ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design

Promoting Students' Mathematical Reasoning: a design-based research

Joana Mata-Pereira*

ORCID iD 0000-0002-3446-014X

João Pedro da Ponte**

ORCID iD 0000-0001-6203-7616

Resumo

O modo de promover o raciocínio matemático dos alunos é uma questão importante, mas pouco investigada. Este artigo apresenta o primeiro ciclo de intervenção de uma investigação baseada em design (IBD) sobre a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Tem por objetivo compreender de que modo um conjunto de princípios de design referentes às tarefas a propor e às ações do professor na sala de aula pode contribuir para promover o raciocínio matemático dos alunos. A análise de dados tem por base estes princípios de design e centra-se, essencialmente, nos processos de raciocínio dos alunos de generalizar e justificar e nas ações do professor de convidar, guiar, sugerir e desafiar. Os resultados sugerem que os princípios de design contribuem para que os processos de raciocínio dos alunos se evidenciem nos momentos de discussão coletiva de tarefas de natureza exploratória.

Palavras-chave: Raciocínio matemático. Ações do professor. Generalização. Justificação. Investigação Baseada em Design.

Abstract

How to enhance students' mathematical reasoning is an important but little researched issue. This article presents the first intervention cycle of a design-based research about enhancing students' mathematical reasoning. It aims to understand how a set of design principles concerning the tasks proposed and the teacher's actions in the classroom may contribute to enhance students' mathematical reasoning. Data analysis is based on those design principles and focus on students' reasoning processes of generalizing and justifying and on the teacher's actions of inviting, guiding, suggesting and challenging. The results suggest that the design principles contribute for reasoning processes to emerge on moments of whole class discussions of exploratory tasks.

Keywords: Mathematical reasoning. Teacher's actions. Generalization. Justification. Design-Based Research.

1 Introdução

* Doutora em Educação, especialidade de Didática da Matemática, pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. Assistente convidada do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda da Universidade, Lisboa, CEP: 1649-013. E-mail: jmatapereira@ie.ulisboa.pt.

** Doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia, EUA. Professor catedrático da Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda da Universidade, Lisboa, CEP: 1649-013. E-mail: jpponte@ie.ulisboa.pt.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é, sem dúvida, um dos grandes objetivos da Matemática escolar. Contudo, é reduzida a informação e investigação sobre os modos como o professor pode contribuir para desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos (BRODIE, 2010). Para que o professor possa promover o raciocínio matemático na sala de aula, é, antes de mais, necessário um conhecimento sobre o próprio raciocínio matemático e os processos de raciocínio dos alunos. No entanto, este conhecimento, ainda que fundamental, é insuficiente para o professor.

Por um lado, é necessário saber quais as tarefas apropriadas ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Por outro lado, é imprescindível considerar a própria prática profissional do professor, nomeadamente saber quais as ações de ensino que melhor apoiam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Atendendo à escassa investigação nesta área, o estudo que aqui apresentamos pretende contribuir para a construção de princípios orientadores para a promoção do raciocínio matemático dos alunos. Seguindo a modalidade de investigação baseada em design (COBB et al., 2003), estrutura-se uma intervenção com o objetivo de promover o raciocínio matemático dos alunos através da proposta de tarefas e de ações do professor focadas no raciocínio matemático. Assim, este artigo tem por objetivo compreender de que modo os princípios de design promovem o raciocínio matemático dos alunos. Para tal, descrevemos e analisamos o primeiro ciclo de intervenção numa unidade de ensino sobre sequências, no 8.º ano de escolaridade.

2 Raciocínio matemático

Um dos pontos fundamentais para promover o raciocínio matemático dos alunos é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e quais os processos de raciocínio a desenvolver nos alunos. Assumimos que raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas (e.g. ALISEDA, 2003; BROUSSEAU & GIBEL, 2005; OLIVEIRA, 2008; PÓLYA, 1954; RIVERA & BECKER, 2009), ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões. Pela sua abrangência, esta definição de raciocínio acomoda diversas perspectivas sobre o raciocínio matemático, nomeadamente inferências dedutivas, indutivas e abdutivas.

As inferências dedutivas são caracterizadas por dois aspectos centrais: (i) a certeza, que diz respeito à relação necessária entre as premissas e a conclusão e (ii) a irrefutabilidade das conclusões, que determina que não existem dúvidas quanto à validade das conclusões

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

(ALISEDA, 2003). As inferências indutivas surgem frequentemente associadas a processos como a generalização, identificando uma propriedade, conceito ou ideia de uma classe alargada de objetos matemáticos (PÓLYA, 1954; RUSSEL, 1999). As inferências abdutivas consistem em hipóteses razoáveis sobre um determinado fenômeno (RIVERA & BECKER, 2009). Estas hipóteses partem de relações entre diversos fenômenos que se cruzam numa determinada situação, sendo utilizadas para explicar algo intrigante (ALISEDA, 2003). Nas perspectivas indutiva e abdutiva, as inferências advêm de percepções que emergem de explorar conceitos e ideias matemáticas a níveis práticos e intuitivos (GALBRAIT, 1995). Assim, raciocinar matematicamente não se limita ao raciocínio lógico ou demonstrativo, incluindo também processos intuitivos, a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões.

O raciocínio matemático envolve uma variedade de processos de raciocínio que incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjecturas e a justificação (LANNIN, ELLIS & ELLIOT, 2011). Destes processos, destaca-se a formulação de generalizações (enquanto conjecturas com características próprias) e a justificação como processos de raciocínio fundamentais.

Por um lado, a Matemática pretende fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos que se pretendem válidos para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas, sendo a generalização o processo de raciocínio envolvido. Por outro lado, a justificação é central para que seja possível validar matematicamente tais afirmações. A formulação de generalizações relaciona-se sobretudo com os raciocínios indutivo e abdutivo, enquanto a justificação se relaciona essencialmente com o raciocínio dedutivo.

3 Tarefas

No ensino da Matemática e, particularmente, para o desenvolvimento do raciocínio matemático, as tarefas propostas constituem um dos aspectos centrais para o sucesso dos alunos. São especialmente relevantes os tipos de tarefa em que os alunos se envolvem, os modos como se envolvem e as interações que podem surgir em torno dessas tarefas (BRODIE, 2010).

Vários estudos identificam a resolução de problemas e as tarefas de exploração e investigação como potencializadoras do desenvolvimento do raciocínio matemático (e.g., AZEVEDO, 2009; FRANCISCO & MAHER, 2011; HENRIQUES, 2010). Boavida et al. (2008) sugerem tarefas que facilitem o envolvimento dos alunos em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, ou seja, tarefas que promovam a resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação. Segundo as autoras, tais

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

tarefas proporcionam uma “visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio [matemático]” (BOAVIDA et al., 2008, p. 7).

Henriques (2010), na sua investigação com alunos do Ensino Superior, destaca particularmente as potencialidades das tarefas de exploração e investigação na aprendizagem dos alunos, não só ao nível dos conceitos e procedimentos, como também no desenvolvimento de capacidades como o raciocínio matemático. Complementarmente, como refere Brodie (2010), tarefas que promovam resultados diversos ou representações várias, que culminem em desacordos e desafios ou que deem aos alunos “oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar” (p. 47) são também propensas ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Com o intuito de envolver os alunos na resolução das tarefas propostas, Brodie (2010), refere que não é desejável que todas elas sejam de nível de exigência elevado. Tal exigência, além de não ser exequível em períodos limitados de tempo, poderia promover desmotivação e desinteresse por parte de muitos alunos. Por um lado, é desejável que sejam propostas aos alunos tarefas desafiantes, pois tal desafio incita o raciocínio matemático. Por outro lado, é igualmente importante que sejam propostas tarefas com um nível de desafio reduzido, para que os alunos se envolvam nas tarefas propostas. Deste modo, o nível de desafio de uma tarefa deve ser considerado na sua construção, atendendo aos alunos a quem a tarefa é proposta. Adicionalmente, a articulação entre tarefas com diferentes níveis de exigência e de desafio é essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Ainda que se possam construir ou propor as mais variadas tarefas aos alunos, não existe uma garantia que estas conduzam necessariamente ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Para isso é fundamental promover interações em sala de aula que incitem os alunos a explorar, apresentar e discutir processos de raciocínio.

No entanto, é importante ter presente que os alunos apresentam muitas vezes dificuldades em responder a tarefas que envolvem o raciocínio matemático por não estarem “habituados a ‘explorar’ as tarefas tanto quanto [possam]” (BRODIE, 2010, p. 55). Tarefas de natureza exploratória podem promover “uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação (...) [facilitando] o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas” (HENRIQUES, 2010, p. 373), incentivando alterações positivas nas atitudes dos alunos face à Matemática. Assim, é importante persistir no desafio de construir e propor tarefas de natureza variada, pois as tarefas de exploração, bem como a resolução de problemas,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

parecem trazer aos alunos situações que conduzem ao desenvolvimento do raciocínio matemático e à compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos.

4 Ações do professor

Mesmo considerando tarefas de natureza exploratória ou problemas, a sua realização em sala de aula precisa ser conduzida de modo a que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático. Neste contexto, as ações do professor surgem como um aspecto complementar e igualmente central para promover o raciocínio matemático dos alunos. No entanto, tal como a construção e seleção de tarefas a propor é um processo desafiante e complexo, “seria desonesto fingir que as abordagens de ensino [que promovem o raciocínio matemático] são fáceis ou bem compreendidas” (BOALER, 2010, p. v).

Uma das ações do professor fundamental para promover o raciocínio matemático dos alunos é o questionamento. De acordo com o NCTM (2009), o professor deve resistir ao impulso de dar indicações para a resolução de tarefas e problemas, tentando apoiar o raciocínio e o trabalho do aluno. Se o professor apresenta demasiadas indicações aos alunos e não os desafia, a resolução da tarefa é simplificada e não apoia o desenvolvimento do raciocínio (BRODIE, 2010). Contudo, o professor também não deve deixar os alunos a trabalhar, individualmente ou em grupo, sem qualquer mediação, pois esta situação “não traz necessariamente apoio suficiente para desenvolver o seu raciocínio” (BRODIE, 2010, p. 20). Pelo seu lado, o NCTM (2009, p. 11) refere que o professor deve: (i) “pedir aos alunos que reformulem o problema usando as suas próprias palavras” e (ii) “colocar questões aos alunos que promovam o aprofundamento do seu pensamento, por exemplo, ‘porque é que isso funciona?’ ou ‘como é que sabes?’”. Bell (2011) destaca ainda que o professor deve incentivar os alunos a dar sentido a justificações, pedir justificações alternativas, salientar o que valida uma justificação e enfatizar a explicação do “porquê”.

Brodie (2010) indica que os alunos tendem a esperar certos tipos de perguntas por parte do professor. Se as perguntas são habitualmente mais provocatórias, os alunos esperam ter que dar respostas mais complexas e que envolvam processos de raciocínio. Para além do questionamento, o professor pode ainda empreender outras ações tendo em vista a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio. Brodie (2010) refere que o professor deve incentivar os alunos a ouvir os colegas e a construir sobre as ideias dos outros, eventualmente colocando também os seus desafios. A autora salienta ainda que, além de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

encorajar os alunos a comunicar e partilhar as suas ideias, o professor deve também incentivá-los a escrever e partilhar várias versões do seu raciocínio.

Wood (1999) destaca ainda que o professor deve criar e explorar situações de desacordo entre os alunos, pelas suas potencialidades, para o desenvolvimento da capacidade de argumentação e, consequentemente, do raciocínio matemático. Para que a discussão e reflexão sobre as tarefas propostas seja promotora tanto do raciocínio matemático, quanto da aprendizagem é também importante que, por um lado, se aceitem, valorizem e integrem as contribuições incorretas ou parciais dos alunos e, por outro lado, se alarguem e explorem as suas contribuições corretas (BRODIE, 2010).

Durante a discussão e reflexão sobre as tarefas propostas, devem ainda ser consideradas outras ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, particularmente direcionadas para os processos de raciocínio em si mesmos. Quanto à justificação, Brodie (2010) refere que o professor não deve apenas solicitar justificações aos alunos, mas também justificar as suas próprias ideias. Por outro lado, e de acordo com Galbrait (1995), os professores têm, tipicamente, dificuldades em ensinar processos de raciocínio mais formais, nomeadamente a justificação formal ou a demonstração. A abordagem do professor à demonstração passa recorrentemente por quatro fases: (i) discutir demonstrações completas, (ii) indicar quais os aspectos lógicos a considerar, deixando as justificações para os alunos, (iii) fazer uma demonstração e (iv) levar os alunos a fazer uma demonstração que use, essencialmente, a mesma estrutura lógica da que fez anteriormente.

Contudo, outras abordagens podem mostrar-se mais eficazes na aprendizagem de processos de raciocínio próximos da demonstração, nomeadamente, a justificação como atividade coletiva promovida no âmbito da discussão das tarefas propostas pelo professor, na qual os alunos têm “oportunidades para partilhar, debater e clarificar [o seu raciocínio]” (GALBRAIT, 1995, p. 416). Nesta situação, como refere Brodie (2010, p. 19), considerar argumentos de colegas “pode ser uma fonte poderosa de desenvolvimento do raciocínio e argumentos do aluno”. Ao moderar a discussão, e sempre que se mostre pertinente, o professor deve enfatizar quais as características de uma justificação para esta ser considerada válida. Por exemplo, em situações em que os alunos se convençam que uma determinada afirmação é verdadeira, baseando-se em raciocínios indutivos com um número limitado de casos particulares, cabe ao professor destacar que tal raciocínio pode não constituir uma justificação aceitável. Neste sentido, é importante que as tarefas propostas que levam a esta ação por parte do professor incluam justificações aceitáveis e não aceitáveis baseadas em raciocínios indutivos. Coffland (2012) indica que esta ação, ainda que possa não ser suficiente para eliminar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

todos os vestígios de raciocínios indutivos indevidamente justificados, pode proporcionar alguma experiência necessária para desenvolver justificações apropriadas.

Ainda no âmbito das discussões e sínteses finais de tarefas propostas aos alunos, é importante salientar que o planejamento destas situações é fundamental, pois permite ao professor estabelecer objetivos claros para a discussão e síntese que podem alargar a exploração das tarefas à formulação de novas questões ou conduzir a novas tarefas promotoras do raciocínio matemático (HENRIQUES, 2010).

5 Metodologia de investigação

5.1 Opções metodológicas, participantes e recolha de dados

Tendo por objetivo a construção de uma teoria local sobre a promoção do raciocínio matemático em sala de aula, este estudo segue uma metodologia de investigação baseada em design (IBD, *design-based research*) com ciclos de intervenção e revisão (COBB et al., 2003; PONTE et al., 2016). Optar por uma IBD permite introduzir alterações à prática em sala de aula que decorrem de combinar e recombinar elementos da investigação, no sentido de promover uma abordagem útil e efetiva no contexto específico em que a investigação se desenvolve (WOOD & BERRY, 2003).

O primeiro ciclo de intervenção, ao qual este artigo diz respeito, é realizado numa turma de 8.º ano de uma professora com 13 anos de serviço, convidada pela sua experiência e empenho em melhorar a sua prática profissional. A turma tem 30 alunos, sendo que 2 estão em situação de abandono escolar, pelo que não são considerados neste estudo. Dos 28 alunos que frequentam as aulas, 16 são raparigas e 12 são rapazes e, de acordo com a professora, 7 alunos têm muito bom desempenho na disciplina, 13 têm um desempenho regular e 8 têm algumas dificuldades.

Na turma existe um ambiente de trabalho muito produtivo, ainda que a professora refira que existe uma disparidade entre o trabalho desenvolvido pelos melhores alunos e pelos alunos com mais dificuldades. A planificação das aulas da intervenção resulta do trabalho conjunto entre a primeira autora e a professora e as aulas são, posteriormente, lecionadas exclusivamente pela professora. A recolha de dados neste ciclo de investigação ocorre nas reuniões de preparação de aulas com a professora da turma e na sala de aula. Todos os momentos são vídeo e áudio gravados e complementados com registos em diário de bordo. A utilização destes processos de recolha de dados tem por objetivo reconhecer e fundamentar as ações da

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

professora em sala de aula, bem como atentar aos processos de raciocínio matemático dos alunos.

5.2 Princípios de design e conjetura da IBD

Um dos pontos centrais na IBD é a definição dos princípios de design subjacentes à intervenção. Considerando o objetivo de estudo e o seu foco nas ações do professor, parte destes princípios referem-se a este aspecto da prática profissional do professor de Matemática, sendo que os demais se referem às tarefas a propor aos alunos. Os princípios de design são ainda enquadrados pelo ensino exploratório, partindo do pressuposto de que este ensino pode proporcionar aos alunos momentos favoráveis ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Considerando a que se pretende uma atividade dos alunos marcada pelo ensino exploratório, a planificação da aula considera momentos de introdução da tarefa, de trabalho autônomo, acompanhado pelo professor, e momentos de discussão coletiva e síntese. Entre estes momentos, é de destacar a discussão coletiva, com grande potencial para promover a aprendizagem (PONTE, 2005) e também o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. A discussão, muitas vezes desencadeada pela realização de tarefas desafiantes, pode incluir a apresentação pelos alunos de uma variedade de respostas inesperadas.

Assim, cabe ao professor articular estas respostas e promover uma discussão que leve os alunos a uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas envolvidas (STEIN et al., 2008). Neste sentido, são determinantes tanto as características das tarefas a propor aos alunos, como as ações do professor desencadeadas por essas tarefas, motivo pelo qual são definidos princípios gerais de design referentes a estes dois aspectos.

Atendendo às perspectivas teóricas destacadas previamente, os princípios gerais de design definidos para as tarefas são os seguintes: a) propor tarefas de natureza diversa, com ênfase em tarefas que incluam questões exploratórias e/ou problemas, b) propor tarefas que incluam questões que incitem a formulação de generalizações, c) propor tarefas que incluam questões que solicitem a justificação de respostas ou processos de resolução, e d) propor tarefas que incluam questões com diferentes graus de desafio.

Quanto aos princípios gerais de design para as ações do professor no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos, consideramos os seguintes princípios: i) acompanhar a resolução da tarefa, dando apenas as indicações necessárias, com o intuito de não reduzir de modo significativo o desafio da tarefa, ii) solicitar a explicação do “porquê” e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

justificações alternativas, tanto durante a resolução da tarefa, quanto nos momentos de discussão coletiva, iii) destacar ou solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que as valida, iv) propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos, v) encorajar a partilha de ideias nos momentos de discussão coletiva, vi) aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique, e vii) desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações. Assim, a conjectura desta investigação baseada em design é que uma intervenção baseada nestes pressupostos contribui para promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula.

5.3 Primeiro ciclo de intervenção

O primeiro ciclo de intervenção é realizado numa unidade de ensino sobre sequências, na referida turma de 8.º ano. O tópico sequências já havia sido abordado no ano anterior, e nesta unidade de ensino decorre em três aulas de 90 minutos. Por não haver continuidade pedagógica face ao ano anterior, opta-se por iniciar a unidade de ensino por uma tarefa que a própria professora refere como sendo "*em simultâneo [uma tarefa] de introdução, mas também para mim [professora] de diagnóstico, porque eu não fui professora [da turma no ano anterior]*" (Audio da reunião inicial, 2013). Além desta tarefa inicial, são propostas mais três tarefas, sendo que as quatro tarefas são elaboradas e/ou adaptadas atendendo aos princípios de design definidos e às características particulares da turma em questão.

Na sua grande maioria, as questões das tarefas são adaptadas de tarefas já existentes, provenientes de investigação no âmbito do tópico das sequências. Estas tarefas são propostas pela primeira autora (enquanto investigadora), discutidas com a professora da turma e ajustadas sempre que necessário. Definidas as tarefas e os objetivos de cada questão, são discutidos os objetivos dos momentos de introdução das tarefas, de trabalho autônomo e de discussão coletiva, bem como as ações esperadas por parte da professora no sentido de promover o raciocínio matemático dos alunos. Tanto as tarefas propostas, como as ações esperadas por parte da professora são sempre norteadas pelos princípios de design.

5.4 Análise de dados

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Neste artigo analisamos momentos de discussão coletiva de duas tarefas realizadas durante a intervenção. Estes momentos de discussão coletiva são selecionados por serem ilustrativos, tanto das tarefas propostas, quanto das ações da professora nesta unidade de ensino. Assim, a análise destes momentos pretende ser representativa do ciclo de intervenção, apresentando o modo como as tarefas propostas e as ações do professor podem contribuir para promover o raciocínio matemático dos alunos.

A análise é realizada com apoio do software Nvivo e considera os princípios de design desta IBD, os processos de raciocínio dos alunos, nomeadamente as generalizações e justificações, e ainda as ações do professor com base no modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) (Figura 1).

Este modelo destaca ações relacionadas com processos matemáticos, nomeadamente, ações de convidar, informar/sugerir, apoiar/guiar e desafiar. As ações de convidar são, geralmente, as que dão início à discussão coletiva ou a um segmento desta discussão, quando o professor incentiva os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções. No decorrer da discussão o professor recorre essencialmente aos outros três tipos de ações, que visam diretamente a aprendizagem por parte dos alunos. Nas ações de informar/sugerir o professor disponibiliza informação aos alunos ou valida as suas afirmações, enquanto nas ações de apoiar/guiar conduz os alunos a apresentar informação. Já nas ações de desafiar, incentiva os alunos a ir além do seu conhecimento prévio. Nestes três tipos de ações centrais na discussão, os autores consideram ainda diversos processos matemáticos envolvidos, não necessariamente disjuntos: representar, interpretar, raciocinar e avaliar. Atendendo ao nosso objetivo, na análise com este modelo focamo-nos, essencialmente, nas ações do professor relacionadas com processos de raciocínio.

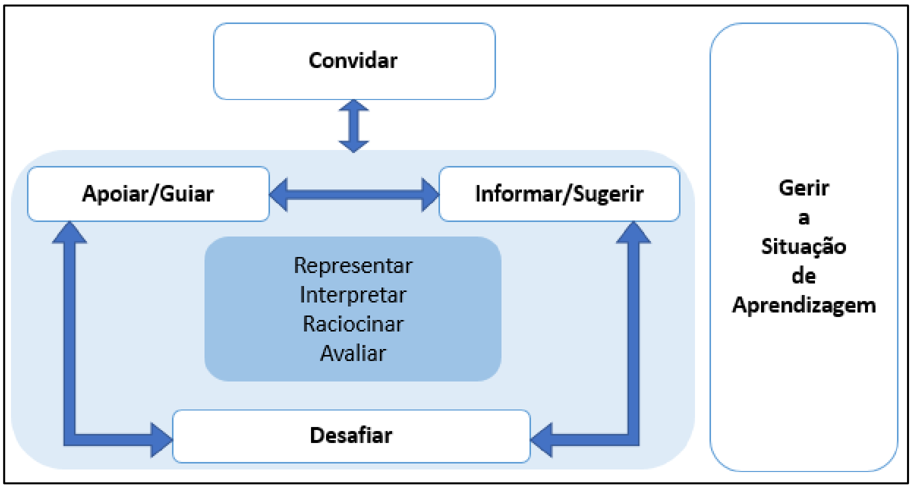


Figura 1 – Modelo para analisar as ações do professor
Fonte: adaptado de PONTE, MATA-PEREIRA & QUARESMA, 2013.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

6 A tarefa de introdução

A tarefa proposta para a introdução da unidade de ensino sobre sequências é a apresentada na Figura 2. Esta tarefa, de natureza exploratória (princípio a), inclui questões de nível de desafio reduzido, como a questão 1.1, e questões de nível de desafio mais elevado, como a questão 1.5 (princípio d). Esta última questão, ao solicitar o termo geral da sequência, incita a formulação de uma generalização (princípio b). Uma parte das questões solicita ainda explicações ou justificações (princípio c).

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta.

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 2 – Tarefa de introdução proposta aos alunos
Fonte: Professora da turma e autores, 2013.

A tarefa é proposta aos alunos, que trabalham autonomamente, seguindo-se um momento de discussão coletiva. Relativamente à questão 1.1, a professora começa por *convidar* os alunos a partilhar as suas respostas, alertando para a possibilidade de existir uma variedade de estratégias de resolução. Seleciona então um dos pares de alunos que se voluntariam a participar:

Marisa: [Respondemos] que a figura tinha 17 pontos.
Professora: 17 pontos. Porque é que responderam isso?
Marisa: Porque nós desenhámos a figura e…
Professora: Contaram?
Marisa: Sim.
Professora: OK. Foi a estratégia delas. Desenharam e contaram. Quem usou uma estratégia diferente?
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Ainda que a professora selecione um par que indica a resposta correta à questão, não avança de imediato para outra questão, optando por *guiar* Marisa a justificar a sua própria resposta. Reforça ainda a resposta de Marisa ao *informar* a restante turma da estratégia deste par. Neste segmento inicial da discussão, a professora solicita a explicação do "porquê" (princípio ii), destaca a justificação como válida (princípio iii) e encoraja ainda a partilha de ideias (princípio v), não apenas com este par, mas também incentivando os alunos a apresentar justificações alternativas (princípio ii). Perante as ações da professora, Marisa justifica a sua resposta, ainda que não o tenha feito inicialmente.

Num outro segmento da discussão, referente à questão 1.3, a professora torna a *convidar* os alunos a participar, selecionando o par Duarte e Marisa:

> *Duarte: Nós fizemos 86, que é o número de pontos (...) A dividir por 4, menos 1.*
> *Professora: Assim [escreve no quadro (86-1)/4]? Só fala o Duarte.*
> *Duarte: Foi. 86 menos 1 a dividir por 4.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Ao representar a resposta de Duarte no quadro, a professora interpreta a representação do aluno de um modo diferente do que ele disse inicialmente, aceitando a contribuição incorreta (princípio vi) e *guiando*-o a redizer a sua resposta. Considerando as duas versões da resposta, a professora opta por explorar um pouco mais a situação (princípio vi), *desafiando* o aluno a interpretar a expressão selecionada (princípio vii):

> *Professora: Assim Duarte [referindo-se a (86-1)/4]? Está bom para ti? Não sei se é isto, estou a perguntar, é isto? É isto ou é isto [escreve 86/4-1]?*
> *Duarte: Primeira.*
> *Professora: [Um aluno intervém.] Espera, espera, deixa-o concluir. Explica.*
> *Diogo: Vai dar a mesma coisa.*
> *(...)*
> *Professora: Só para perceber, Diogo. Não tem mal dizer que é a mesma coisa, só quero perceber. Para ti isto é a mesma coisa?*
> *Diogo: Sim, porque se nós pusermos um sobre… Não, não, não é nada a mesma coisa (...) Só se fosse menos quatro [na primeira expressão].*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Diogo interrompe a resposta de Duarte apresentando uma conclusão errada. Com o *apoio* da professora, que o leva a justificar a sua afirmação, consegue rapidamente compreender o seu erro (princípios v e vi).

Resolvida esta situação, a professora retoma a estratégia de Duarte:

> *Professora: Duarte, perdi-me, explica-me.*
> *Duarte: É isso.*
> *Professora: Mas é isto, o que é isto?*
> *Duarte: Então, é o número de pontos que é 86 (...) Depois subtraímos um que é o ponto do meio (...) E depois a dividir por quatro que é o que vai sempre aumentando.*
> *Professora: Este quatro é sempre o que vão aumentando?*
> *Duarte: Não, é o número de lados.*
> *Professora: Ah, o número de lados. Quanto é que deu, Duarte?*
> *Duarte: 21,25.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Atendendo a Duarte, que dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e posteriormente *guia* o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação, acompanhando a resolução apresentada, dando apenas as indicações necessárias (princípio i). Perante a afirmação de Duarte, a professora continua a *apoiar* a resposta do aluno, pedindo-lhe uma interpretação do valor obtido e levando-o a justificar essa interpretação (princípio ii):

> *Professora: E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?*
> *Duarte: Que não existe nenhuma.*
> *Professora: Porquê?*
> *Duarte: Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.*
> *Professora: Número inteiro. Este número não é inteiro.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao *informar* a turma de que o valor que o aluno obteve não é um número inteiro, interpretando e validando a sua resposta (princípio iii).

A professora *convida* os alunos a apresentarem mais estratégias (princípio v) e António apresenta a sua, que a professora valida, enfatizando essa validação (princípios ii e iii):

> *Professora: Quem pensou de outra forma? (...)*
> *António: À medida que pensámos, mais quatro, os números iam ser sempre ímpares. Então, o número ia ter sempre mais quatro unidades.*
> *(...)*
> *Professora: OK. Eles foram somando. A sequência é uma sequência de números ímpares (...) Na sequência não aparecem [números pares]. Justifiquem, acrescentem esta justificação, OK? Que era outra forma de justificar. Não aparecem números pares.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Neste momento da discussão, não surgem outras estratégias por parte dos restantes alunos e a professora avança para a discussão da questão 1.4, quando um par de alunos apresenta e justifica a sua resolução, com o *apoio* da professora. Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceito pela professora (princípio v):

> *Joaquim: Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.*
> *Professora: Então diz.*
> *Joaquim: Nós fizemos… Nós justificámos que não era múltiplo de 4.*
> *Professora: Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora *desafia* os alunos a avaliar a validade daquela resolução (princípio iii). Direciona primeiramente a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par que ainda não tinha participado:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

> *Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos um, que é o ponto central.*
> *Professora: Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Bianca indica implicitamente que a resposta dos colegas não é válida e justifica a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a resposta deles é inválida. Perante esta situação, a professora poderia sugerir uma interpretação da justificação de Bianca, mas opta por *desafiar* a aluna a reformular a sua justificação (princípio vii):

> *Bianca: O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.*
> *Professora: Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?*
> *Bianca: Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.*
> *Professora: Sim ou não, Guilherme?*
> *Guilherme: Acho que sim, porque o do meio nunca… Era como se estivéssemos a cortar o do meio.*
> *Professora: Aqui era como se estivessem a cortar o do meio (...) A soma destes quatro braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos quatro braços com o ponto central.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Não obstante a validade da afirmação de Bianca, a professora *desafia* novamente a aluna para que justifique parte dessa afirmação (princípio ii). Neste momento, a professora confirma se Guilherme compreendeu a justificação de Bianca e *informa* a turma da representação destacada pelo aluno.

Nos segmentos da discussão coletiva aqui apresentados, que representam apenas parte da discussão desta tarefa introdutória, a professora inclui nas suas ações a grande maioria dos princípios de design pretendidos, o que leva a justificações por parte dos alunos. Particularmente, o princípio referente a solicitar a explicação do "porquê" (princípio ii), tanto em situações em que a tarefa não solicita uma justificação (princípio c), como em situações inesperadas, incita os alunos a apresentar justificações. Quando válidas, são acompanhadas por ações de guiar e de informar por parte da professora. Já quando as justificações apresentadas são incorretas ou apenas parcialmente corretas, é mobilizado o princípio sobre aceitar contribuições parciais ou incorretas e, com base em ações de apoiar/guiar e de desafiar, os alunos tendem a completar as suas justificações ou apresentar justificações alternativas. Contudo, e ainda que sejam identificadas justificações válidas e inválidas (princípio iii) com base em ações de informar, nem sempre é destacado o que as valida.

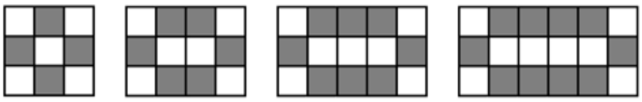
Quanto aos princípios de design da tarefa, estes parecem contribuir apenas indiretamente para os processos de raciocínio dos alunos, pois as justificações são apresentadas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

na sequência de ações da professora. No entanto, é a natureza da tarefa que permite que surjam na discussão coletiva momentos em que são explorados processos de raciocínio.

7 A segunda sequência

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo:



1 2 3 4

1.1. Indica o número total de quadrados da figura 5.

1.2. Quantos azulejos, no total, tem a 20ª figura? Explica a tua resposta.

1.3. Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados.

Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
…			
n			

←Termo geral

Figura 3 – Parte da segunda tarefa proposta aos alunos
Fonte: Adaptado de PONTE, MATOS e BRANCO, 2009.

Na segunda aula da unidade de ensino é proposta uma tarefa apresentada em parte na Figura 3. Esta tarefa começa por ter uma estrutura muito semelhante à tarefa introdutória, sendo também de natureza exploratória (princípio a), com aumento do nível de desafio ao longo da tarefa (princípio d). A última questão aqui apresentada incita a formulação de generalizações (princípio b). A questão 1.2 solicita ainda uma explicação da resposta obtida (princípio c).

A segunda aula da unidade de ensino tem início com uma síntese sobre a terminologia utilizada no tópico das sequências, nomeadamente, termo e ordem de uma sequência. Após este momento de síntese é apresentada a tarefa aos alunos que, de seguida, trabalham autonomamente. No início da discussão coletiva referente a esta tarefa, a professora começa por retomar a questão da terminologia, o que gerou ainda alguma discussão e posteriormente avança para o *convite* à discussão da tarefa em si (princípio v). A professora passa a palavra ao par Bruno e Andreia, e Andreia partilha a sua resposta à questão 1.1:

> *Andreia: Então... Eu encontrei o termo geral dos quadrados cinzentos e dos quadrados brancos.*
> *Professora: Fizeste logo isso, foi a tua primeira abordagem? (...) Como é que fizeste, Andreia? Explica-me.*
> *Andreia: Dos quadrados cinzentos (...) Eu pus que era 2n mais 2 (...) E dos quadrados brancos é n mais 4.*
> (Gravação em áudio-visual, 2013).

Ainda que a resposta dada por Andreia vá além do pretendido com a questão 1.1, a professora *guia* a aluna para que prossiga com a sua explicação (princípios i, v e vii), levando-a a apresentar a generalização pretendida com a questão 1.3.

Professora: [Escreve as expressões referidas por Andreia]. A Andreia foi logo para o termo geral. Explica-me lá, Andreia, estas expressões.
Andreia: Olhei para a figura e vi que por baixo estava (...) Estava dois. Então eu vi que de cima e de baixo era dois também.
Professora: A Andreia reparou isto. Na ordem 2, se a figura era a figura dois, havia dois [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo da figura] e dois cinzentos aqui [na linha de cima da figura]. Aqui há dois, aqui há dois. Reparem, se a figura for a figura 3, eu tenho 3 [quadrados] cinzentos aqui [na linha de baixo] e três [quadrados] cinzentos aqui [na linha de cima].
(...)
Andreia: E depois tinha mais dois de cada lado.
Professora: 2n mais os dois das pontas, muito bem. E os brancos?
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Perante as expressões apresentadas por Andreia, a professora *desafia* a aluna a apresentar uma justificação para os termos gerais (princípio ii). A professora *sugere* ainda uma interpretação do que é referido por Andreia (princípio vi). De um modo idêntico, a professora torna a *desafiar* a aluna para justificar o termo geral referente aos azulejos brancos, *informando* a turma ao interpretar as justificações de Andreia (princípios ii e vi). No final deste segmento de discussão, com ações de *guiar* por parte da professora (princípio i), a aluna apresenta a resolução da questão 1.1 substituindo corretamente o n das suas expressões por 5.

Num outro segmento da discussão desta tarefa, já referente à questão 1.3, Guilherme refere também uma generalização, apresentando um termo geral distinto do apresentado anteriormente por Andreia, *(2n + 2) + (n + 4)*, correspondente à adição dos termos gerais relativos aos quadrados cinzentos e os quadrados brancos:

Guilherme: Foi um que é 6 mais 3n.
Professora: E isso tem alguma relação com o que a Andreia fez? Agora sou eu a pôr-vos a pensar. O termo do Guilherme (...) 6 mais 3n. Qual é a relação do teu termo geral com aquilo que a Andreia fez? (...) Não há relação nenhuma, há alguma relação...
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Perante o termo geral apresentado por Guilherme, a professora *desafia* os alunos a relacioná-lo com o termo geral apresentado anteriormente por Andreia (princípio vii). Contudo, a justificação dessa relação torna-se difícil de apresentar por parte do par Guilherme e Álvaro, por dificuldades de comunicação:

Guilherme: Sim, o meu, os 6 era dos que mantinha de lado.
(...)
Álvaro: O três é o número de... Pronto... É o número de... [gesticula aproximando e afastando as mãos na horizontal]

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

Professora: De quê? Eu gosto desse símbolo [gesticula imitando o Álvaro]. Tem de haver alguma forma de comunicar. Das duas uma, ou trabalho com linha e coluna, ou utilizam linha sempre mas dizem vertical ou horizontal. O 3, atenção, são estas 3 filas de quadrados [3 linhas], que são exatamente iguais.
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Considerando as dificuldades de comunicação deste par de alunos, a professora opta por *sugerir* a interpretação do 3 na expressão algébrica apresentada por Guilherme (princípio vi). Quase de imediato, Ivone apresenta uma interpretação alternativa face ao mesmo valor:

Ivone: Eu não estava a ver assim.
Professora: Estavas a ver como Ivone? Como é que tu vias o 3 de outra forma? Eu, na vertical, está sempre a variar, não vejo 3.
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Nesta situação, a professora, implicitamente, *desafia* a aluna a explicar a sua interpretação (princípio ii), salientando o que pode invalidar a sua justificação (princípio iii). Ivone aceita o desafio da professora, justificando a sua interpretação:

Ivone: Eu vejo 3, porque, por exemplo, a stôra, tem três quadrados, tem uma coluna (...) Ou seja, são três quadrados que existem nessa coluna. Então, se nós pegarmos na ordem, três, esses três vezes quatro [ordem], vemos sempre os quadrados que há nessa figura sem ser aqueles seis.
Professora: É verdade.
Ivone: Vocês estão a ver na horizontal, eu vi na vertical (...) A stôra relacionou o 3 com as linhas.
Professora: Mas percebeste porquê? Porque o n, só para dizer o que o Álvaro disse, como o n é a ordem, n, mais n, mais n [apontando para cada linha na figura 4], 3n. Agora tu, dá-me lá outro argumento (...) Justifica melhor.
(Gravação em áudio-visual, 2013).

Ainda que Ivone apresente a sua justificação, a professora opta por solicitar uma justificação alternativa (princípio ii) com o intuito de melhor informar os alunos sobre a situação (princípios v e vi). Mais uma vez, Ivone dá resposta ao *desafio* da professora, explicitando a sua justificação com base num caso particular:

Ivone: Três colunas, a... Uma coluna… Está dividida em três partes, certo?
Professora: Sim, está dividida em três partes. Percebi. Esta coluna, tem este, este e este.
Ivone: E nessa figura existem quatro colunas iguais.
Professora: Ah, estas quatro colunas iguais.
Ivone: Exatamente. Se nós fizermos as três coisas que há numa coluna vezes o termo [referindo-se à ordem]...
Professora: Porque aqui há sempre o mesmo número de colunas que a ordem do termo?
Ivone: Exatamente!
(Gravação em áudio-visual, 2013).

A primeira generalização que emerge nos segmentos de discussão aqui apresentados não advém das ações da professora, mas sim da própria tarefa, por se tratar de uma tarefa de exploração (princípio a). Tal como na tarefa anterior, as ações da professora incluem a grande

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

maioria dos princípios de design pretendidos, o que, no caso desta discussão coletiva, leva não só a justificações por parte dos alunos, mas também a generalizações. Nesta discussão, os pedidos de justificação por parte da professora (princípio ii) também incitam os alunos a apresentar justificações.

Contudo, grande parte destas justificações emergem na sequência de uma generalização introduzida por uma aluna e não estão diretamente relacionadas com questões da tarefa. Por este motivo, as ações da professora são maioritariamente de desafiar e de sugerir associadas, respectivamente, a solicitar a explicação do "porquê" (princípio ii) e a aceitar e valorizar contribuições parciais (princípio vi). Esta situação ocorre tanto quando os alunos apresentam uma justificação adequada, como quando os alunos não conseguem chegar de imediato à justificação pretendida.

8 Conclusão

Um dos aspectos salientes nos dados apresentados é que as ações do professor nos momentos de discussão coletiva são essenciais para que processos de raciocínio possam emergir em sala de aula. Neste ciclo de intervenção, estas ações, orientadas pelos princípios de design, não seguem uma ordem ou sequência pré-estabelecida, mas surgem em função das circunstâncias, relacionando-se com diferentes aspectos. Assim, ainda que a discussão de cada questão da tarefa seja iniciada por uma ação de convidar por parte da professora, as ações seguintes estão relacionadas essencialmente com as intervenções dos alunos e as oportunidades que estas criam para o prosseguimento da aula. Na verdade, a imprevisibilidade das discussões coletivas suscita uma diversidade de ações por parte da professora. Esta imprevisibilidade é visível tanto na discussão da primeira tarefa, em que foi necessário discutir propriedades das operações por surgirem as expressões numéricas $\frac{86-1}{4}$ e $\frac{86}{4}-1$, como na discussão da segunda tarefa, com a introdução do termo geral logo no início da discussão.

A análise sugere também que a natureza exploratória das tarefas influencia as ações do professor, visto que as questões mais complexas da tarefa levam a questões orais mais desafiantes por parte do professor. Tal como refere Brodie (2010), obter respostas corretas não é o objetivo último da discussão e, por isso, as respostas corretas constituem oportunidades de desafio para aprofundar ideias ou conceitos matemáticos.

É esta diversidade de ações do professor, possibilitadas pela tarefa proposta, que permite que processos de raciocínio matemático surjam nos momentos de discussão coletiva. Neste

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

estudo, os momentos em que emergem processos de raciocínio matemático na discussão coletiva representam uma parte significativa dessa discussão, o que vai bastante além do referido por Brodie (2010) que classifica estes momentos como raros. Os princípios de design parecem assim contribuir para que, nas discussões coletivas, surjam processos de raciocínio matemático centrais como a generalização e a justificação.

Quanto ao modo como estes princípios contribuem para o raciocínio matemático dos alunos, destacamos que as justificações apresentadas pelos alunos parecem emergir dos momentos de discussão coletiva essencialmente associadas aos princípios referentes a solicitar a explicação do "porquê" e a valorizar contribuições incorretas ou parciais, sendo suscitadas por ações de guiar e de desafiar por parte da professora.

Destacamos ainda que as generalizações, no caso desta unidade de ensino em muito associadas ao termo geral da sequência, tendem a surgir na própria realização da tarefa, pelas suas características, enquanto tarefa exploratória e por incluírem questões que incitam a formulação de generalizações. Estas generalizações são formuladas durante o trabalho autônomo dos alunos e posteriormente apresentadas e justificadas nos momentos de discussão coletiva, associadas a ações de convidar e de guiar.

Ainda que estes princípios de design sejam os que mais se destacam na promoção do raciocínio matemático, os demais princípios são também mobilizados e parecem contribuir para criar um ambiente propenso à inclusão de processos de raciocínio. Deste modo, os princípios de design enunciados parecem proporcionar oportunidades para que os processos de raciocínio matemático tenham lugar na sala de aula, sendo que o modelo utilizado para analisar as ações do professor que lhes estão associadas (PONTE, MATA-PEREIRA & QUARESMA, 2013) contribui para compreender os modos como estes princípios podem ser postos em prática em sala de aula.

O ciclo de intervenção aqui analisado sugere a possibilidade de ir além, tanto ao nível dos princípios de design referentes às tarefas, como às ações do professor. Por um lado, os momentos de discussão de questões que permitem uma variedade de processos de resolução parecem contribuir para que surjam processos de raciocínio matemático. Por outro lado, os desafios feitos pelo professor no sentido de ir além da tarefa não se limitam a novas questões e generalizações, pois, uma parte dos desafios que vão além da tarefa remetem para justificações, provendo também o raciocínio matemático.

Ainda que a presente investigação seja um contributo para o conhecimento sobre os modos de promover o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula, as generalizações e justificações que emergem no contexto de uma unidade de ensino sobre sequências têm características muito particulares. Investigações futuras com intervenções que visem generalizações e justificações noutros tópicos matemáticos poderão robustecer os princípios de design e as suas relações com as ações do professor, contribuindo para o conhecimento na área do raciocínio matemático.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsa atribuída a Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. **Synthese**, Netherlands, n. 134, p. 25-44, 2003.

AZEVEDO, A. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação, especialização Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

BELL, C. Proofs without words: A visual application of reasoning and proof. **Mathematics Teacher**, Reston, VA, v. 104, n. 9, p. 690-695, 2011.

BOALER, J. The road to reasoning. In: BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. New York, NY: Springer, 2010. p. v-vii.

BOAVIDA, A. et al. **A experiência matemática no ensino básico**. Lisboa: DGIDC-ME, 2008.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. 1. ed. New York, NY: Springer, 2010.

BROUSSEAU, G.; GIBEL, P. Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, n. 59, p. 13-58, 2005.

COBB, P. et al. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, DC, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COFFLAND, D. A. Closing in on proof. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, VA, v. 17, n. 8, p. 494-500, 2012.

FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 14, n. 1, p. 49-66, 2011.

GALBRAIT, P. Mathematics as reasoning. **The Mathematics Teacher**, Reston, VA, v. 88, n. 5, p. 412-417, 1995.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação**. 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02

LANNIN, J.; ELLIS A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching Mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: NCTM, 2011.

NCTM. **Focus in high school mathematics**: Reasoning and sense making. 1. ed. Reston, VA: _______, 2009.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 100, p. 3-9, 2008.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**: Induction and analogy in mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press. Vol. 1. 1954.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.) **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em design para compreender e melhorar práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 2, p. 77-98, 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, Lisboa, v. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; MATOS, A; BRANCO, N. **Sequências e Funções**: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC, 2009.

RIVERA, F; BECKER, J. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teacher in the Middle School**, Reston, VA, v. 15, n. 4, p. 213-221, 2009.

RUSSEL, S. Mathematical reasoning in the elementary grades. In: STIFF, L. V.; CURCIO, F. R. **Developing mathematical reasoning in grades K-12**. Reston, V.A.: NCTM, 1999. p. 1-12.

STEIN, M. K. et al. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, Adingdon, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 30, n. 2, p. 171-191, 1999.

WOOD, T.; BERRY, B. What does "design research" offer mathematics teacher education? **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, n. 6, p. 195-199, 2003.

Submetido em 02 de Novembro de 2017.
Aprovado em 17 de Maio de 2018.