

# **Poliedros: lenguajes y representación espacial\***

**María Consuelo Cañadas Santiago, Francisco Durán Ceacero, Sandra Gallardo Jiménez, Manuel José Martínez-Santaolalla Martínez, María Peñas Troyano y José Luis Villegas Castellanos**

(Grupo PI de Investigación en Educación Matemática – Universidad de Granada)

Nivel educativo: E.S.O.

En esta comunicación ponemos de manifiesto la importancia del estudio de los poliedros en la Enseñanza Secundaria y su utilidad para el desarrollo y la comunicación de ideas matemáticas. Con esta intención planteamos una serie de tareas que permiten al profesor y al alumno trabajar los poliedros potenciando el lenguaje en el aula de matemáticas y las capacidades espaciales del alumno. Las tareas aquí presentadas fueron realizadas en unas Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas organizadas por la Sociedad de Profesores de Matemáticas THALES en Granada con la participación de profesores de distintos niveles educativos.

## **Introducción.**

Actualmente, la Enseñanza Secundaria Obligatoria hace hincapié en los aspectos numéricos y algebraicos de las matemáticas, a la vez que pierden fuerza los aspectos geométricos. Aún así, lo cierto es que todo el mundo ha de afrontar con mucha mayor frecuencia problemas espaciales que numéricos (Dickson, 1984). En la Enseñanza de las Matemáticas debemos tener en cuenta que la representación espacial y el lenguaje forman parte del desarrollo y la comunicación de ideas matemáticas (Dickson, 1984). Lenguaje y representación son dos elementos de vital importancia en el desarrollo del individuo.

## **El espacio y el plano.**

El estudio de los poliedros permite introducir al alumno en el ámbito tridimensional y en el campo de las representaciones del espacio. Una mano experta puede representar sobre el plano (por ejemplo la pizarra) un dibujo que muestre un tetraedro, pero será necesario que el alumno posea algunas habilidades para poder percibir la adecuación entre la representación y el objeto tridimensional y para poder realizar nuevas representaciones de nuevos objetos tridimensionales. Entre estas habilidades necesarias está la visión espacial que le permitirá reconocer un objeto tridimensional sobre una superficie bidimensional.

En el trabajo con poliedros es necesaria la visión espacial y para ello es preciso que el alumno estudie éstos desde diversas perspectivas. Una de ellas es la manipulación

---

\* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

de los objetos, paso previo a su representación. Por este motivo, compartimos la idea de Guillén (1991) de que “la mejor manera de aprender sobre poliedros es construirlos y después observarlos, compararlos, transformarlos y modificarlos” (p. 11). Para ello el uso de unos materiales adecuados, que nos permitan tanto su construcción como su manipulación, puede favorecer el acercamiento de los alumnos a los objetos tridimensionales y en particular a los poliedros.

## **Estudio de los poliedros en el Currículo.**

Los poliedros deben formar parte de la enseñanza de las matemáticas y así se manifiesta en el currículo. El estudio inicial de los poliedros se sitúa en segundo de ESO (14-15 años), aunque no se realiza una mayor profundización hasta tercero de ESO (15-16 años), donde se introducirá por primera vez el estudio de los volúmenes (Decreto 148/2002 de 14 de mayo por el que se modifica el Decreto 106/1992, de 9 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía). El estudio de los poliedros comienza con el análisis de la forma de las caras, el número de vértices y aristas, si todas las caras o las aristas son iguales, qué grado posee cada vértice, etc.

## **Materiales Didácticos.**

Duval (2001) se preguntaba “¿Es suficiente observar las imágenes y figuras para ver lo que ellas representan?”. Para nosotros está claro que no, las imágenes y figuras deben representarse, manipularse..., y es por ello que en las tareas que planteamos la manipulación es imprescindible. Pero para manipular en el aula de matemáticas son necesarios unos materiales adecuados.

Entenderemos por materiales didácticos todos los objetos usados por el profesor o el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el fin de lograr unos objetivos didácticos programados. Es decir, aquellos objetos que puedan ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje.

Un aspecto que debemos tener en cuenta es que no existe correspondencia biunívoca entre un material y un concepto, procedimiento o actitud. “Un mismo concepto ha de trabajarse, en lo posible, con diversidad de materiales y, recíprocamente, la mayoría de los materiales son utilizables para hacer ejercicios diversos.” (Alsina y cols., 1988, p. 13).

Tenemos así que son numerosos los materiales que podemos utilizar para construir poliedros. Martínez y cols. (1989) proponen la siguiente clasificación: en primer lugar los materiales de uso corriente (no necesariamente matemáticos); en segundo lugar los materiales diseñados específicamente para la enseñanza de la geometría. Entre los primeros encontramos palillos, varillas de madera, cuerdas, alambres, pajitas de refrescos, plastilina, etc. Los poliedros troquelados estarían incluidos en el segundo tipo.

En este trabajo nos interesaremos en la construcción y análisis de la estructura de los poliedros. Por este motivo nos centraremos en el uso de dos materiales concre-

tos: los palillos, que nos servirán de aristas; y la plastilina, manipulada para ser utilizada como vértices en los poliedros.

Este tipo de material permite la construcción del esqueleto del poliedro utilizando como aristas los palillos. Estas construcciones dejan hueco todo el interior del poliedro y las caras del mismo, permitiendo observar, además del esqueleto, otras representaciones como el diagrama de Schlegel.

## Tareas

### *Primera Fase*

En una primera fase proponemos que los estudiantes se familiaricen con el material construyendo diversos polígonos, para a continuación comenzar con la construcción de poliedros con un solo tipo de polígonos (regulares). Consideraremos como poliedro regular aquel cuyas caras son todos polígonos regulares iguales, y todos sus diedros y ángulos poliedros también son iguales. Para que estas condiciones se cumplan, el poliedro tiene que ser convexo, puesto que en los cóncavos los ángulos diedros no son todos iguales.

Dos propuestas que se pueden plantear al alumno en este momento son las siguientes:

- 1) *¿Es posible construir poliedros cuyas caras sean hexágonos?* Aquí el alumno percibirá la imposibilidad de “levantar” una figura con hexágonos.
- 2) *“Platón afirmaba que sólo existen cinco poliedros regulares, esto es, los poliedros formados por polígonos regulares del mismo tipo y concurriendo el mismo número de ellos en cada vértice.”* ¿Es cierta esta afirmación? Esta cuestión les permitirá discutir sobre la validez de los poliedros regulares construidos para así conseguir tener solo cinco.

Una vez que se han construido los cinco poliedros regulares será el turno de su análisis y descripción. ¿Cuántas caras tiene cada uno?, ¿y aristas y vértices? ¿Qué polígonos forman sus caras? Estas serán algunas de las preguntas a realizar a los estudiantes. Toda esta información podría ser recogida por los alumnos en una tabla que ellos mismos deberán rellenar (Tabla 1).

A continuación se les sugerirá la búsqueda de una relación numérica entre caras, vértices y aristas con la intención de que conozcan el Teorema de Euler.

Otros de los elementos que pueden estudiarse son: ¿Qué ángulos se forman en el poliedro? ¿Qué podemos decir acerca de la rigidez de la figura?

### *Segunda Fase:*

En una segunda fase incidiremos en el desarrollo del lenguaje. Para ello planteamos la tarea de “El teléfono”, que proporcionará una actividad que permite un desarrollo del lenguaje y la capacidad espacial.

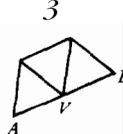
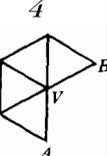
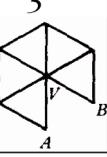
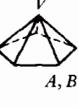
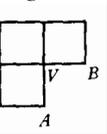
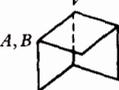
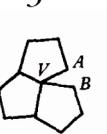
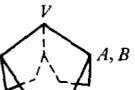
Nombre	Cara del Polígono	Grado del Vértice	Unión para formar un "tejado" tridimensional	Poliedro	Nº de Caras	Nº de Vértices	Nº de Aristas	Ángulos
Tetraedro Regular	Triángulo Equilátero	3 			4	4	6	60°
Octaedro Regular	Triángulo Equilátero	4 			8	6	12	60°
Icosaedro Regular	Triángulo equilátero	5 			20	12	30	60°
Cubo o Hexaedro	Cuadrado	3 			6	8	12	90°
Dodecaedro Regular	Pentágono regular	3 			12	20	30	108°

Tabla 1. Características de los poliedros regulares

“Imagina que tienes que describir la figura de la fotografía telefónicamente a un amigo. Esta imagen es la de un “columpio” del Parque García Lorca en Granada (Figura 1). Describe la figura verbalmente, sin gestos, para que tu compañero pueda construirla con los palillos y la plastilina.”

En esta tarea los alumnos pueden caracterizar la figura mediante sus distintas propiedades y utilizando el lenguaje matemático que han usado en la primera tarea. Los alumnos pueden caracterizar el poliedro rellenando una tabla como en el ejercicio anterior (vértices, caras, aristas,...). Pero además pueden profundizar en las distintas representaciones posibles de la figura construida como por ejemplo la representación de diferentes vistas (planta y perfil), desarrollo plano (es decir, una representación plana del mismo que lo caracteriza, lo representa y permite construir el modelo) y diagrama de Schelegel (representación plana de carácter topológico y que permite ver a la vez todas las caras, vértices y aristas del sólido, así como el número de caras que concurren en cada). Los alumnos también pueden investigar sobre cómo puede obtenerse este poliedro a través de otros poliedros.

Otro aspecto a tener en cuenta es que la figura que planteamos para describir es un poliedro Arquimediano, llamado así en honor a Arquímedes (el primero que los describió) o también semirregulares, ya que están formados por polígonos regulares pero

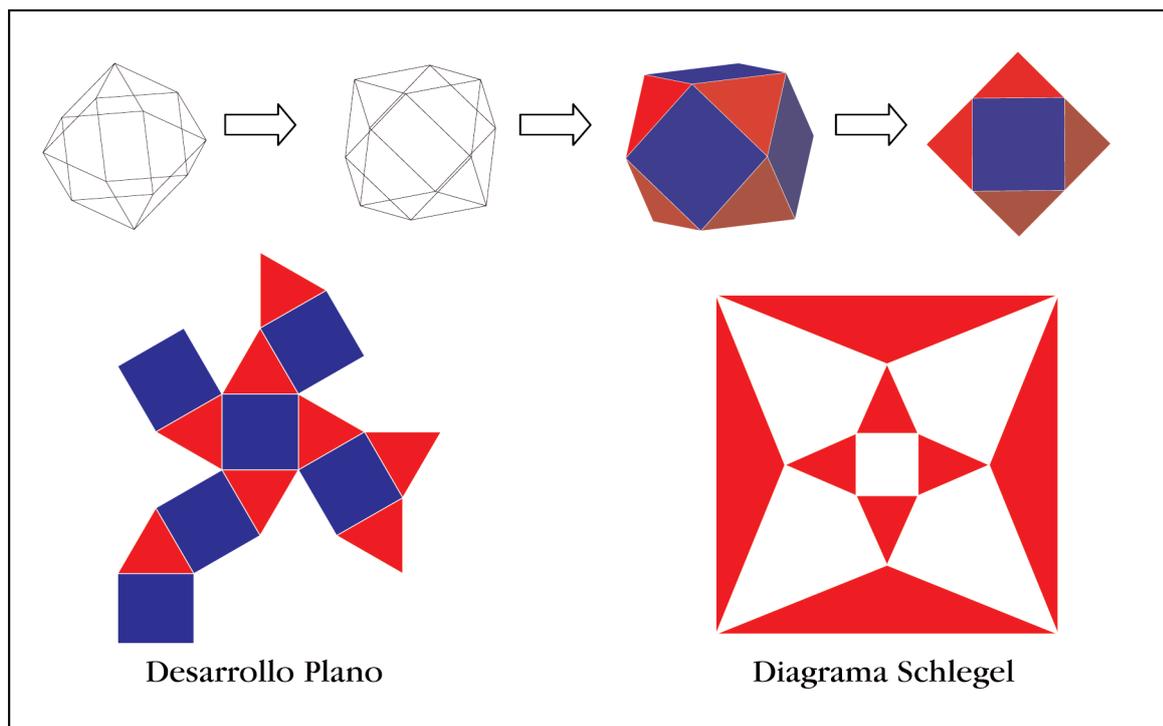


Figura 1. Representaciones de un cubooctaedro.

de distintos tipos, cumpliendo que en cada vértice se juntan el mismo número de caras y de la misma forma. La definición de este tipo de poliedro nos permite incidir sobre una de las formas de describir verbalmente la figura, ya que una manera de obtenerlos es truncando los poliedros regulares con distintos planos. La figura de la fotografía es un cubo al que le han cortado los vértices (Figura 1).

Y a partir de ahí podríamos plantear nuevas preguntas sobre los poliedros arquimedianos: ¿Qué figura se obtendría si cortásemos el tetraedro por la mitad de la arista? ¿Y si cortamos el tetraedro a un tercio del vértice? ¿Y si el poliedro a cortar fuera el cubo? Y además les podríamos pedir a nuestros alumnos la realización de las distintas representaciones de los mismos, desarrollando así destrezas de percepción del espacio.

## Conclusiones.

La capacidad espacial ha tenido un déficit de tratamiento en la Escuela si lo comparamos con el tratamiento dado a la capacidad numérica o a la de razonamiento (Arrieta, 2001). Teniendo en cuenta la necesidad que tiene la enseñanza de la geometría de dicha capacidad, este déficit nos lleva a que el alumno tenga grandes dificultades para abstraer formas geométricas y para ser capaz de percibir el medio en el que vive, que inevitablemente es geométrico.

Con las propuestas hemos querido potenciar la importancia del lenguaje en la comprensión de las formas matemáticas, así como la necesidad de la manipulación y construcción de figuras y cuerpos geométricos para una mejor percepción de las propiedades y relaciones implicadas.

La enseñanza de la geometría requiere de distintas estrategias para su aprendizaje así como la posibilidad de trabajar con diversas representaciones. Éstas tienen su justificación en

la necesidad de comunicación de las formas geométricas que percibimos con nuestros sentidos cuando éstas no están presentes para alguno de los individuos que forman parte del proceso de comunicación. Esta necesidad se manifiesta en el entorno cotidiano del alumno y en las muchas situaciones en que tiene que describirlo. El profesor de matemáticas debe ser consciente de esto y potenciar tareas de lenguaje y representación del entorno en el aula.

## ***Bibliografía***

- **ALSINA, C.; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.** (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Madrid, Síntesis.
- **ARRIETA, M.** (2001): *Programa de doctorado: Psicodidáctica*, Bilbao, Universidad del País Vasco.
- **CLEMENS, S.; O'DAFFER, P. y COONEY, T.** (1989): *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, Méjico, Addison Wesley Iberoamericana.
- **DICKSON, L.; BROWN, M. y GIBSON, O.** (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Ed. Labor.
- **JUNTA DE ANDALUCÍA** (2002) Decreto 148/2002 de 14 de mayo por el que se modifica el Decreto 106/1992, de 9 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.
- **DUVAL, R.** (2001): *La geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME-UNISON
- **GUILLÉN, G.** (1991): *Poliedros*, Madrid, Ed. Síntesis
- **GRUPO PI** (2002): Materiales didácticos en la resolución de problemas. En **J.M. CARDEÑOSO y otros** (Ed.): *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problema*, Granada, Universidad de Granada – SAEM Thales
- **MARTÍNEZ, A. y RIVAYA, F.** (1989): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*, Madrid, Ed. Síntesis.
- [http://ddm.ugr.es/grupo\\_pi](http://ddm.ugr.es/grupo_pi)
- <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/gespac/poliedro/poliedro.html>
- [www.georgehart.com](http://www.georgehart.com)
- [www.iesarrojo.com/matematicas/taller/juegos/poliedros](http://www.iesarrojo.com/matematicas/taller/juegos/poliedros)
- [www.perso.wanadoo.es/jpm/poliedros%20regulares](http://www.perso.wanadoo.es/jpm/poliedros%20regulares)
- [www.unirioja.es/dptos/dmc/luherman/Divul/POLIEDROS](http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luherman/Divul/POLIEDROS)