e análise de alguns erros. Dion (1990), por usa vez, acredita que o professor precisa alertar os alunos para alguns desses problemas, ensiná-los a procurar e a lidar com essas situações. Para ela, é necessário avisá-los de que, apesar dessas situações parecerem truques, elas representam situações comuns, que são encontradas nas atividades matemáticas de um curso que usa regularmente tecnologia gráfica.

Um planejamento de curso que usa recursos tecnológicos deve incluir atividades não usuais que explorem e discutam dificuldades com escalas para que os alunos aprendam a analisar problemas gráficos. Para Hillel (1995), a combinação de experiências tecnológicas com outras atividades, não computacionais, se completam e formam um contexto apropriado para a construção dos conceitos matemáticos.

4- CONCLUSÕES

Ao interpretar alguns gráficos não usuais produzidos em computadores e calculadora gráficas, os professores entrevistados apresentaram, entre outras, dificuldades com escala. Pudemos observar que o entendimento de gráficos gerados via tecnologia não é óbvio. Nem sempre os professores conseguiam conciliar seus conhecimentos teóricos com a visualização gráfica.

Não foi imediato para os professores entrevistados, que nunca tinham utilizado tecnologia gráfica, perceber que [Xmin , Xmax] x [Ymin, Ymax] controlam as escalas nos dois eixos. Esses professores apresentaram muita dificuldade na leitura desses intervalos e no entendimento das diferentes janelas nas quais se desenhou o gráfico de uma mesma função.

A facilidade tecnológica em manipular janelas gráficas permite desenhar o gráfico de uma função usando diferentes escalas para ver com detalhe comportamentos específicos em determinados intervalos, o que pode auxiliar o estudo das propriedades da função. Todavia, para que isso aconteça há necessidade de se fazer associações entre as representações gráficas e o conhecimento teórico da função, uma representação ajudando a outra na construção do conhecimento.

Um dos professores entrevistados, ao ver a janela em que um gráfico da função polinomial do 3º grau"lembrava"uma parábola, interpretou esse gráfico parcial como sendo o gráfico global da função cúbica. Nesse momento seus conhecimentos teóricos não foram ativados para fazê-lo perceber que sua interpretação estava incorreta. Em vista disso, o professor absorveu a informação visual desconectando-a da informação algébrica e entendeu o que"viu" como sendo"o gráfico"da função. Nesse caso, o enfoque exagerado no ensino de funções quadráticas no curso secundário e a falta de familiaridade com a função do

3º grau podem tê-lo induzido a tentar aplicar conhecimentos relativos à função quadrática para encontrar o máximo local da função cúbica. Para que o professor não aceite um gráfico local como sendo o gráfico global da função, é necessário que ele faça um estudo matemático criterioso da expressão algébrica dessa função.

Assim também, ao analisar vários gráficos de uma mesma função, o professor precisa aprender a juntar as informações fornecidas por gráficos parciais para poder compor um gráfico que apresenta o comportamento global da função. Alguns entrevistados demonstraram dificuldade em realizar até mesmo o problema inverso, ou seja, analisar várias representações parciais da função f(x)=sen x da qual todos conheciam um gráfico completo.

Ainda sobre os efeitos da escala na forma do gráfico, as vezes não é possível encontrar em computadores, uma janela cujo gráfico mostre o comportamento global da função, incluindo seus zeros e extremos, por exemplo. Nas funções polinomiais de grau maior que 3 essa situação não é incomum. Nesses casos, para poder visualizar por meio da máquina o comportamento global da função, é necessário analisar o gráfico por partes, utilizando-se de diferentes janelas.

Dessa forma, para enxergar o mínimo local da função polinomial de 4º grau referente à Fig. III, deixou-se de visualizar os zeros em torno da origem. A grande diferença entre as unidades utilizadas nos eixos poderia servir de indicativo de que o gráfico estava "muito achatado". Nenhum dos entrevistados percebeu isso de imediato. Os professores poderiam ter utilizado seus conhecimentos teóricos e algébricos sobre funções polinomiais para confirmar ou verificar suas colocações.

Há outro ponto a discutir. A predominância, no ensino tradicional, do uso de unidades iguais nos dois eixos pode ter contribuído para as dificuldades encontradas pelos professores na atividade envolvendo o perpendicularismo entre retas. O fato de as unidades nos eixos cartesianos serem diferentes pode invalidar propriedades que são válidas quando se tem a mesma unidade nos dois eixos. Algumas características das representações gráficas de funções, como ângulos geométricos determinados por duas retas, podem mudar com a mudança de escalas.

Como pudemos observar, interpretar gráficos produzidos por tecnologias computacionais requer conhecimentos teóricos e práticos. As dificuldades de interpretação gráfica apresentadas pelos professores entrevistados nos levam a pensar que o entendimento do conceito de escala não é imediato e necessita ser ensinado. Parece ser importante que, num estágio inicial, sejam apresentadas atividades que produzam resultados usualmente aceitáveis para depois serem introduzidas situações desafiadoras. Como os próprios entrevistados colocaram, certas dificuldades ou"armadilhas" precisam ser consideradas para que se tire o maior proveito da tecnologia.

5- Referências Bibliográficas

ABRAHÃO, Ana M. C. O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções f: R!R obtidos com novas tecnologias. Rio de Janeiro: PUC, 1998. Dissertação (Mestrado)

DEMANA, Franklin; WAITS, Bert K. The role of thecnology in teaching mathematics. *The Mathematics Teacher*, p. 27-33, jan,. 1999.

DION, Gloria, The graphics calculator: a tool for critical thinking. *The Mathematics Teacher*, v. 83, p. 564-571, October, 1990.

DUGDALE, Sharon,et al. Tecnology and algebra curriculum reform: current issues, potential directions, and research questions". *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, n. 14, p. 325-357,. 1995.

HECTOR, Judith H. Graphical insight into elementary functions:. In FEY, J. T.; HIRSCH, C. R.*Calculators in mathematics education*, NCTM, Yearbook 1992.

HILLEL, Joel. Computer algebra systems as learning tools. *ZDM*, v.91, n. 5, p. 184-191, 1995.

MINTON, Randy. Caricature graphs and other lies. 6th ICTCM. *Proceedings*, p. 635-639, 1995.

PALIS, Gilda L. R. Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel! Portugal: *Educação e Matemática, n*.45,.1997.

WILLIAMS, Claire G. Looking over their shoulders: Some difficulties students have with graphing calculator.. *Mathematics and Computer Education*, v.. 27, n. 3,. p. 198-202, 1993.

WILSON, Melvin R.; KRAPFL, C. M.. The impact of graphing calculators on students' understanding of funtion". *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, v. 13, n. 3, p. 252-264, 1994.