artigo

A INFLUÊNCIA DA CALCULADORA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS ABERTOS

Kátia Maria de Medeiros[1]

Resumo

A calculadora, uma das ferramentas que o homem desenvolveu para atender a suas necessidades de fazer cálculos, tem sua utilidade reconhecida, há já muito tempo, fora da sala de aula. Entretanto, ainda hoje seu uso escolar está cercado de dúvidas e preconceitos infundados. Este artigo apresenta uma pesquisa, realizada em 2000 em uma escola da rede pública estadual de Pernambuco, que visava investigar a influência da calculadora na sala de aula de matemática na resolução de problemas matemáticos abertos. Seu objetivo específico foi observar se e como os alunos modificavam seus procedimentos quando passavam a usar a calculadora nessa resolução. Os resultados mostram que a calculadora pode servir para agilizar a resolução e, possivelment, potencializar o cálculo mental.

Palavras-chave: calculadora; problemas matemáticos; sala de aula de matemática.

A Calculadora na Sala de Aula de Matemática

A mão do homem foi a primeira máquina de calcular de todos os tempos. Foram os dedos das mãos e dos pés os primeiros instrumentos que o homem primitivo utilizou para atender a diferentes necessidades como a de controlar a quantidade de animais dos rebanhos utilizados em seu sustento.

A origem da civilização, com o conseqüente desenvolvimento do comércio, fez com que o homem criasse instrumentos cada vez mais sofisticados para a contagem dos objetos, como por exemplo, os diversos tipos de ábaco, as tabelas e réguas de cálculo. A calculadora deve ser entendida como uma das etapas mais avançadas de todo esse processo de desenvolvimento (GUELLI, 2000; BIGODE, 1998).

Atualmente, já não faz mais sentido afirmar que as calculadoras devem ser evitadas na sala de aula de matemática porque os alunos não iriam mais raciocinar nem se interessar em aprender a tabuada. Muitos deles têm acesso a essas máquinas desde muito cedo.

Segundo Bigode (1998), o uso da calculadora, para resolver cálculos trabalhosos, já era defendido por Malba Tahan, na década de 60. Entretanto, ainda hoje discutimos, na escola pública, se devemos ou não usá-la, enquanto nas escolas particulares, onde estudam as camadas da sociedade mais favorecidas economicamente, já são usados computadores há algum tempo.

Esse lado da questão também serve para mostrar que há implicações sociais e políticas no uso dos recursos didáticos. No livro *As Maravilhas da Matemática*, de Malba Tahan (1987), encontramos a lenda da origem do ábaco, uma forma primitiva de calculadora. Esse instrumento teria sido inventado pelos chineses por volta do século 20 a. C. por um mandarim que pretendia ajudar os camponeses no cálculo do valor das mercadorias que deveriam entregar ao imperador como pagamento de impostos. Como não havia o menor interesse, por parte do imperador, em permitir que o povo compreendesse o quanto pagava de impostos, mandou matar o matemático subversivo.

É possível fazer uma analogia entre essa lenda e o Brasil de hoje, uma sociedade dividida entreos que têm e os que não têm acesso aos bens culturais, e perceber que não há interesse, por parte daqueles que dominam, em instrumentalizar as camadas da população menos favorecidas

[1] Mestre em Educação – UFPE e professora de Matemática da SEE – PE.
E-mail: kmmed@ig.com.br

economicamente, com o conhecimento sobre como usar adequadamente os recursos tecnológicos. No caso da calculadora, a escola pública precisa cumprir essa tarefa, pois já não tem mais cabimento, hoje, simplesmente se proibir o uso dessa ferramenta em sala de aula.

Um dos argumentos contra o uso da calculadoraé de que esta inibe o raciocínio dos alunos. Entretanto, ao fazer contas com os algoritmos habituais também não há raciocínio, há uma repetição de procedimentos que, na maioria das vezes, o aluno decora sem entender o significado. Portanto, o problema não é usar ou não a calculadora, mas trabalhar os cálculos sem compreensão, sem dar significado aos mesmos para o aluno.

Outro argumento contra a calculadora é que ela não deve ser usada porque é proibida no vestibular e demais concursos. Usar a calculadora, no entanto, não impede os alunos de saberem calcular o necessário, desde que o professor não dispense seus alunos de um bom domínio da tabuada e uma boa compreensão das operações e que ele, sempre que possível, desenvolva atividades de cálculo mental com a turma. Por isso, é importante que, no contrato didático[2] estabelecido durante as atividades que envolvem a calculadora, o professor explicite para seus alunos que eles devem dominar a tabuada, os algoritmos das operações e disponham de estratégias de cálculo mental para chegar ao resultado. Essas condições vão enriquecer o uso da calculadora, porque o aluno vai usá-la de modo inteligente, para ganhar tempo e concentrar-se em aspectos do processo de cálculo que as máquinas não fazem. Mas, para isso, o papel do é decisivo, pois, como afirma Bigode,

(...)"*Cabe ao professor explorar por si as calculadoras e as atividades a elas associadas, propondo aos alunos situações didáticas*[3] *que os preparem verdadeiramente para enfrentar problemas reais. Preparar os alunos para enfrentar desafios cada vez mais complexos é obrigação do educador. Temos que ter os olhos no futuro para agir melhor sobre o presente. E nesse presente não há mais lugar para adestrar alunos a resolverem problemas ou executarem técnicas obsoletas* (BIGODE, 2000; p. 18).

Deve-se reconhecer que, no ensino tradicional, gasta-se muito tempo com mecanismos de cálculo ao invés de se ressaltar o significado dos cálculos. Atualmente, as propostas de ensino da matemática não mais consideram importante que os alunos façam cálculos excessivos, a chamada "calculeira". Ao invés disso, elas consideram fundamental que os alunos compreendam e relacionem os diversos ramos da matemática - os quadros[4], nos termos de DOUADY (1986, 1991) - e possam resolver problemas em diferentes situações.

A Resolução de Problemas Matemáticos com o Uso da Calculadora

Para explorarmos os diferentes quadros na resolução de um problema, é importante que o professor elabore problemas diferentes daqueles usuais ou *fechados*, nos termos de MEDEIROS (1999). Estes últimos, os problemas-padrão ou problemas clássicos usualmente trabalhados em sala de aula de matemática, limitam a criatividade do aluno, porque têm certas características que podem gerar verdadeiras regras de contrato didático.

Entre as características desses problemas fechados está o fato de poderem ser resolvidos pela aplicação de um ou mais algoritmos, sendo preciso encontrar a operação "certa" e realizá-la sem erro. Algumas palavras como ganhar, na adição, e perder, na subtração, permitem ao aluno "adivinhar" a operação a fazer, possibilitando ao aluno transformar a linguagem usual em linguagem matemática. Além disso, o problema vem, em geral, sempre após a apresentação de determinado conteúdo ou algoritmo; todos os dados necessários à resolução do problema se encontram no enunciado, raramente se encontrando dados inúteis. Os números e as soluções são simples; o contexto do problema, em geral, nada tem a ver com a realidade cotidiana. É sempre possível encontrar uma resposta para a questão matemática colocada por meio desses

[2] Segundo BROUSSEAU (1988), esse contrato é um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno e, também, um conjunto de comportamentos do aluno esperado pelo professor, durante o estudo de um conhecimento específico. Esse contrato se refere às regras que determinam explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada um deverá fazer. A cada novo conhecimento o contrato é renovado e renegociado. Na maior parte das vezes essa negociação passa desapercebida.

[3] A situação didática é, segundo BROUSSEAU (ibid), um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente os instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor), com a finalidade de conseguir que esses alunos se apropriem de um saber construído ou em vias de construção.

[4] Cada quadro pode ser interpretado como um ramo ou dimensão da matemática. Cada uma dessas dimensões do conhecimento matemático (como álgebra, geometria euclidiana, aritmética) pode ser vista como uma perspectiva de análise adotada para a resolução de um problema. A possibilidade de trabalhar com essas perspectivas nos permite considerar a noção de jogo de quadros ou mudança de quadros.

problemas, e o professor a conhece antecipadamente. Então, o aluno deve sempre encontrar uma solução que pode ser corrigida em caso de erro.

Essas características indicam, na maioria das vezes implicitamente, o que o professor e o aluno farão nessa atividade em que os problemas são tratados como uma coleção de exercícios variados. A tarefa do aluno é encontrar a solução esperada pelo professor e, para isso, ele precisa identificar a solução típica daquele problema. Esta situação pode levar o aluno a uma atitude de dependência, de memorização de conhecimentos. O professor considera que o aluno aprende por reprodução, isto é, basta resolver muitos desses problemas semelhantes a aquele recentemente feito para ele aprenda a resolver problemas com o conteúdo estudado.

Ao trabalhar com os problemas matemáticos em uma atividade diferente da usual, novas regras de contrato didático poderão ser estabelecidas. Nessa nova situação, os problemas serão preparados pelo professor e apresentados aos alunos de outra maneira. Os problemas abertos, que podem ser apresentados nessa nova atividade, podem ser uma alternativa para provocar rupturas no contrato didático.

Os problemas abertos se caracterizam por não terem vínculo com os últimos conteúdos estudados, evitando as regras de contrato didático já arraigadas. Por estarem em um domínio conceitual familiar, permitem que o aluno tenha condições de resolvê-los. E, sobretudo, por possuírem enunciado curto, os problemas abertos podem permitir ao aluno conquistar as primeiras idéias em um novo estudo. Isso pode dar a impressão, bem vinda, de que o problema é de fácil solução, fazendo com que o aluno se interesse em encontrá-la.

Um problema aberto também possui uma ou mais soluções. Além disso, ele pode ser trabalhado em grupo, evitando eventuais desencorajamentos, diminuindo o medo de não conseguir resolver, aumentando a chance de produção de conjecturas num intervalo de tempo razoável e possibilitando o surgimento de ricos conflitos sócio cognitivos. Esses conflitos ocorrem entre dois ou mais indivíduos, quando confrontam suas diferentes opiniões (ARSAC et al, 1991.; PERRET-CLERMONT,1992). O objetivo visado na "resolução" do conflito é conduzir os protagonistas a um progresso comum em relação ao conhecimento em jogo na situação.

Um problema aberto tem por objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas que nós chamaremos de"processo científico", ou seja, nele o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que for proposto como solução para o problema, implicando uma oposição aos problemas fechados.

A utilização de problemas não usuais ou *abertos*, exigirá do aluno uma postura diferente da que sempre observamos quando resolvem os problemas fechados, porque o próprio enunciado do problema não permite que ele encontre a resposta como de costume. Nesse momento, a calculadora poderá ajudá-lo a concentrar-se no processo de resolução ao invés de se preocupar com cálculos repetitivos.

Com a utilização da calculadora na resolução de problemas abertos, o aluno poderá compreender melhor o sentido dos problemas matemáticos escolares, uma vez que a falta de compreensão quanto ao significado da matemática estudada na escola é uma das grandes queixas dos alunos. "*A questão essencial do ensino da matemática é então: como fazer para que os conhecimentos ensinados tenham sentido para o aluno?*" (CHARNAY, 1996; p.38).

A calculadora pode ajudar nessa compreensão da matemática, principalmente se ela for usada para descibrir fatos e propriedades. Mas não somente nisso: (...) *O uso sensato das calculadoras contribui para a formação de indivíduos aptos a intervirem numa sociedade em que a tecnologia ocupa um espaço cada vez maior. Nesse cenário ganham espaço indivíduos com formação para a diversidade, preparados para investigar problemas novos, com capacidade para codificar e decodificar, se comunicar, tomar decisões, aprender por si. Todos esses atributos são necessários para a formação do homem de hoje, não importando se ele é marceneiro, metalúrgico, bancário ou empresário. Calculadoras e computadores são as ferramentas de nosso tempo. Vamos usá-las e dominá-las* (BIGODE, 2000; p.19).

O queprecisa ficar claro é em que momento introduzir o uso da calculadora e como tirar o máximo proveito desse instrumento, permitindo que o aluno o veja como elemento auxiliar do seu raciocínio, uma vez que agiliza os cálculos. Resultados apresentados por Duea, J. et al (1997) indicam que o número de acertos nos problemas cresce significativamente quando os alunos usam a calculadora.

Como a habilidade de resolver problemas está diretamente relacionada ao números de problemas resolvidos corretamente, a calculadora é um recurso importante. Com a calculadora, os alunos podem ficar atentos no processo de resolução de problemas, ao invés de se preocupaemr com cálculos longos e repetitivos. A calculadora enfatiza mais"o que fazer"do que "como fazê-lo", de modo que com seu uso o aluno pode estabelecer uma nova relação com o conhecimento matemático durante a resolução de problemas. Essa nova relação pode ser observada, por exemplo, quando o aluno utiliza a estratégia de supor e testar, uma abordagem viável para resolver muitos problemas, principalmente se se dispõe de uma calculadora. Além disso, os alunos poderão descobrir que, quanto mais usarem a abordagem de supor e testar, mais se tornarão hábeis em fazer suposições.

É possível resolver um problema de proporção utilizando a"regra de três", de modo que para resolver a proporção 11/44 = x/12, ensinava-se a multiplicar 11 por 12 e dividir o resultado por 44. Com uma calculadora, essa regra não só é eficaz como também viável para todos os problemas de proporção direta. Muitos procedimentos antigos ganham um novo significado quando a calculadora se torna um instrumento na resolução de problemas.

Atividades de resolução de problemas com dados reais podem ser trabalhadas com a calculadora. Os sistemas financeiros e administrativos do comércio, da indústria e dos serviços, já a utilizam há muito tempo, porque ela propicia rapidez e eficiência. Se usada na sala de aula, também poderá ser muito mais interessante para o aluno. Por exemplo, ao estudar o conceito de área com alunos da 5ª série, pode-se pedir que calculem a área da sala de aula onde estudam ou da quadra de esportes da escola. Com o uso da calculadora, esta tarefa torna-se bem mais prática, pois não precisamos"facilitar"usando decimais exatos ou números inteiros.

O professor precisa levar em conta, ao elaborar os problemas, que o raciocínio é fundamental e apenas a calculadora não bastará para resolvê-los.

Objetivos

Essa pesquisa teve como objetivos geral observar como as estratégias dos alunos se modificam quando eles passam a usar a calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Para atingi-lo, foi necessário:

- Identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas sem o uso da calculadora;
- Identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas com o uso da calculadora.

Metodologia

A fim de operacionalizar os objetivos propostos, trabalhamos, durante os meses de novembro e dezembro de 2000, com 26 alunos de uma classe de 6ª série de escola pública estadual de Pernambuco, que se situavam na faixa etária de 11 a 16 anos. A pesquisa foi realizada em duas etapas: na primeira, os alunos, em duplas, resolveram os problemas apresentados, em folha de papel ofício, sem o uso da calculadora. Na segunda, eles resolveram problemas com a mesma estrutura que os apresentados na primeira etapa, só que, nesse momento, com o auxílio da calculadora, pelo menos uma máquina para cada dupla. Foram oito sessões, cada uma com dois problemas.

Optamos pelo trabalho em duplas para tentar tirar melhor proveito da interação entre os alunos. Schubauer-Leoni (1994), destaca a importância da interação entre os indivíduos, que pode ocorrer no trabalho em grupo ou duplas, no ensino de matemática: "(...) *a noção de interação se relaciona com a noção de 'intersubjetividade', de 'interpretação' e até mesmo de 'negociação do sentido'. Assim, há finalidades e intenções inerentes às interações em função notadamente de sistemas de normas preexistentes e de se fazer em conjunto.*"" (...) *cooperar sobre um modelo da realidade coletiva*" (SCHUBAUER-LEONI , 1994, p.80).

Antes da pesquisa, foi feita uma atividade com os alunos, que tinha como objetivo ensinar como funcionava uma calculadora simples (aquela que apresenta as quatro operações, raíz quadrada, porcentagem e memória).

Nessas orientações, os alunos foram ensinados a calcular as quatro operações, potências (com expoente positivo), raíz quadrada, operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números decimais e a usar a memória para somar (M+) e para subtrair (M–).

Na **primeira etapa** foram apresentados os seguintes problemas:

1. Problema das horas

Um dia tem 24 horas. Quantas horas tem 7 dias? E um mês de 30 dias? E um ano?

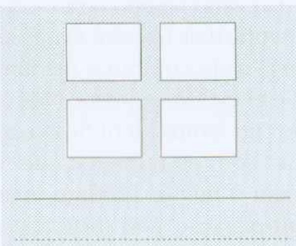
2. Problema das somas

Que números você eliminaria para tornar corretas as seguintes somas?

a) 42 + 65 + 18 = 107
b) 38 + 52 + 46 = 84
c) 53 + 47 + 38 = 85

3. Problema do produto mínimo

Coloque os números 9, 7, 4 e 1 nos quadrados abaixo de modo a obter o menor produto possível:



4. Problema da montanha-russa

Uma montanha-russa leva um grupo de 24 pessoas a cada 5 minutos. Quanto tempo você terá de esperar na fila, se há 72 pessoas à sua frente?

5.Problema das páginas

O produtc dos números de duas páginas de um livros é 40 x 41, ou 1.640. Onde você deveria abrir o livro para que o produto dos números das duas páginas fosse 12.656?

6. Problema da operação única 1

Partindo do número 734 faça uma única operação de cada vez, para obter os números:

534 744
1.734 300 3.470

7. Problema da soma e do produto

Qual é o par de números de soma 20 cujo produto é o maior possível?

8. Problema das aulas de violão

Em abril de 2000, a mãe de Cláudio pagou R$ 342,00, por suas aulas de violão. Ele teve aulas às segundas, quartas e sextas-feiras. Quanto custou cada aula?

Na **segunda etapa** foram apresentados os problemas a seguir, resolvidos com o uso da calculadora

9. Problema das horas no ano bissexto

Um dia tem 24 horas. Quantas horas tem 7 dias? E um mês de 29 dias? E um ano bissexto?

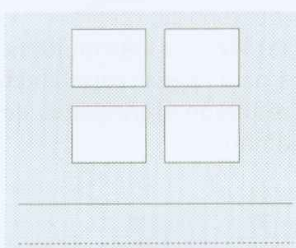
10. Problema das subtrações

Que números você eliminaria para tornar correta as seguintes subtrações:

a) 89 - 45 - 14 = 75
b) 456 - 258 - 78 = 198
c) 789 - 158 - 369 = - 527

11 Problema do produto máximo

Coloque os números 8, 6, 4 e 2 nos quadrados abaixo de modo a obter o maior produto possível:



12. Problema dos pastéis

Em uma lanchonete, a cada 25 pastéis de carne vendidos, vendem-se 9 de queijo. Num certo dia foram vendidos 50 pastéis de carne. Quantos pastéis de queijo foram vendidos nesse dia?

13. Problema do livro

O produto dos números de duas páginas de um livros é 65 x 66, ou 4.290. Onde você deveria abrir o livro para que o produto dos números das duas páginas fosse 13.572?

14. Problema da operação única 2

Partindo do número 532 faça uma única operação de cada vez, para obter os números:

832 132
1.032 32 983

15. Problema da diferença e o do produto

Qual o par de números naturais cuja diferença é 2 e cujo produto é o menor possível?

16. Problema das aulas de natação

Em setembro de 2000, Lúcia pagou R$ 372,00, por suas aulas de natação. Ela teve aulas às terças, quartas e sextas-feiras. Quanto custou cada aula?

Resultados

Após a realização da pesquisa, analisamos os problemas resolvidos pelas duplas ao longo das 16 sessões. Comparamos os resultados dos pares de problemas que tinham a mesma estrutura, o primeiro resolvido sem calculadora e, o segundo, resolvido com ela.

Verificamos que, no *problema das horas*, as respostas podiam ser enquadradas em um dos quatro tipos seguijntes:

(a) Uso do cálculo mental, pois apenas escreveram as respostas;

(b) Uso correto do algoritmo da multiplicação em cada resposta;

(c) Utilização do cálculo mental, mas só acertando a primeira resposta;

(d) Uso do algoritmo da multiplicação, corretamente nas primeiras respostas e errado na última.

Assim:

$$\begin{array}{r} 365 \\ \times\ 24 \\ \hline 1\,460 \\ 730 \\ \hline 8\,700 \end{array}$$

Talvez tenham confundido a soma com zero:

$6 + 0 = 6$

No *problema das horas no ano bissexto,* também identificamos quatro tipos de procedimento:

(a) Uso correto do algoritmo da multiplicação, em cada resposta.

(b) Usou corretamente o algoritmo no caso das horas de uma semana: *24 x 7 = 168,* depois somou com *69 (as horas de 29 dias),* o que deu 764, mas errou o cálculo do ano. Vejamos como estava registrado

$$\begin{array}{rll} 168 & \text{7 dias} & \\ +\ 696 & \text{1 mês} & \text{29 dias} \\ \hline 764 & \text{1 ano} & \end{array}$$

(c) Calcularam a primeira resposta usando a soma de parcelas iguais: *24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 168.* Não calcularam a segunda resposta e calcularam a terceira resposta corretamente, com o algoritmo da multiplicação.

Este problema foi resolvido com a calculadora. Houve um índice de acertos de 60% nesta questão, maior que os 39% do *problema das horas.*

No *problema das soma,s* identificamos dois tipos de resposta:

(a) Resolveram com cálculo mental, apenas marcando, corretamente, o número eliminado;

(b) Somaram os dois números que tornavam correta a igualdade, escrevendo a soma ao lado, em cada item. A seguir marcaram o número eliminado.

Esses procedimentos produziram 100% de acertos

Quando passamos a analisar o que ocorreu no *problema das subtrações,* observamos os seguintes tipos de resposta:

(a) Marcaram o número eliminado corretamente, nos três itens.

(b) Marcaram o número eliminado corretamente, no primeiro item.

(c) Marcaram o número eliminado corretamente, no primeiro e terceiro itens.

O erros nesta questão podem ser devidos à dificuldade com a subtração. Apesar de ter a mesma estrutura do problema das somas, a mudança nos sinais, pode causar algum embaraço aos alunos, mesmo com a calculadora

No problema do *produto mínimo,* pudemos identificar seis tipos de resposta:

(a) Fizeram três multiplicações para chegar corretamente ao resultado escritos nos quadradinhos.

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times\ 97 \\ \hline 287 \\ 369 \\ \hline 3\,977 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 94 \\ \hline 68 \\ 153 \\ \hline 1\,598 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 49 \\ \hline 153 \\ 68 \\ \hline 833 \end{array}$$

(b) Dispuseram os números no quadrado corretamente, mas não escreveram o resultado:

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 49 \\ \hline \end{array}$$

(c) Dispuseram os números nos quadrados, mas sem a preocupação de encontrar os menores produtos e não concluíram algumas das multiplicações;

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times\ 14 \\ \hline 316 \\ 79 \\ \hline 1\,106 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ \times\ 41 \\ \hline 97 \\ 388 \\ \hline 388 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ \times\ 17 \\ \hline 658 \\ 94 \\ \hline 1\,598 \end{array}$$

(d) Não responderam corretamente, mas fizeram várias tentativas para combinar os números e chegar à resposta. Nos cálculos pudemos identificar a operação com os números que fornecem o menor produto, mas a multiplicação não foi realizada corretamente.

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times\ 14 \\ \hline 286 \\ 79 \\ \hline 1\,076 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ \times\ 19 \\ \hline 423 \\ 47 \\ \hline 893 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 94 \\ \times\ 17 \\ \hline 658 \\ 94 \\ \hline 1\,598 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 49 \\ \hline 58 \\ 153 \\ \hline 1\,588 \end{array}$$

(e) Dispuseram os números nos quadrados, tentaram encontrar os menores valores, mas concluíram a multiplicação após apenas duas tentativas e:

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 79 \\ \hline 129 \\ 98 \\ \hline 1\,109 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 79 \\ \hline 129 \\ 98 \\ \hline 1\,109 \end{array}$$

(f) Não responderam corretamente, mas recorreram a várias tentativas para combinar os números e chegar à resposta. Nos cálculos não pudemos identificar a operação com os números que fornecem o menor produto:

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times\ 91 \\ \hline 74 \\ 1686 \\ \hline 750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 17 \\ \hline 99 \\ 19 \\ \hline 118 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 49 \\ \hline 18 \\ 68 \\ \hline 86 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times\, 41 \\ \hline 79 \\ 306 \\ \hline 3139 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 71 \\ \times\, 94 \\ \hline 284 \\ 289 \\ \hline 574 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\, 79 \\ \hline 96 \\ 83 \\ \hline 179 \end{array}$$

Apenas nos alunos que deram respostas dos tipos (a) (b) e (c), pudemos perceber uma melhor compreensão do sentido do problema, com a busca dos menores valores. Ao passarmos à análise do *problema do produto máximo*, que foi resolvido com o auxílio da calculadora, observamos uma redução no número de respostas, que foram:

(a) Escreveu a resposta correta, dispondo os números nos quadrados, mas sem indicar como chegou a ela.

1	7
4	9

833

(b) Dispôs os números nos quadrados, mas não encontrou a resposta correta.

8	2
6	4

5 248

6	4
8	2

5 248

8	4
6	2

495

Neste problema, houve, também, um alto índice de acertos, 77%, bem superior aos 15% ocorridos no *problema do produto mínimo*, que foi resolvido sem calculadora.

No *problema da montanha-russa*, identificamos os seguintes tipos de resultado:

(a) Multiplicaram 72 por 5: *72 x 5 = 360*

(b) Apenas escreveram "15 minutos".

(c) Fizeram: *24 + 24 + 24 = 72.*

(d) Fizeram*"195 – 72 = 153 minutos".*

(e) Escreveram apenas *"30 minutos".*

54% das duplas responderam corretamente da forma (b), supostamenteo utilizando o cálculo mental. Percebe-se aqui que o aluno parece compreender o significado do problema, mas tem dificuldade em usar a ferramenta matemática adequada para resolvê-lo. Isso pode ocorrer porque ele pode compreender o significado antes de ter a ferramenta, mas depois é preciso trabalhar a aquisição desta. Podemos dizer que, nesse caso, essa aquisição não foi consolidada.

Os alunos que resolveram de acordo com as notações classificadas como (a) (c) (d) e (e) tentaram usar os números do enunciado de várias formas para resolver o problema, uma atitude muito comum na resolução de problemas fechados.

No *problema dos pastéis*, identificamos as seguintes formas de notação:

(a) Apenas udeu a resposta, talvez tilizando o cálculo mental.

(b) Escreveu a multiplicação: *25 x 2 = 5* e depois: *9 x 2 = 18.*

(c) Escreveu a multiplicação *9 x 2 = 18* e depois escreveu a resposta*"18 pastéis".*

Com o uso da calculadora ocorreram 100% de acertos, e um número menor de formas de apresentação das soluções. O fato de o problema poder ser resolvido com a noção de dobro pode ter facilitado mais a compreensão do que no problema da *montanha-russa* e aumentado o número de acertos. A calculadora pode ter servido para confirmar aquilo que o aluno poderia ter resolvido mentalmente.

Quando verificamos as respostas ao *problema das páginas* identificamos os seguintes procedimentos:

(a) Multiplicar 112 por 113 :

(b) Multiplicou 112 por 113, mas não forneceuu o resultado da multiplicação:

(c) Multiplicou 112 por 113 e ncontrou 12.656, mas havia vários rascunhos atestando diferentes tentativas:

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\, 112 \\ \hline 222 \\ 222 \\ 111 \\ \hline 13542 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ \times\, 120 \\ \hline 111 \\ 222 \\ 111 \\ \hline 13431 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110 \\ \times\, 119 \\ \hline 990 \\ 110 \\ 110 \\ \hline 13090 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times\, 113 \\ \hline 336 \\ 112 \\ 112 \\ \hline 12656 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110 \\ \times\, 112 \\ \hline 220 \\ 110 \\ 110 \\ \hline 12320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 105 \\ \times\, 110 \\ \hline 105 \\ 105 \\ 105 \\ \hline 11655 \end{array}$$

Encontramos 95% de acertos na resolução deste problema. A busca da solução por meio de sucessivas tentativas foi a estratégia predominante e a que levou à resposta correta. Ao passarmos à análise do *problema do livro*, que tem a mesma estrutura, verificamos 100% de acertos e a utilização de um único tipo de registro, que foi escrever a resposta correta. Nesse problema, a calculadora agilizou as respostas, pois o tempo para responder foi menor que no *problema das páginas*.

No *problema da operação única 1*, no qual é possível obter uma solução rápida e eficiente combinando o cálculo mental ao uso da calculadora, os alunos apresentaram as seguintes resoluções

(a) Escreveram cada operação no papel com os resultados, mas as duas últimas não estavam corretas:

$$\begin{array}{r} 734 \\ -200 \\ \hline 534 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ -10 \\ \hline 744 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ +10 \\ \hline 744 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1734 \\ -1000 \\ \hline 0734 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300 \\ -600 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3470 \\ -0844 \\ \hline 3434 \end{array}$$

(b) Escreveram cada operação no papel com os resultados e todos estavam corretos:

$$\begin{array}{r} 734 \\ -200 \\ \hline 534 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ +10 \\ \hline 744 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1734 \\ +1000 \\ \hline 1734 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ +2736 \\ \hline 3470 \end{array}$$

(c) Só fizeram as duas primeiras operações e só a segunda estava correta:

$$\begin{array}{r} 734 \\ -200 \\ \hline 634 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ +10 \\ \hline 744 \end{array}$$

(d) Fizeram todas as operações com os resultados errados:

$$\begin{array}{r} 534 \\ -1000 \\ \hline 534 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 744 \\ -010 \\ \hline 744 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1734 \\ -1468 \\ \hline 1734 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ -600 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3470 \\ -0844 \\ \hline 3434 \end{array}$$

(e) Não interpretaram corretamente o enunciado do problema e, por isso, não organizaram corretamente a resolução.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -200 \\ \hline 634 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 734 \\ +10 \\ \hline 744 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1734 \\ -734 \\ \hline 6394 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ -734 \\ \hline 000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3470 \\ -0734 \\ \hline 0130 \end{array}$$

Só com as duplas que produziram os registros (b) ocorreram acertos significatiyos, o que correspondeu a 23%do total de duplas. Um índice de acertos bastante inferior ao do obtido no *problema da operação única 2*, que foi de 90%. Mas deve-se levar em conta que, neste caso, os números eram menores. As soluções neste problema foram::

(a) Obteve as respostas corretas e escreveu os cálculos no papel:

$$\begin{array}{r} 532 \\ +300 \\ \hline 832 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 532 \\ -400 \\ \hline 132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 532 \\ +500 \\ \hline 1032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 532 \\ -500 \\ \hline 032 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 532 \\ +451 \\ \hline 983 \end{array}$$

(b) Apenas escreveu as respostas.

(c) Obteve as respostas erradas e escreveu os cálculos no papel.

$$\begin{array}{r} 832 \\ -132 \\ \hline 700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ -832 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1032 \\ -132 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ -1032 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 938 \\ -451 \\ \hline 532 \end{array}$$

Uma solução rápida e eficiente nesse problema é possível de se obter combinando o cálculo mental com o uso da calculadora.

No *problema da soma e do produto* ocorreram 100% de acertos. Foram apresentados dez diferentes tipos de soluções, todas usando tentativas.

Ao observarmos os resultados do *problema da diferença e do produto* identificamos os seguintes registros:

(a) $2 - 0 = 2$ $\quad$ $2 \times 0 = 0$
$\quad 3 - 1 = 2$ $\quad$ $3 \times 1 = 3$

(b) $2 - 0 = 2$ $\quad$ $2 \times 0 = 0$

(c) $2 - 0 = 2$

Em 54% das respostas foram utilizados os modelos (a) ou (b) .

Esse resultado, mesmo com o uso da calculadora, pode ser devido à dificuldade com a idéia de trabalhar com a diferença. O aluno tem maior facilidade de compreender quando se trata da soma do que quando o trabalho é com a subtração.

No *problema das aulas de violão*, não ocorreram acertos em qualquer das duplas observadas. As estratégias identificadas mostram, em sua maioria, que o aluno sabia como fazer, mas não não acertava os cálculos, ou então tentava juntar os números do enunciado, como é muito comum na resolução de problemas fechados. Isso apesar de, em nossas atividades com problemas, enfatizarmos, explicitamente, que essa não é uma estratégia adequada, mas que é preciso ler e interpretar o problema para resolvê-lo adequadamente. No *problema das aulas de natação*, resolvido com a calculadora, pudemos identificar um menor número de soluções, que foram:

(a) Multiplicou 372 por 12:

$$\begin{array}{r} 372 \\ \times\ 12 \\ \hline 744 \\ 372 \\ \hline 4464 \end{array}$$

(b) Dividiu 372 por 13:
3 7 2 ÷ 1 3 = 28,6

(c) Dividiu 372 por 12 e encontrou a resposta correta:

3 7 2 ÷ 12 = 31

(d) Dividiu 372 por 3:

$$\begin{array}{l|l} 372 & 3 \\ \cline{2-2} 07 & 124 \\ 12 & \\ (0) & \end{array}$$

Neste problema houve um índice de acertos de 15%. Percebemos, pela análise dos registros dos alunos que estes tiveram dificuldade em interpretar ambos osproblemas, o que não lhes permitiu chegar à resposta correta. O uso da calculadora no *problema das aulas de natação* permitiu um acerto de 15%, que não ocorreu no *problema das aulas de violão,* nas quais os alunos interpretaram o problema corretamente, mas erraram os cálculos.

Conclusão

A análise dos registros dos alunos permitiu perceber que o número de respostas corretas aumenta com o uso e que utilizam um número pequeno de estratégias na resolução de problemas, sendo a mais comum a de tentativas, o processo de supor e testar..

A estratégia de supor e testar esteve muito presente nos *problemas do produto mínimo, do produto máximo, das páginas, do livro, da soma e do produto* e *da diferença e do produto.* A própria estrutura do problema"requer"essa postura do aluno e a calculadora agiliza as tentativas, permitindo que o aluno se concentre mais no processo de resolução do que na realização de cálculos repetitivos.

Por outro lado, o número de tentativas é maior quando os alunos não usam a calculadora, embora o número de acertos diminua. Isso deve ocorrer porque, sem a calculadora, o aluno precisa de mais tentativas para confirmar sua hipótese de solução, enquanto que com o uso da calculadora esta serve para confirmar mais rapidamente sua hipótese, diminuindo a necessidade de várias tentativas. Isso também pode significar que a quantidade de tentativas está associada à dificuldade de calcular corretamente.

É muito comum se justificar o mau desempenho dos alunos na resolução de problemas pela sua dificuldade de compreender o enunciado, de interpretá-lo. Os resultados dessa pesquisa mostram, em sua maioria, que, quando comparamos problemas com a mesma estrutura feitos com e sem a calculadora, épossível verificar a veracidade desta afirmativa: quando os alunos passaram a usar a calculadora, o número de acertos cresceu significativamente.

O fato de o aluno poder até entender o sentido do problema, mas ter dificuldade para calcular, por causa de deficiências na aquisição das ferramenta de cálculo, fica bem ilustrado nos registros referentes ao *problema das aulas de violão:* estes mostraram que 38% dos alunos erraram os cálculos, apesar de terem interpretarado corretamente o problema.

Isso, contudo, mostra mais do que a dificuldade em efetuar os cálculos, pois o aluno, se compreendesse melhor o funcionamento das técnicas de cálculo, poderia utilizar diferentes procedimentos para contornar sua dificuldade de calcular. Esses resultados sugerem, então, que nessa turma as técnicas de cálculo precisam ser mais trabalhadas. O fato de, desde o mês de fevereiro, quando iniciaram as aulas, cada aluno ser, uma vez por semana, indagado sobre a tabuada, e de o cálculo mental ter sido trabalhado durante dois meses antes dessa pesquisa, parece não ter sido suficiente. Talvez seja necessário até retomar os significados das operações.

Estamos supondo, neste trabalho, que, nos problemas a serem resolvidos sem a calculadora, o cálculo mental tenha sido utilizado pelo aluno sempre que no seu registro aparecia somente o resultado da questão, sem quaiquer indícios do procedimento utilizado ou de tentativas efetuadas. No entanto, não podemos garantir que esse tipo de procedimento tenha sido, na verdade, empregado pelo aluno.

A análise dos registros mostrou que persistem ainda resquícios das regras de contrato didático usuais, pois observamos, em muitos problemas, os alunos tentando juntar, de qualquer jeito, os números do enunciado em uma operação. Para evitar isso, a escolha do problema é muito importante, se queremos um novo posicionamento do professor em relação ao aluno, ao conhecimento e também do aluno em relação ao problema, ou seja, se queremos estabelecer um novo contrato didático.

Finalmente, podemos concluir que a calculadora contribuiu para agilizar a resolução dos problemas abertos, possibilitando uma melhor utilização da estratégia de tentativa e erro e potencializando o cálculo mental.

Referências Bibliográficas

ARSAC, G., GERMAIN, G; MANTE, M. *Probleme ouvert et situation-problème*. Lyon (França): Presses Universitaires de Lyon, 1991.

__________.*Introduction au rasionement deductive*. Lyon: IREM de Lyon, 1992.

BIGODE, A.J.L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le mileu. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, v. 3, n. 9, 1988, p. 309-336.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas In: PARRA, C. (Org.) *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

DOUADY, R. *Jeux des cadres et dialectique outil-objet*. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, v. 7, n. 2, 1986, p. 5-31.

__________. Tool, seeting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. In: BISHOP, A. J. et al *Mathematical knowledge: its growth through teaching*.. Kluwer Academic Publishers. Netherlands, 1991.

__________.Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. *Em Aberto:* Tendências em Educação Matemática. Brasília: 1994, p.33-42.

DUEA, J. et al. Resolução de problemas com o uso da calculadora. In: KRULIK, R., REYS, R.E. (Org.) *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

MEDEIROS, K.M. *O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula*. (Dissertação de mestrado). 211p. Recife: UFPE, 1999.

PERRET-CLERMONT, A.N. Transmiting knowledge: implicit negotiations in the student-teacher relationship. In: OSER, F. K. ; DICK, A & PATRY, J.L. (Eds). *Effective and responsible teaching, the new synthesis*. San Francisco: Jossey-Bass Publisheres. 1992.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. *Comunications cognitives dans l'interaction:* la construction interactive du quotidien. Nancy (França): Presses Universitaires deNancy, 1994.

TAHAN, M. *As maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.