EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i3p353-373

Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo

Integral before derivative? Derivative before integral? Limit, at the end? A proposal to organize a Calculus course

ANDRÉ LUIS TREVISAN [1]

MARCELE TAVARES MENDES [2]

Resumo

Neste artigo, descrevemos e justificamos uma proposta de estrutura curricular "não usual" para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) 1, por meio da organização dos conteúdos em formato de espiral, associado à metodologia de trabalho com episódios de resolução de tarefas. Caracteriza-se como uma investigação qualitativa de cunho interpretativo, envolvendo reflexões a respeito da própria prática dos autores. Apresentamos características da Educação Matemática Realística, abordagem de ensino que respalda nossa proposta, bem como aspectos relacionados ao ensino de CDI, com destaque para trabalhos que sustentam a estrutura curricular segundo a qual organizamos nossas aulas. Expomos, por fim, uma proposta de planificação do curso, elencando desafios subjacentes à sua implementação.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Estrutura curricular. Episódios de resolução de tarefas.*

Abstract

In this article, we describe and justify a proposal of an "unusual" curricular structure for the discipline of Differential and Integral Calculus (ICD) 1, by organizing the contents in a spiral format, associated to the methodology of work with task-resolution episodes. It is characterized as a qualitative research of an interpretive nature, involving reflections about the authors' own practice. We present characteristics of Realistic Mathematics Education, teaching approach that supports our proposal, as well as aspects related to the teaching of ICD, highlighting works that support the curricular structure according to which we organize our classes. Finally, we present a proposal for planning the course, identifying the challenges underlying its implementation.

Keywords: *Mathematics Teaching. Teaching Differential and Integral Calculus. Curricular structure. Task-resolution episodes.*

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/ câmpus Londrina. E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/ câmpus Londrina. E-mail: marceletavares@utfpr.edu.br.

Introdução

"Não faz sentido algum...".

Foi essa a expressão com a qual nos deparamos ao observar os comentários feitos por uma pessoa que já havia cursado Cálculo Diferencial e Integral (CDI[3]) frente à postagem de um de nossos alunos em uma rede social, na qual dizia ter feito a primeira prova da disciplina, envolvendo como conteúdo o tema integração. Essa expressão possivelmente sintetiza aquilo que muitos de nossos colegas professores pensaram (porém não tiveram a coragem de dizer) quando divulgamos nossa proposta curricular para o CDI 1 – explorar conceitos como integral e derivada antes de qualquer tratamento rigoroso do conceito de limite.

De fato, num primeiro impulso, poderia se dizer que não faz sentido algum. Afinal, como nos lembra Reis (2001, p.62),

> influenciados pelo modelo cauchyano, tradicionalmente, iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann).

Entretanto a história mostra-nos o desenvolvimento do CDI em uma ordem diferente: cálculo integral e diferencial, cálculo de limites, noção de número real. É razoável então pensar que, no ensino dessa disciplina, não deveríamos inverter completamente essa ordem... de fato, adotar uma sequência que busca manter alguma similaridade com o desenvolvimento histórico e filosófico dessa disciplina "faz todo sentido", como concluiu a comentarista das redes sociais enquanto nosso aluno explicava a organização curricular da disciplina que cursava conosco.

Nosso objetivo aqui é descrever e justificar essa *estrutura curricular "não usual"* para a disciplina de CDI 1, por meio da organização dos conteúdos em *formato de espiral*, associado à opção metodológica de trabalho com *episódios de resolução de tarefas*. É recorte de um projeto maior[4], que busca investigar os processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para o CDI e suas consequências para a aprendizagem.

[3] Neste texto, adotamos a expressão CDI para o Cálculo Diferencial e Integral enquanto área de conhecimento, abarcando as disciplinas de CDI 1, CDI 2, CDI 3 etc. Usualmente presentes na grade curricular de cursos superiores no Brasil.

[4] Pesquisa desenvolvida por meio do projeto "Investigação de um ambiente educacional para o CDI em condições reais de ensino", submetido e aprovado no Edital Universal 14/2014 do CNPq.

Caracteriza-se como uma investigação qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN, BIKLEN, 1994), envolvendo reflexões a respeito da própria prática (PONTE, 2002). De acordo com este último autor, a investigação sobre a prática pode ter dois objetivos principais: "alterar algum aspecto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança" ou "procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de acção" (PONTE, 2002, p. 3). A investigação da qual resulta este texto atende esses dois objetivos. Ele é organizado do seguinte modo: inicialmente apresentamos características da abordagem Educação Matemática Realística, que tem como precursor o matemático naturalizado holandês Hans Freudenthal, e que respalda nossa proposta. Discorremos a respeito de alguns aspectos relacionados ao CDI, com destaque para trabalhos que sustentam a estrutura curricular segundo a qual organizamos as aulas. Trazemos então justificativas para essa opção metodológica, relacionando-a com fatos que demarcaram nossa formação acadêmica e experiência docente. Expomos uma proposta de planificação do curso, associado à metodologia de trabalho com episódios de resolução de tarefas, elencando por fim alguns desafios subjacentes à sua implementação.

Educação Matemática Realística e as suas relações com o ensino de CDI

Denomina-se Educação Matemática Realística (RME, do *inglês Realistic Mathematics Education*) o movimento de reforma no ensino da Matemática holandesa iniciado no final da década de 1960, que teve como precursor o matemático Hans Freudenthal. Opondo-se ao formalismo apregoado pelos partidários da Matemática Moderna, a RME entende matemática como uma atividade natural e social cuja evolução acompanha a do indivíduo e a das necessidades de um mundo em expansão – uma atividade humana.

Segundo Freudenthal (1973, 1991), a matemática é tradicionalmente ensinada como um assunto pronto e acabado: aos estudantes são apresentadas definições, regras e algoritmos, a partir dos quais se espera que eles operem. Entretanto, nossa experiência enquanto docente, respaldada pelas ideias de Freudenthal (1991, p. 48, tradução nossa), mostra-nos que

> somente uma pequena minoria [das pessoas] aprende Matemática dessa maneira. Se você perguntar aos matemáticos como eles lêem os trabalhos/artigos, a maioria deles responderá que tenta reinventar seus conteúdos. Eu acredito que os jovens aprendizes podem ter o mesmo privilégio.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2000) lembra-nos que, para Freudenthal, a matemática deve ser concebida como uma atividade que melhor pode ser aprendida "fazendo". Os estudantes, ao invés de serem meros receptores de uma matemática pronta, devem ser tratados como participantes ativos no processo educacional. Freudenthal (1973, 1991) chamou isso de princípio da reinvenção. Na sua opinião, utilizar currículos cientificamente estruturados, em que os alunos são confrontados com uma matemática pronta, é uma inversão anti-didática. Deve-se dar aos estudantes a oportunidade de aprender a matemática de modo que eles próprios possam reinventá-la.

Uma situação que ocorre na história da Matemática é o fato de que "conceitos matemáticos são comumente - talvez até mesmo frequentemente - utilizados intuitivamente por um longo tempo antes que sejam descritos com precisão, e teoremas fundamentais são explorados intuitivamente antes de serem provados" (DIJKSTERHUIS, 1980 *apud* DOORMAN; MAANEN, 2008, p.7, tradução nossa). Nesse sentido, Freudenthal (1973) aponta que o CDI não seja tratado como um "amontoado de definições que estão acima de qualquer suspeita" (FREUDENTHAL, 1973, p. 512, tradução nossa), mas como uma ferramenta extremamente necessária à resolução de problemas.

Conforme Doorman e Maanen (2008), não encontramos na história a sequência presente em livros de CDI, partindo do conceito de limites para os conceitos de derivada e integral, seguidos das técnicas de diferenciação e integração e, finalmente, o Teorema Fundamental do Cálculo. Ao contrário disso, a definição de quociente incremental como uma das ideias básicas subjacente ao Cálculo é uma das últimas descobertas na história do CDI. Essa inversão da história para apresentação de um tópico matemático em um livro é um exemplo de inversão anti-didática (FREUDENTHAL, 1991). Tal inversão tem suas origens na elegância e eficiência; porém, didaticamente falando, tem consequências consideráveis.

Esse autor rejeita todo e qualquer método de ensino que traga aplicações ao final. Ao contrário, elas devem ser utilizadas como ponto de partida que permitem emergir e aprofundar conceitos fundamentais da Matemática, por meio de um progressivo processo de matematização (exploração da situação fazendo uso de ferramentas matemáticas). Assim, por exemplo, áreas e volumes podem ser calculados de forma intuitiva sem que definições mais gerais tenham sido apresentadas. O mesmo vale para densidades, velocidades e outros conceitos físicos subjacentes à história do CDI.

Nesse sentido, Freudenthal (1991) aponta que o ensino de CDI deveria ser precedido pela exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que sejam gradativamente refinadas. Tal abordagem tem como objetivo possibilitar que os estudantes compreendam e interpretem tais ideias, reinventando conceitos, ao invés de apenas reproduzir algoritmos.

A ideia de que a intuição deveria obrigatoriamente estar presente no processo de ensino e de aprendizagem do CDI (e consequentemente no processo de construção da Análise) é também defendida por Reis (2001). Segundo ele[5], a meta de se atingir "uma validação lógico- formal, isto é, rigorosa, jamais poderia prescindir da fase intuitiva e criativa das idéias matemáticas" (REIS, 2001, p. 74). Para Carvalho (1990 *apud* REIS, 2001, p. 86), "o rigor matemático é um efeito da atividade e não sua condição prévia". Nesse sentido,

> cabe a nós, professores de Cálculo e Análise, a avaliação de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o sentido e a real compreensão das idéias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere a sua formação matemática anterior e aos objetivos das disciplinas que ministramos para os diversos cursos da carreira universitária, os quais formam profissionais com os mais diferentes espectros (REIS, 2001, p. 80).

Uma abordagem excessivamente rigorosa dos conceitos do CDI presente em livros didáticos, em especial no que se refere às proposições e propriedades presentes no estudo dos limites, é criticada pelo autor. Para ele, dedicar cerca de um quarto da carga horária da disciplina somente para esse tópico não se justifica, uma vez que o foco de um curso inicial de CDI deveria estar voltado para o estudo de derivadas e integrais. Além disso, tal opção leva muitos estudantes a considerarem o assunto "impossível de ser entendido/aprendido" (REIS, 2001, p. 105 - 106), restando a tentativa de uma boa manipulação dos cálculos de limites, caracterizando a perigosa busca do procedimental sem o embasamento conceptual adequado.

O autor sustenta sua posição baseando-se, entre outros, nos trabalhos do professor Roberto Baldino. Para Reis (2001, p. 42),

> A grande contribuição dos estudos do Prof. Roberto Baldino para nosso trabalho vem de suas críticas em relação à atual abordagem do Cálculo, onde ocorre um excesso de rigor na apresentação de tópicos como limites, derivadas e integrais e não se verifica uma preocupação

[5] Para esse autor, a intuição é entendida enquanto "conhecimento claro e imediato" (REIS, 2001, p. 74) e pode ser classificada segundo cinco categorias (PERMINOV, 1988 *apud* REIS, 2001): intuição empírica, objetiva, lógica, categórica e conceptual. É desejável que todas elas sejam exploradas no ambiente de ensino.

> com suas aplicações, que, caso fossem melhor tratadas/exploradas, poderiam gerar novas compreensões sobre as idéias e os conceitos fundamentais do Cálculo.

Baldino (1995 *apud* REIS, 2001) contesta a insistência de se manter o conceito de limite como fundamento do Cálculo e aponta o Cálculo Infinitesimal como alternativa didática para as disciplinas de Cálculo e Análise. Assim, se

> todo o arsenal teórico sobre limites, mesmo que apresentado apenas em aspecto intuitivo, sempre ocupa boa parte do primeiro semestre de cálculo mas termina ficando suspenso até o curso de Análise Matemática, cabe perguntar: haverá maneira mais útil de empregar o tempo dedicado ao conceito de limite no primeiro curso de Cálculo? Não seria melhor usar esse tempo para reforçar o conceito de função com exemplos, como os de velocidade, densidade e pressão? O curso de Cálculo não poderia ser fundado sobre a idéia de continuidade que, enfim, é a que termina ficando? (BALDINO *et al*, 1995 *apud* REIS, 2001, p. 40).

Essas considerações fundamentam e sustentam a estrutura curricular que propomos para um curso de CDI 1, e sobre a qual discorremos na sequência deste texto.

A sala de aula regular de CDI: uma preocupação recorrente

Segundo Moreira (2004), apesar de nos últimos trinta anos a pós-graduação *stricto sensu* vir crescendo e se definindo no contexto de suas especificidades, produzindo um considerável corpo de conhecimentos, este ainda não teve impacto significativo no sistema escolar, em particular na sala de aula. Palha (2013) aponta que há uma discrepância entre as ideias aceitas e compartilhadas pela comunidade de Educação Matemática, e a realidade na maioria das salas de aula. Coloca-se assim, de forma evidente, a necessidade de ações que revertam esse quadro.

No que tange ao ensino de CDI, mais especificamente, Miranda (2004, p.17) lembra que o interesse de pesquisadores tem crescido nas últimas décadas por um “problema antigo e preocupante: a disciplina de cálculo diferencial e integral – não apenas no Brasil – tem registrado há vários anos altos índices de reprovação e desistência”.

Pensar em propostas referenciadas teoricamente, que sejam factíveis para salas de aulas regulares e que possibilitem, em alguma medida, contribuir nessa discussão, é nossa preocupação constante e recorrente. “Transpor” para nossas salas de aula as ideias oriundas dos estudos e resultados de pesquisa teórica é um desafio constante. Apesar de as formações em nível de graduação e mestrado serem diferenciadas e de uma experiência ainda incipiente com o ensino de CDI (que remonta ao ano de 2007), as trajetórias profissionais e acadêmica dos autores se aproximam em meados de 2009, e desde então temos compartilhado nossas inquietações, dilemas e dúvidas a respeito do ensino dessa disciplina. E, a partir de 2014, de forma sistematizada, o Ensino de Cálculo tornou-se nosso objeto de pesquisa.

A insatisfação com os resultados observados ao final de cada semestre de trabalho, atrelada ao contato com as ideias da RME[6], motivou-nos a investigar nossa própria prática enquanto professores. Concordamos com Ponte (2004, p.2) que professores universitários (que somos) estão "em posição privilegiada para investigar a sua própria prática [...] Por isso, é natural que se interroguem: porque olhar apenas para os problemas e as práticas dos outros? Por que não olhar também para a sua própria prática?".

Passamos então a buscar referenciais que nos "inspirassem" a implementar uma nova organização de um ambiente de ensino e aprendizagem de CDI, em especial pensar uma estrutura curricular que possibilitasse um adiamento do tratamento rigoroso de limites, privilegiando a exploração de ideias intuitivas que fomentassem a elaboração de conceitos matemáticos.

O polêmico livro *Calculus Made Easy*, publicado originalmente em 1910 com o pseudônimo *F.R.S – Fellow of the Royal Society* (reeditado em 1998 e assinado por Silvanus Philips Thompson e Martin Gardner (THOMPSON; GARDNER, 1998)), serviu-nos de base para pensar os conceitos fundamentais do Cálculo de forma intuitiva, com pouco formalismo e valorização de aplicações. O que mais "nos salta aos olhos" ao analisar essa obra é que a noção de limite sequer é apresentada no livro; em seu lugar, o autor trabalha com infinitesimais. A obtenção das derivadas de funções elementares se realiza a partir da comparação de acréscimos, e a integral é definida como extensão do processo de somar uma vasta quantidade de valores infinitamente pequenos.

No intuito de postergar um tratamento mais rigoroso de limites, o livro de Moise (1972), por exemplo, traz uma organização de conteúdos em formato de *espiral*. Para ele,

> Os conceitos centrais do cálculo são profundos. Não se espera que possam ser aprendidos todos de uma vez, nas formas pelas quais um matemático moderno pensa a respeito dêles. Portanto, neste livro, as idéias mais difíceis são apresentadas em uma série de formas

[6] Tal contato deve-se aos estudos desenvolvidos enquanto estudantes de doutorado e participantes do GEPEMA, Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação. Maiores informações em http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema.

> diferentes, em ordem crescente de dificuldade, generalidade e exatidão (MOISE, 1972 - prefácio).

Assim, por exemplo, uma primeira ideia de limite, de derivada e de integral definida aparece pela primeira vez no início do livro, postergando definições em sua forma final. A estrutura assim apresentada sustenta "uma longa preparação para a definição formal, com o fim de eliminar com antecedência tantas dificuldades quanto possível" (MOISE, 1972 - prefácio).

Essa proposta de estrutura curricular para a disciplina de CDI, justificada com base em estudos da história da Matemática, é evidenciada no trabalho de Machado (2012), que se respalda na teoria da aprendizagem em espiral de Jerome S. Bruner.

> De uma maneira geral, vamos propor que os Limites devem ser "diluídos" durante o avanço do estudo das Derivadas e Integrais partindo de noções mais intuitivas e chegando, ao fim da disciplina, à concepção aceita desde o século XIX pela comunidade matemática. Assim, estaremos salientando que o entendimento das Derivadas e Integrais deve ser o principal objetivo de um curso de Cálculo A e que, por este motivo, é preciso priorizar o tratamento destes conceitos desde o início do curso sem, com isso, tirar a importância do entendimento dos resultados mais abstratos desta teoria da Matemática (MACHADO, 2012, p. 1).

De maneira bastante similar, Apostol (1988) propõe uma sequência dos assuntos com base no desenvolvimento histórico e filosófico do CDI e da Geometria Analítica, conforme aponta o autor no prefácio da obra. Dá destaque ao fato de que a integração é tratada antes da derivação, sendo, ainda, "que esta ordenação de matérias possa ser pouco frequente, é historicamente correcta e pedagogicamente adequada" (APOSTOL, 1988, p. vii). Essa abordagem mais "genética" do CDI está presente também no livro de Toeplitz (1963), em que o autor propõe basear-se nas condições de aparecimento e desenvolvimento histórico do CDI para pensar o modo de apresentação de conceitos dessa disciplina.

Tais obras foram utilizadas, tanto como referência quanto fundamentação, na implementação da proposta de ensino de CDI que levou a pensar nas organizações curriculares em nossas aulas de CDI, o que detalharemos a seguir.

Qual proposta curricular para o CDI que "faz sentido"?

Na Universidade na qual atuamos, a disciplina de CDI 1 possui uma carga horária semestral de 90 horas/aula, distribuída em dois encontros semanais de 3 horas/aula, ou em três encontros de 2 horas/aula. Temos atuado em turmas dos cursos de engenharias

(Engenharia de Materiais, Engenharia Mecânica, Engenharia Ambiental, Engenharia de Produção, Engenharia Química). O Quadro 1 apresenta a ementa da disciplina de CDI 1 desses cursos.

Quadro 1: Ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1

Conjuntos Numéricos. Funções Reais de uma variável real. Limites e Continuidade. Derivadas, diferenciais e aplicações. Integrais definidas e indefinidas. Técnicas de integração e Integrais Impróprias**.**

Fonte: autores – baseado nos planos nos projetos pedagógicos dos cursos citados.

Em nossas aulas, temos procurado investigar "estruturas curriculares[7] para a disciplina que permitam que conceitos, propriedades, teoremas relacionados a esses conceitos presentes na ementa sejam desenvolvidos e refinados concomitantemente, o que, em alguma medida, "desmancha" a ordem linear comumente encontrada em livros didáticos e programas de disciplinas de CDI 1 (Funções, Limites, Derivadas e Integrais), apresentando esses conteúdos em forma espiral.

O Quadro 2 traz um paralelo entre dois cronogramas trabalhados por nós, um anterior a 2012 e o outro com uma reorganização da disciplina de CDI 1, quando iniciamos o movimento de repensá-la.

Quadro 2: Cronogramas da disciplina de CDI 1 antes e depois da reorganização

Cronograma de aulas anterior a (2012)	**Primeiro cronograma reorganizado – (2012).**
Apresentação da disciplina: ementa, critérios de avaliação e condutas; Definição de relação e função, definição e determinação de domínio, imagem, gráfico de funções.	Apresentação da disciplina e do plano de ensino. Modelos matemáticos (funções polinomiais e modulares).
Definição de função; Algumas funções elementares; Operações algébricas de funções; funções compostas.	Definição de uma função. Domínio e imagem.
Introdução ao estudo de Limites: noção intuitiva; definição de limite em um ponto; propriedades operatórias; funções definidas por partes; e limites laterais;	Propriedades gráficas (translações, reflexões, alongamentos, compressões e simetrias).
Definição de limite em um ponto; propriedades operatórias; funções definidas por partes; e limites laterais;	O método da exaustão.
Cálculo de limites em um ponto; limites de funções racionais e algébricas, algumas formas indeterminadas.	Definição e propriedades de integral definida para funções polinomiais.
Resolução de Exercícios.	Aplicações da integral no cálculo de áreas sob o gráfico de curvas e entre curvas.
Noção intuitiva de limites no infinito; propriedades operatórias de limites no infinito;	Aplicações da integral no cálculo de volumes.
Resolução de Exercícios.	Taxa de variação média e taxa de variação instantânea.
Funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas: conceitos básicos, propriedades, representação gráfica e estudo de limites fundamentais para estas funções.	Taxa de variação média e taxa de variação instantânea.
Funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas: conceitos básicos, propriedades, representação gráfica e estudo de limites fundamentais para estas funções.	Função derivada. Derivada de funções polinomiais. Derivada da soma, diferença e produto por constante.
Continuidade de funções.	Retas tangentes. Diferenciais e aproximação linear.

[7] Por estrutura curricular entendemos a distribuição dos conteúdos nos quais se "abrem" cada um dos conceitos presentes na ementa da disciplina. Trata-se de um currículo organizado no âmbito da interpretação dos autores do currículo prescrito (SACRISTÁN, 1999).

Continuidade de funções. Continuidade e Teoremas de Bolzano e do Valor intermediário. Resolução de Exercícios.	Traçados de gráficos de funções polinomiais. Comportamento no infinito.
Prova 1 e Entrega da APS (Fase 1)	Derivada segunda e estudo da concavidade.
Retas tangentes; introdução as derivadas; a derivada por definição; interpretação geométrica da derivada. Derivada como função real; diferenciabilidade e continuidade	Aplicações da derivação à determinação de valores extremos. Otimização.
Dedução de regras de derivação por definição, das funções: constante, potência, múltiplo constante de uma função, propriedades de adição, multiplicação e divisão de funções; e exemplos de uso das regras. Derivadas de funções trigonométricas.	**Prova 1**
Derivadas de funções da função exponencial e logarítmica. Regra da Cadeia; derivadas de ordem superior. Derivadas implícitas; taxas relacionadas.	Teorema Fundamental do Cálculo. Variação acumulada e aplicações na Física. Integrais indefinidas.
Estudo do comportamento de funções por meio das derivadas.	Funções exponenciais.
Estudo de extremos de funções, pontos de inflexão, concavidade.	Funções logarítmicas.
Gráficos por meio de transformações em funções elementares; paridade de funções; assíntotas verticais e horizontais	Funções trigonométricas.
Extremos relativos; gráfico de funções e propriedades gráficas	Regra do produto e do quociente. Regra da cadeia.
Extremos Absolutos; Teorema do Valor Extremo; Teorema do valor médio.	Derivação implícita e taxas relacionadas. **2ª. Entrega parcial do portfolio.**
Regra de L'Hopital.	Integração por partes.
Resolução de Exercícios.	Integração por substituição.
Prova 2 e Entrega da APS (Fase 2)	Integração por frações parciais.
Introdução a integrais: antiderivadas; integrais indefinidas pelo Método da Substituição; introdução a integrais definidas, por Somas de Riemann.	**Prova 2**
Integral definida; teorema Fundamental do Cálculo; cálculo de áreas.	Estudo das funções trigonométricas inversas.
Volume de sólidos de revolução; Método de integração por Partes.	Substituição trigonométrica.
Integração por partes e integração por frações parciais.	Outras técnicas de integração (fatorações, completamento de quadrados. Uso de tabelas).
Integração por frações parciais; integração por substituição trigonométrica.	Funções definidas por partes. Limites e continuidade. **Entrega Final do Portfolio.**
Aplicações de integrais definidas e indefinidas; Lei de resfriamento de Newton.	Formas indeterminadas. Regra de L'Hôpital.
Integrais Impróprias	Assíntotas e traçado de curvas.
Prova 3 e Entrega da APS (Fase 3)	Integrais impróprias.
Prova de Recuperação	**Prova 3**

Fonte: Planos de Ensino dos autores.

Nosso intuito, por meio dessa reorganização, foi "observar os conteúdos, e suas correlações, de uma disciplina, não de forma sequencial, mas de forma relacional, de modo que fosse possível visualizar a maioria dos conceitos e as proposições existentes entre eles" (LEME; IGLIORI, 2015, p. 77). Nessa primeira reorganização, inspirada em Apostol (1988), tínhamos como propósito que os alunos construíssem o conceito de integral e de derivada de funções de polinomiais e, somente após essa construção, as regras gerais e outras funções (exponenciais, logarítmicas e trigonométricas) seriam trabalhadas. Nesse cronograma, o conceito de limite envolveu-se com todos os temas, mas não foi trabalhado de forma independente: limite foi visto como um recurso para lidar com os conceitos de integral e limite. Em Trevisan e Mendes (2013) e Mendes e

Trevisan (2014), trazemos a análise de parte dessa proposta, com foco nas tarefas que propusemos essa estrutura curricular "não usual".

Entretanto, uma análise mais criteriosa ao final daquele semestre mostrou-nos apenas uma divisão discreta dos tópicos limites, derivadas e integrais no cronograma, se comparado ao adotado antes de 2012, separados abruptamente por provas escritas[8].

Em busca de um ambiente de aprendizagem em que os conceitos envolvidos se tornassem ferramentas para lidar com situações-problema e que fossem se refinando e interligando de forma relacional, novas organizações curriculares foram "experimentadas". Uma estrutura curricular que adotamos atualmente (Quadro 3) inspira-se na reorganização inicial do Quadro 2, entretanto, sentimo-nos mais seguros em "ir e vir" com pontos específicos, readequando-a a partir de características idiossincráticas de cada turma.

Quadro 3: Cronograma semanal da disciplina em seu modo atual (1º semestre de 2017)

Atividades de ambientação, apresentação da disciplina, avaliação diagnóstica.
Funções de domínio real. Domínio e imagem de uma função. Taxa média de variação. Concavidade.
Sequências numéricas. Convergência de sequências. Limite de uma sequência.
Prova 1. Modelo linear. Variação acumulada. Integrais definidas.
Taxa de variação instantânea. Derivada em um ponto.
Prova 2. Teoremas Fundamentais. Aplicações da Integral Definida na geometria e na Física.
Função quadrática. Estudo do crescimento e decrescimento a partir do sinal da derivada. Máximos e mínimos. Derivadas de segunda ordem.
Prova 3. Funções polinomiais. Área sob o gráfico. Problemas de otimização.
Comportamento infinito de funções. Limite no infinito e limites infinitos. Funções racionais e assíntotas. Integrais impróprias.
Prova 4. Limite de uma função em um ponto. A derivada como um limite. Continuidade e diferenciabilidade.
Diferenciais e linearização. Regra de L'Hôpital. Regra de derivação do produto e do quociente. Integração por partes.
Prova 5. Funções compostas. Regra da cadeia. Integração por substituição simples.
Funções exponenciais e logarítmicas: limites, derivadas e integrais.
Prova 6. Integração por frações parciais. Uso de tabelas de integração.
Funções trigonométricas: limites, derivadas e integrais. **Prova 7.**
Funções trigonométricas inversas. Integração por substituição trigonométrica.
Prova 8. Entrega de notas e fechamento da disciplina.

Fonte: Planos de Ensino dos autores.

[8] A discussão referente a avaliação na disciplina de Cálculo é outro objeto de nosso interesse. Provas escritas individuais não são o único, porém um dos elementos centrais presentes no processo de avaliação em nosso ambiente de aprendizagem. Uma discussão sobre "desenhos" possíveis para esse instrumento no contexto de CDI, respaldada em trabalho anterior (TREVISAN; MENDES, 2015), encontra-se em elaboração pelos autores.

Nesse modo de organização dos conteúdos, iniciamos o trabalho a partir do conceito intuitivo de sequência (apesar de não estar na ementa da disciplina). O propósito é que uma abordagem de conjuntos discretos anteceda o estudo de derivadas de funções reais, na qual o conceito de taxa média é desenvolvido a partir da discussão de diferentes sequências de diferença e quocientes de diferenças e o conceito de integral emerge do trabalho com sequências de somas parciais, sem que o conceito de limite seja apresentado formalmente nesse momento (nessa perspectiva, a ordem segundo a qual esses conteúdos são trabalhados torna-se indiferente). Essa escolha é respaldada pelos trabalhos de Weigand (2004, 2014), que defende o estudo de sequências na disciplina de CDI 1 por considerá-las uma ferramenta para o desenvolvimento de conceitos contínuos inerentes ao estudo de função, limite, derivada e integral.

Destacamos que a exploração inicial desses conceitos é restrita às funções polinomiais. Por meio delas, lidamos com diferentes contextos dos quais emergem e nos quais se aplicam os conceitos de integral definida e derivada, "aproximados" por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. O trabalho com funções racionais associa-se com o estudo do seu comportamento infinito, bem como do comportamento próximo a um ponto. Explora-se então o conceito de limite de uma função em um ponto, e associado a ele o conceito de continuidade e diferenciabilidade. A partir da definição "formal" de derivada como um limite, expandem-se as regras de derivação (e integração, consequentemente). Por fim, o estudo de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas finaliza a disciplina.

Sobre as tarefas que integram o ambiente de aprendizagem

Um dos elementos centrais que subsidiam essa reorganização curricular é a constituição de um ambiente educacional para o ensino de CDI que seja pautado em *episódios de resolução de tarefas* (adaptação da expressão *shift problem lessons*, proposta por Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), respaldados nos pressupostos da RME).

O trabalho com *episódios* de resolução de tarefas mostra-se como uma proposta factível em nossas turmas de CDI, uma vez que nossas condições reais de ensino[9] inviabilizam a realização de um trabalho que atenda plenamente, ao longo de todo o curso, pressupostos de tendências para o ensino de Matemática apontadas pela Educação

[9] Uma análise detalhada dessas condições reais é apresentada em Ramos, Fonseca e Trevisan (2016).

Matemática, como a resolução de problemas, a investigação ou a modelagem matemática. Tais episódios constituem-se como momentos do curso nos quais os estudantes são convidados a explorar intuitivamente conceitos, elaborar conjecturas, testá-las e compartilhar com seus colegas suas conclusões. No contexto do CDI 1 (disciplina que contempla uma carga de 90 horas-aula no 1º semestre dos cursos de Engenharia da instituição na qual atuamos) são dedicadas cerca de 25 horas do curso (cerca de 10 encontros de 3 horas-aula de 50 minutos) a esses episódios, planejados para anteceder o estudo "formal" dos conceitos de sequências numéricas e convergência, derivada e integral, e limites envolvendo funções de variáveis reais.

Um dos pressupostos dessa forma de trabalho é que as tarefas não sejam precedidas da apresentação de conceitos. A reorganização dos conteúdos deve, assim, permitir que, ao invés de se introduzir um conceito mediante sua definição formal, o estudante seja convidado, por meio da realização dessas tarefas, a explorá-lo intuitivamente, levando em conta suas concepções e imagens conceituais prévias. Em seguida, por meio das intervenções do professor e da discussão no grupo, "refinar" os conceitos subjacentes (construindo, sempre que possível, uma definição provisória – MOISE, 1972); por fim, a partir da sistematização coletiva, mediada pelo professor, elabora-se uma definição formal (que, muitas vezes, ainda é restrita a casos particulares, mas é revisada e ampliada ao longo do curso).

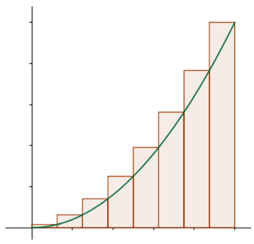
Mostra-se fundamental que os estudantes tenham um papel ativo, trabalhando, quando possível, em grupos e em tarefas não precedidas de exemplos, que sejam desencadeadoras de discussões e que contribuam para elaborações conceituais. O papel do professor, ao invés de sempre fornecer explicações, é incentivá-los a apresentarem e discutirem suas ideias durante as realizações das tarefas propostas, bem como conduzir a sistematização dos conceitos a elas subjacentes.

O desenho de tarefas que compõem esse ambiente passou a ser parte do nosso objeto de pesquisa, sendo alguns resultados, oriundos de estudos desenvolvidas junto a estudantes ingressantes em turmas de CDI, detalhados em Trevisan, Borssoi e Elias (2015), Couto, Trevisan e Fonseca (2016) e Mendes e Trevisan (2016).

Como forma de clarificar nossa forma de trabalho, apresentamos um exemplo de tarefa (Quadro 4), inspirada em Apostol (1988), que vem sendo utilizada como mote para nossos alunos lidarem intuitivamente com o conceito de integral. Em geral, ela é proposta entre a 3ª e 4ª semanas de aulas do curso, após um trabalho anterior com sequências numéricas, convergência de uma sequência e somas parciais dos termos de uma sequência. Tal tarefa possibilita aos estudantes a exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias relacionadas ao cálculo de áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, que serão gradativamente refinadas. Nas palavras de Freudenthal (1991), ela oferece aos estudantes a oportunidade de reinventar conceitos, ao invés de apenas reproduzir algoritmos.

Quadro 4: Enunciado da Tarefa desencadeadora do conceito intuitivo de integral

Considere a região delimitada pela curva $y = x^2$,, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

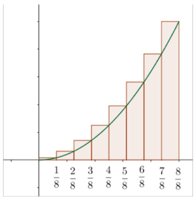


a) Suponha que a região seja preenchida por retângulos, como na figura, todos com a mesma base. Construa uma sequência em que cada termo represente a área de um desses retângulos. Trabalhe com frações.
b) Represente em notação de somatório a soma desses termos e efetue o cálculo.
c) Nesse contexto, construa uma figura que ilustre $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4} f(x_i)$.
d) Que relação há entre a soma dos termos de cada uma dessas sequências e o gráfico de $y = x^2$?
e) Como o número de parcelas desses somatórios interfere na resposta do item anterior?
f) Explore o método considerando um intervalo $[0, b]$.

Fonte: autores.

No item (a), os alunos recebem o comando para construir uma sequência da soma das áreas dos retângulos; o professor, sujeito que guia e acompanha o processo, instrui o modo que o aluno deve trabalhar para que todos alcancem o que se deseja (ao solicitar que se trabalhe com frações – Quadro 5). Esse aspecto é importante, pois, em uma aula à luz da RME, o papel do professor é o de organizador da reconstrução das ideias e conceitos matemáticos dos estudantes, de tal forma que o conhecimento matemático se faz dinâmico e construído a partir das relações, justificativas, análises e validações estabelecidas pelos envolvidos. A autoridade do professor como aquele que valida conhecimento é trocada pela autoridade como guia, pela maneira que seleciona as tarefas, inicia e encaminha as discussões e as construções matemáticas dos alunos (GRAVEMEIJER, 1994).

Quadro 5: Resolução para o item a.



Os alunos irão criar uma partição do domínio conforme ilustrado na figura, $P = \{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}\}$. Em seguida, a sequência das áreas dos retângulos, $(S_n) = \{\frac{1^2}{8^3}, \frac{2^2}{8^3}, \frac{3^2}{8^3}, \frac{4^2}{8^3}, \frac{5^2}{8^3}, \frac{6^2}{8^3}, \frac{7^2}{8^3}, \frac{8^2}{8^3}\}$.

Pode ser que os alunos já reconheçam um padrão entre os termos desta sequência.

Fonte: autores.

No item (b), pede-se que realizem o somatório dos termos, mas, ao invés de usar calculadora, o professor irá sugerir que investiguem como podem realizar o cálculo de um modo mais direto (Quadro 6). Para tanto precisarão da fórmula da soma nos quadrados dos n primeiros inteiros. Essa pesquisa pode ser realizada em sala por meio de busca na Internet ou ter sido previamente solicitada aos alunos..

Quadro 6: Resolução para o item b.

Tem-se que

$\frac{1^2}{8^3} + \frac{2^2}{8^3} + \frac{3^2}{8^3} + \frac{4^2}{8^3} + \frac{5^2}{8^3} + \frac{6^2}{8^3} + \frac{7^2}{8^3} + \frac{8^2}{8^3} = \frac{1}{8^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2)$

$= \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8^3} i^2 = \frac{1}{8^3}\left(\frac{9.8.17}{6}\right) = \frac{153}{384}$ [utilizamos o fato de $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1).n.(2n+1)}{6}$].

Fonte: autores.

No item (c), espera-se que o aluno repita o procedimento e atente-se que a variação do número de retângulos está associada à aproximação obtida para a área do arco parabólico. Por meio dessa discussão, o professor tem a oportunidade de realçar aspectos do método da exaustão, perpassando o conceito de Soma de Riemann, até chegar ao conceito de integral definida de Leibniz. Para isso, outros exemplos, com intervalos diferentes e com outras funções polinomiais serão necessárias. Ressalta-se que toda a discussão independe do conceito de integral indefinida de uma função real $f(x)$ como uma família de uma função $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$. Busca-se, dessa forma, estimular a exploração intuitiva e criativa de ideias matemáticas, sem que essas sejam precedidas por um processo de validação lógico-formal (REIS, 2001).

Recursos tecnológicos podem ser de grande valia nesse momento, pois ajudarão os alunos a reconhecer padrões e desenvolver o modelo para resolver uma integral de uma função polinomial definida em um intervalo real. Isto é, $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Todo o desenvolvimento utiliza intuitivamente o conceito de limite. O valor da soma das áreas de retângulos tende à área da região delimitada pela função $f(x)$ $(f(x) > 0)$ e pelo eixo-x no intervalo $[a, b]$, à medida que o número de retângulos tende ao infinito (ou a medida que o comprimento da base tende a zero).

Esse percurso sugerido atende ao princípio dos modelos emergentes da RME. Esse princípio tem papel importante na relação existente entre o conhecimento informal e o formal e na evolução de um para o outro. É fundamental que os estudantes desenvolvam seus próprios modelos enquanto lidam com as tarefas. No início, os estudantes desenvolvem modelos que lhes são familiares. Esses modelos passam por um processo de formalização e generalização, tornando-se, gradualmente, um ente matemático. O mesmo autor denominou essa transição de "*modelo de*" para "*modelo para*" (GRAVEMEIJER, 1994).

Finalizando

Este texto é fruto de uma reflexão sobre a própria prática dos autores, enquanto professores da disciplina de CDI, atrelada às ideias da RME e com os desejos pessoais em "fazer diferente".

A proposta curricular aqui apresentada resulta desse processo, e é respaldada tanto por preceitos apresentados na literatura sobre ensino de Matemática, em especial de CDI, quanto por resultados de nossas próprias pesquisas, a partir de dados oriundos de nossas salas de aula. Busca-se, por meio do trabalho pautado em *episódios de resolução de tarefas*, que dá aporte a essa proposta curricular, a organização de um ambiente educacional para o CDI que, ao mesmo tempo, leve em conta aspectos apontados pelas pesquisas (portanto, sejam referenciadas teoricamente), difiram significativamente de aulas centradas no livro didático, mas que atendam demandas rotineiras da sala de aula e estejam alinhadas com a organização didático-pedagógica proposta pela nossa instituição (estejam comprometidas com um currículo obrigatório, com o projeto político-pedagógico do curso, com a atribuição de uma nota ao fim de um período).

Um aspecto importante que destacamos do nosso processo de reflexão a respeito da própria prática que no tange a estrutura curricular foi a compreensão acerca da sua flexibilidade: enquanto, em 2012, buscávamos "uma" resposta para as questões que se apresentam no título deste artigo (Ensinar integral antes de derivada ou derivada antes de integral?), hoje entendemos que elas deixam de fazer tanto sentido. Sendo conceitos complementares, não há "uma hierarquia" ou uma organização curricular rígida a ser seguida. Temos trabalhado com a criação de tarefas (e, intrinsecamente associado a isso, investigado formas de utilizá-las em sala de aula, bem como aprendizagens por ela propiciadas) que oportunizem aos estudantes reinventar CDI, que permitam a criação de conceitos e teoremas fundamentais utilizados intuitivamente (por meio de definição provisórias antes que sejam descritos com precisão ou provados), buscando assim desconstruir organizações rígidas e inflexíveis apresentadas no sumário da grande maioria (senão, da totalidade) dos livros de CDI. A proposta de organização de conteúdos da ementa de CDI 1, como apresentada no Quadro 3, é uma alternativa à inversão anti-didática observada nas salas de aula, e que pode ser uma das razões do insucesso dos estudantes nessa disciplina.

Acerca das dificuldades na realização desse tipo de trabalho (e, portanto, obstáculos a serem ultrapassados), destacamos a falta de material de apoio para as aulas, o não "sincronismo" de trabalho junto a outros professores do Departamento que ministram essa disciplina e o perfil de trabalho individualizado e baseado no tripé definição-exemplo-exercício de estudantes que ingressam no curso. No que tange ao primeiro aspecto, temos trabalhado na organização de um espaço virtual[10], como suporte às aulas, que substitui (ao menos em parte) o livro didático. Além da organização dos conteúdos em espiral (como prevê nossa proposta de trabalho), destacam-se o caráter dinâmico do ambiente, por meio de uso de *applets* e vídeos, a estratégia de disponibilização dos conteúdos apenas após sua exploração e sistematização em sala de aula e a proposição de tarefas em lugar de "lista de exercícios", que mantenham características investigativas, ao final de cada tópico. A intenção é que esse ambiente nunca esteja "pronto", mas que seja ajustado a cada semestre conforme os percursos curriculares que se configuram a cada semestre.

Sobre a falta de "sincronismo" (para não dizer credibilidade) com nosso Departamento, temos buscado compartilhar e justificar nossa forma de trabalho por meio da apresentação de seminários para os quais todos são convidados (embora, raramente, participem). Reconhecemos a dificuldade em se avaliar "quantitativamente" os impactos dessa forma de trabalho na aprendizagem dos estudantes (e somos constantemente questionados sobre isso pelos nossos pares), porém destacamos alguns aspectos que emergem da nossa prática: (i) nossos estudantes, em geral, mostram-se mais ativos, interessados, com iniciativa para resolver as tarefas propostas em aula, se comparados a estudantes de turma submetidas a uma prática "usual" de aula de CDI. Além disso, tal aspecto é bastante evidente quando ministramos aulas de CDI 2 e CDI 3, já que nessas turmas é comum recebermos alunos que cursaram CDI 1 em diferentes turmas; (ii)

[10] http://www.calculointerativo.com.br/

nossos estudantes permanecem na disciplina por mais tempo. Usualmente estudantes que assistem a aulas “usuais” de CDI desistem após a segunda prova (em um contexto no qual resolvem três ou quatro provas no semestre) se não obtém um desempenho satisfatório, assumindo-se não capazes de compreender derivadas e integrais “se nem” aprenderam “ainda” funções e limites (conclusão muitas vezes resultante do próprio discurso de seus professores). A abordagem em espiral que propomos possibilita que o estudante se sinta “capaz de aprender” em qualquer momento do curso, o que diminui o índice de desistência na disciplina; (iii) embora os índices observados em nossas turmas não sejam “tão” diferentes das demais (50 a 60% de aprovação do total de ingressantes, em comparação à média de 40% em turmas usuais), os estudantes que reprovam em nossa turma, ao cursar CDI 1 pela primeira vez, relatam ter conseguido “acompanhar bem” as aulas ao se rematricular em turmas de outros professores em semestres seguintes.

Acerca do terceiro e último aspecto listado anteriormente, temos buscado construir, por meio do trabalho com episódios de resolução de tarefas, uma cultura diferente da sala de aula usual. Entretanto, pouco ainda sabemos sobre condições necessárias para realizar o tipo de tarefas que propomos numa sala de aula formada por estudantes habituados a um ensino tradicional, na qual existem valores e crenças já arraigados sobre a matemática e a sua aprendizagem. Temos nos debruçado em investigar ações que, enquanto professores de CDI, precisamos encabeçar de forma a alterar a cultura, valores e crenças existentes.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (Processo 457765/2014-3) pelo auxílio à realização do projeto do qual resulta este artigo.

Referências

APOSTOL, T. *Cálculo 1*. Lisboa: Editorial Reverté, 1988.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

COUTO, A. F.; TREVISAN, A. L.; FONSECA, M. O. S. Análise de uma tarefa investigativa proposta a estudantes de Cálculo por meio de questões do tipo 'aberto-controladas'. In: III Simpósio Nacional de Ensino e aprendizagem, 2016, Londrina. *Anais...* SEA, 3. Londrina: Editora da UTFPR, 2016. v.1. p. 1-9.

DOORMAN, M.; MAANEN, J. V. A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal*, v. 22, n.2, p.4-14, 2008.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. *Revisiting Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Utrecht University, 1994.

LEME, J. M. do C.; IGLIORI, S. B. C. Mapas curriculares: uma nova ferramenta para análise de conteúdos de disciplinas. In: III Fórum Nacional sobre currículos de Matemática, 2015, Ilha Solteira. *Anais*... FNCM, 3. Ilha Solteira: Editora da Unesp, 2015. v.1. p. 75-83.

MACHADO, P. A. P. Uma abordagem para a disciplina de Cálculo A. In: III Escola de inverno de Educação Matemática, 2012, Santa Maria. *Anais*... Santa Maria: UFSM, 2012, p. 1-12.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L. Competências de conexão e reflexão em aulas de Cálculo. In: XII Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2014, Campo Mourão. *Anais*... Campo Mourão: Universidade Estadual do Paraná, 2014, p. 1-10.

MENDES, M. T.; TREVISAN, A. L. Modelagem matemática como componente do ambiente educacional para aulas de CDI: relato de uma experiência. In: VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 2016, Londrina. *Anais*... EPMEM, 7. Londrina: UEL/UTFPR, 2016. v. 1. p. 722-735.

MIRANDA, G. A. de. Silvanus Thompson e a desmistificação do Cálculo: resgatando uma história esquecida. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

MOISE, E. E. *Cálculo: um curso universitário* – volume 1 – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 1972.

MOREIRA, M. A. O mestrado (profissional) em ensino. *Revista Brasileira de Pós-Graduação*, Brasília, v. 1, n.1, p. 131-142, 2004.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. *Research Institute of Child Development and Education*, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. *Internacional Journal os Science and Mathematics Education.* Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. GTI (Ed.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, Lisboa, APM, p. 5-22, 2002.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In: CASTRO, E.; TORRE, E. (Eds.), *Investigación en educación matematica*. Coruña: Universidad da Coruña, 2004, p. 61-84.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautado em episódios de resolução de tarefas. In: V Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2016, Ponta Grossa. *Anais...* SINECT, 5. Ponta Grossa: Editora da UTFPR, 2016. v. 1. p. 1-11.

REIS, F. S. *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise*: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

SACRISTÁN, J.G. O currículo: os conteúdos do ensino ou uma análise prática? In: SACRISTÁN. J.G; GÓMEZ, A.L.P. *Compreender e transformar o ensino*. 4. ed. São Paulo: ArtMed, 1999. p. 119-148.

TOEPLITZ, O. *The Calculus, a Genetic Approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1963.

THOMPSON, S. P.; GARDNER, M. *Calculus Made Easy*. New York: St. Martin's Press, 1998 (publicado em 1910, como F.R.S – *Fellow of the Royal Society*).

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A.H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirinópolis/GO, 2015. *Anais...* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6, Brasília: SBEM, 2015. v. único. p. 1-12.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 6, p. 129-138, 2013.

TREVISAN, A. L., MENDES, M. T. A Prova Escrita como Instrumento de Avaliação em Aulas de Matemática. *Educação Matemática em Revista* (São Paulo), v. 45, p.48 - 55, 2015.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Mathematics education in the Netherlands: a guided tour. In: *Freudenthal Institute*. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

WEIGAND, H. G. Sequences—basic elements for discrete mathematics. *ZDM*, n.36, v. 3, p. 91-97, 2004.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM*, n. 46, p. 603–619, 2014.

Texto recebido: 20/06/2017
Texto aprovado: 01/11/2017