ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral

Epistemology of the integral as the foundation of the integral calculus

Enrique **Mateus-Nieves**[*]

ORCID iD 0000-0002-0500-7450

Resumen

Se realizó una historiografía a la integral, buscando identificar su ontología e implicaciones en el proceso de formalización del cálculo integral. Es una investigación cualitativa basada en la historiografía de un contenido matemático analizado con algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, desarrollado con estudiantes universitarios que toman la asignatura cálculo integral. El rastreo de la información permitió identificar algunas rupturas epistemológicas que direccionaron la investigación a identificar cambios en la concepción de la integral. La organización de la información permitió identificar tres periodos: 1) La integral como *operador*. 2) Evolución de la operación integración originando el cálculo integral. 3) Fundamentación del cálculo integral. Se identificó al cálculo integral como un ámbito poco explorado y normalmente considerado complejo. Esta propuesta permite pensar la integral no como un objeto complejo, sino como un ente matemático formado por diversos significados que deben descomponerse para su estudio. Los tres periodos aquí propuestos permiten: identificar la complejidad que la conforma, pensar en posibles maneras de relacionar, conectar o articular esa complejidad, en miras de lograr una articulación que redunde en comprensión y desarrollo de competencias matemáticas en aquellos que la estudian.

Palabras clave: Ontología de la Integral. Cálculo integral. Epistemología de la integral.

Abstract

A historiography of the integral was carried out in order to identify its ontology and implications in the process of formalization of integral calculus. It is a qualitative research based on the historiography of a mathematical content analyzed with some tools of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction, developed with university students taking the integral calculus subject. The tracking of the information made it possible to identify some epistemological ruptures that directed the research to identify changes in the conception of the integral. The organization of the information made it possible to identify three periods: 1) The integral as an "operator". 2) Evolution of the integration operation giving rise to integral calculus. 3) Foundations of integral calculus. Integral calculus was identified as a little explored field and normally considered complex. This proposal allows us to think of the integral not as a complex object, but as a mathematical entity made up of different meanings that must be decomposed to be studied. The three periods proposed here make it possible to: identify the complexity that makes it up; think of possible ways of relating, connecting, or articulating this complexity, with a view to achieving an articulation that results in understanding, and the development of mathematical competences in those who study it.

Keywords: Integral ontology. Integral calculus. Integral epistemology.

[*] PhD en Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC). Docente investigador, Departamento de Matemáticas, Universidad Externado de Colombia (UEC), Bogotá, Colombia. E-mail: jeman124@gmail.com.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

1 Introducción

Escasa literatura relacionada con estudios sobre la integral como objeto matemático, resalta la importancia de trabajos como este, dado que permite evidenciar elementos lógico-epistemológicos claves en el proceso de su constitución teórica, que posibilitan no sólo una mejor comprensión del concepto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción que merecen ser tenidos en cuenta para una propuesta educativa en Educación Matemática.

Este trabajo, de corte hermenéutico, da cuenta de la complejidad que rodea la integral y de los múltiples aspectos que incidieron en su construcción teórica, es fruto de una investigación historiográfica relacionada con la ontología de la integral. En Mateus-Nieves & Hernández (2020a) se expone la necesidad de hacer un acercamiento a la articulación de conceptos complejos identificados en este trabajo para la integral, dado que la experiencia docente ha permitido evidenciar que conocer algunos momentos claves, en el proceso de constitución teórica, permite ver el objeto *integral* como un ente matemático complejo, donde queda inmerso en un juego de lenguaje en el que se habla del objeto desde la dualidad unitaria-sistémica. En algunas circunstancias, los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (se supone conocidos previamente), mientras que en otras intervienen como sistemas que deben ser descompuestos para su estudio (WITTGENSTEIN, 1953).

La práctica docente muestra que la formalización de la integral se sintetiza en los primeros años de universidad, donde la referencia en los libros de texto es especialmente técnica y operatoria, sin una conceptualización que vaya más allá del uso técnico de las mismas. Mateus-Nieves y Rojas (2020b) mencionan que las nociones matemáticas avanzadas tienen un alto nivel de abstracción, fundamentales en el desarrollo de las matemáticas superiores y que son de difícil aprendizaje para los estudiantes, elementos que desbordan toda intuición sensible y, por tanto, un estudio que dé cuenta de las condiciones lógicas que intervienen en el proceso de constitución de la integral, contribuye a una mejor comprensión de la misma y su posible articulación. Para lograr la estructuración aquí propuesta se utilizaron algunas herramientas teóricas que aporta el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS de ahora en adelante; GODINO; BATANERO; FONT, 2007), así como otros trabajos sobre la integral relacionados en el numeral 2 de este documento.

La organización de la información en configuraciones epistémicas, permitió identificar tres periodos de constitución teórica para la integral. Se miró la viabilidad de articular estos periodos en miras de ofrecer estrategias didáctico-metodológicas, ajustándose la estructura

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

curricular de la asignatura cálculo 2, donde se enseña la integral; las dificultades y bondades encontradas se pueden consultar en Mateus-Nieves & Hernández (2020a). De ahí la convicción que este trabajo aporta a la didáctica del cálculo, reconstruyendo significados parciales de la integral (como entidades unitarias), y como sistema que se debe ser descompuesto para su estudio, buscando articular y conectar con situaciones problémicas de la cotidianeidad. Este manuscrito está sustentado en seis apartados.

2 Antecedentes

Mateus-Nieves (2015) plantea que es posible pensar en un trabajo en Historia de las Matemáticas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de construcción se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural, donde circulan, de manera particular, concepciones pedagógicas, filosóficas y teológicas. Esto significa que las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, en medio de complejas dinámicas sociales.

La literatura en Educación Matemática muestra que, para la enseñanza del cálculo integral, se ha venido adaptando un modelo de enseñanza que permite a los estudiantes enfrentarse a un proceso menos algebraico, algorítmico y formal que les permite dar mayor significado a las nociones que van a manipular en su proceso de aprendizaje, y posteriormente en su vida profesional. Durante la enseñanza del Cálculo infinitesimal (diferencial e integral), se espera, se de paso, del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado (PMA)[1]. Dado que en la educación superior "la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar, formalizar, representar conceptualizar, inducir y visualizar" (MATEUS-NIEVES; ROJAS, 2020b, p. 69). De esta manera, se pretende la *comprensión* por parte de los estudiantes de este tipo de conceptos, desde la ejercitación de algoritmos propios del tema y sus propiedades.

La revisión de literatura relacionada con la ontología de la integral muestra escasos trabajos, que aquí llamamos *fuentes terciarias*, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), Ordóñez (2011), Crisóstomo (2012), Mateus-Nieves (2015, 2016a, 2016b, 2017, 2018, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d); Mateus-Nieves & Hernández (2020a) y Mateus-Nieves y Font (2021) entre otros. Permitiendo identificar que dicho proceso está determinado por nociones complejas que

[1] PMA, los objetos matemáticos se formalizan, conceptualizan y demuestran (VALDIVE; GARBIN, 2008).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

fueron desarrolladas, a lo largo de muchos siglos, por la comunidad matemática y que han generado nuevos estilos de pensamiento matemático y nuevas formas de razonar. Por lo que consideramos fundamental, identificar la integral desde la dualidad unitario–sistémico porque permite al estudiante conocer el origen, aplicación y posterior formalización de este tipo de conceptos que, inicialmente, se concibieron como primarios, y al utilizarse fueron emergiendo ciertas características que produjeron rupturas epistemológicas[2] que lo llevaron a convertirse en un nuevo objeto emergente, ahora secundario. Al desconocer dicha evolución, para la mayoría de estudiantes resulta complejo entender la integral como un ente matemático dual (unitario y sistémico), generándoles dificultades de aprendizaje y escaso desarrollo de competencias matemáticas.

Los trabajos antes mencionados muestran que la enseñanza de la integral ha estado centrada en tres procedimientos socialmente establecidos: 1) *Antiderivación,* instrumento: teorema fundamental del cálculo, conducente a los métodos de integración y a la construcción de tablas de integrales. 2) *Suma,* el instrumento de cálculo es un método de integración numérico. 3) *Derivación sucesiva,* donde el instrumento de cálculo es la serie de Taylor.

Sin embargo, entender la naturaleza de los algoritmos es necesario, pero no suficiente para el proceso de aprendizaje en los estudiantes, por lo que, para comprender un algoritmo, Muñoz (2000, p. 25) citando a Vergnaud (1991), plantea en el contexto de los campos conceptuales: “el estudiante no adquiere costumbres o procedimientos preestablecidos por simple condicionamiento, a través de ejercicios repetitivos, sino que adquiere reglas que pueden y deben aplicarse a nuevos problemas”. Las adquiere sólidamente si las comprende, es decir, si se da cuenta de la relación que éstas mantienen con la estructura relacional de los problemas a los cuales se aplican.

Situación que permite inferir una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo Integral, evidenciado en una separación entre lo conceptual y lo algorítmico, que permitiría en algunas circunstancias, ver la integral como entidad unitaria (técnicas para calcular integrales definidas, indefinidas, por nombrar algunas) y en otros, como sistemas que deben ser descompuestos para su estudio (situaciones problémicas que involucran integrales impropias, o regiones a las que se les debe calcular el área entre curvas, por nombrar

[2] Aquí se usa el concepto de *ruptura epistemológica*, establecido por De Lorenzo (1977), y utilizado por Ordóñez (2011, p. 70). La ruptura está relacionada con la necesidad de alcanzar una fisura que permita ir más allá de la evidencia, de las prenociones conocidas. Lo que implica un quiebre en la relación tal como se venía desarrollando para pasar a una instancia en la que el relacionamiento que existía queda totalmente interrumpido, bien sea porque resultó más evolucionado o porque superó a los anteriores, llegando a convertirse en una herramienta teórica fundamental.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

algunas). Tal estatus ha venido generando una *cultura* en el profesor y en el estudiante, donde *aprender a decir* lo que es la integral y a representarla geométricamente, sin tener una comprensión de la misma pareciera ser suficiente; desconociendo si el estudiante llega o no a ser matemáticamente competente en el uso de este tipo de conceptos.

3 Marco Teórico

Considerando que la epistemología de la didáctica de la integral poco ha sido abordada para investigar, se estima que la epistemología matemática debe ser, por tanto, un objeto de reflexión y análisis para la Didáctica Fundamental de las Matemáticas; por ello, se eligieron algunas herramientas teóricas del EOS (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), porque permiten reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y buscar una explicación de cómo éstos emergen en el aula, de forma que oriente al estudiante al verdadero objeto de conocimiento que se enseña, al proponer condiciones para un funcionamiento en una relación dinámica de la triada profesor, estudiante y saber.

3.1 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

La actividad matemática, en este enfoque, esta modelada en términos de prácticas, de configuración de objetos primarios y procesos que se activan mediante dichas prácticas (FONT; GODINO; GALLARDO 2013). Una práctica matemática se concibe como una secuencia de acciones, regulada por reglas establecidas institucionalmente, orientada hacia un objetivo (generalmente resolver un problema). El EOS emplea términos como: *objeto* para referirse a cualquier entidad que, de alguna manera, esté involucrada en la práctica matemática y pueda identificarse como una unidad. *Configuración* para designar un conjunto o sistema heterogéneo de objetos primarios que están relacionados entre sí; las clasifica entre *cognitivas* o *epistémicas*. Considera elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional, que puede ser considerada desde dimensiones duales. Para este trabajo, usamos la dimensión *unitaria–sistémica*, dado que “en algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (se suponen conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio” (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, p. 9).

La mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos desde el EOS permite reformular la visión *ingenua* que hay un mismo objeto matemático con diferentes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

representaciones (GODINO; FONT, 2007). Lo que hay es un sistema complejo de prácticas que permiten resolver problemas, en las cuales el objeto matemático (secundario) no aparece directamente, aquello que sí, aparece, son representaciones del objeto secundario: diferentes definiciones, proposiciones, propiedades, procedimientos, técnicas y argumentos que se aplican sobre el objeto matemático (configuraciones epistémicas de objetos primarios). Dicho de otro modo, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas de objetos primarios, que permiten el estudio del objeto matemático secundario, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes; porque permiten mirar el objeto desde la dualidad unitario–sistémico, al respecto Godino, Gonzato y Cajaravill (2012, p. 120) mencionan:

> Esta dualidad está ligada a los procesos de reificación, en el sentido de constitución de objetos por parte de un sujeto individual como una totalidad, la cual interviene como tal en nuevas actividades y procesos, y al proceso inverso de descomposición de una entidad sistémica en sus elementos constituyentes.

Godino, Batanero y Font (2007) indican que una descomposición de los sistemas de prácticas en tipos de prácticas más sencillas, evidencia la emergencia de objetos que nos permiten analizar con detalle la actividad matemática en una tipología de objetos elementales junto con la entidad relacional que las involucra, proceso denominado: *función semiótica*. Esta herramienta sirve para desarrollar la técnica del análisis ontológico-semiótico aplicada para caracterizar los distintos significados identificados, para nuestro caso la integral, en diversos periodos históricos.

Cada función semiótica implica un acto de *semiosis* por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Este proceso relacional entre funciones semióticas, trata de una *ontología* entre configuraciones epistémicas formadas por seis elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas, 5) proposiciones, propiedades, teoremas etc., y 6) argumentaciones. Para este estudio se considera como *configuración epistémica primaria*, aquellos sistemas de prácticas que evocan una construcción inicial para objetos primarios que, posteriormente, sirven para generalizar las preexistentes, completándolas, extendiéndolas y generalizándolas; permitiendo construir otras configuraciones epistémicas emergentes que, aquí, llamamos globales. En ambos casos, estos seis tipos de objetos se articulan para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

4 Metodología

Es una investigación cualitativa basada en la historiografía de la integral, analizada con algunas herramientas que provee el EOS, desarrollada en un entorno universitario y enmarcada en la asignatura calculo integral. La investigación tuvo como interés ampliar y reconstruir el significado de los conceptos de integral, buscando escenarios alternativos donde se exhiban características, propiedades o relaciones, de tal forma que el proceso para acercarnos a un concepto sea a través de múltiples referencias (primarias, secundarias…, que conforman la complejidad epistémica), y no solo por las definiciones.

Se analizaron las configuraciones epistémicas propuestas en Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012), se compararon con los resultados expuestos en Mateus-Nieves (2015, 2016a), aquí llamadas fuentes terciarias. Identificando un vínculo débil entre integrales definidas e impropias, no se encontró una relación particular a la integral indefinida. Elementos que permiten inferir que las dos primeras fuentes terciarias al enfocar sus investigaciones únicamente en la integral definida, no les era necesario considerar todo el aspecto historiográfico de la evolución de los conceptos de integral desde sus orígenes. Elementos que motivaron reorganizar la información mostrada en las configuraciones epistémicas (propuestas por ellos, aquí llamadas primarias), contrastarlas con fuentes bibliográficas secundarias de Historia de la Matemática, entre ellas: Cajori (1919), Boyer (1949, 1986), Henstock (1963), Kline (1972), Houzel (1977), Hayek (1979), Pastor y Babini (1984), Andersen (1985), Newman (1994), Duran (1996) y reconstruirlas.

Se encontró, al contrastar la información terciaria con la secundaria, la necesidad, en varios momentos, de acudir a fuentes primarias para profundizar y comprender cuáles fueron los conflictos semióticos y cuáles las rupturas epistemológicas que se dieron y que originaron nuevos conceptos. Entre las fuentes primarias consultadas están: Descartes (1659), Newton (1687), Euler, (1755), Fourier (1822), la tesis doctoral de Lebesgue (1901) en las que aparece, implícita o explícitamente, la integral. Se analizaron los sistemas de prácticas en cada momento histórico, lo que permitió determinar la complejidad que se infiere del estudio de estas fuentes primarias, todo ello, desde el constructo configuración epistémica, lo que permitió comprender la noción en el contexto en el que surgió. De esta manera, fue posible reconocer cuándo se trataba con una integral indefinida, cuando con una definida y cuando ésta desencadenaba en una impropia. Complejidad que permitió identificar tres periodos para la integral: 1) *origen,* la integral como operador; 2) *Evolución*, progreso de la operación integración conducente al naciente cálculo integral y 3) *Fundamentación* teórica del cálculo integral. Cada uno de ellos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

generó una configuración epistémica que aquí llamamos global, expuestas en detalle en Mateus-Nieves y Font (2021).

La articulación de los tres periodos mencionados y los resultados alcanzados están referenciados en Mateus-Nieves y Hernández (2020a), en ese informe se muestra al detalle la forma en que se ajustó la estructura curricular de un curso de cálculo integral que se aplicó a tres grupos de estudiantes universitarios que tomaban la asignatura cálculo integral, y la forma en que estos resultados fueron comparados con los resultados de otro grupo de estudiantes de la misma asignatura, a los que se les continuó enseñando de la forma tradicional.

5 Análisis y Resultados

Al analizar las configuraciones epistémicas primarias con los resultados mostrados en Mateus-Nieves (2015) sobre la integral, se identificó un vínculo débil entre integrales definidas e impropias, pues las segundas no se muestran, ni se consideran como una extensión de las primeras. Tampoco se hace una relación particular a la integral indefinida. Esto llevó a analizar la evolución histórico-epistemológica de la noción de integral y categorizar su evolución, desde la información ofrecida por las fuentes bibliográficas secundarias mencionadas. Cabe aclarar que, al reconstruir las configuraciones epistémicas y compararlas con la información secundaria fue necesario, en varios momentos, acudir a fuentes primarias para profundizar y comprender cuáles fueron los conflictos semióticos y cuáles las rupturas epistemológicas que se dieron. Se presentan en su orden los tres periodos mencionados anteriormente.

5.1. Origen: la integral como *operador*

La integral surge en la antigua Grecia como un operador que da solución a tres problemas: la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo, todos en un contexto netamente intramatemático. Por cuestión de espacio, se presenta a tres autores sobresalientes para la integral: Eudoxo, resuelve estos problemas de cuadratura creando el método de exhausción. Euclides, usó el método propuesto por Eudoxo, comparó magnitudes respetando el principio de homogeneidad. Arquímedes considera a Demócrito como el primero que, siguiendo estos parámetros, estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide “considerando estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas” (NEWMAN, 1994, p. 22).

Observamos que en los antiguos griegos el concepto de tangencia era estático y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

geométrico, lo que permite identificar el primer conflicto semiótico de este periodo, Arquímedes encuentra diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a la operación integración, refiere que el procedimiento era apropiado para la circunferencia, no para la espiral[3]; establece dos formas de operar con el infinito: el método mecánico, incorporando los indivisibles, y el método exhaustivo con lo infinitamente pequeño mediante la presunción de la existencia de un *límite* donde el principio básico era el de homogeneidad. Generando otro conflicto semiótico porque no siempre es posible encajar una figura dentro de otra un número fijo de veces. El Cuadro 1 muestra la estructura de esta configuración epistémica.

Componentes	**Descripción**
Situaciones-problema	Problema de medida relativa, en un contexto intramatemático, desde tres situaciones particulares: a) La duplicación del cubo; b) La trisección de un ángulo; y c) La cuadratura del círculo. Problema de medir distancias largas (por ejemplo, la distancia de la Luna a la Tierra). Problemas en los que hay que encontrar áreas, volúmenes, centros de gravedad de curvas, superficies, círculos, esferas, cónicas y espirales.
Lenguajes	Geométrico.
Definiciones	Magnitudes conmensurables e inconmensurables. Diferentes tipos de curvas. Elementos de las curvas.
Procedimientos	Procesos básicos para medir: medida directa; descomponer, recomponer y superponer, respetando el principio de homogeneidad. Método de exhausción (El método exhaustivo inscribe una sucesión de polígonos en la figura no rectilínea que se quiere cuadrar, desde una aproximación entre figuras geométricas de medida conocida, inscritas y circunscritas, que acotan la figura que se quiere conocer, dicho valor se presume como el *límite*). Método de reducción al absurdo.
Proposiciones	Principio de homogeneidad: solo se pueden comparar magnitudes de igual dimensión. Resultados obtenidos para casos particulares de medida superficial y medida volumétrica (por ejemplo: el área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito).
Argumentos	El argumento utilizado consiste en la aplicación correcta del método de exhausción para la resolución del problema, utilizando como operación fundamental: la integración.

Cuadro 1 – Configuración Epistémica global 1. Orígenes de la Integral
Fuente: elaboración propia

5.2 Evolución: progreso de la operación integración, hacia el naciente cálculo integral

Las matemáticas de la edad media representan una ruptura epistemológica de la operación integración, superando el principio de homogeneidad manifestado en el primer periodo. Lo evidencia la obra de Descartes (1659, fuente primaria) que, situado dentro del

[3] En el caso de la cuadratura de la curva de espiral de Arquímedes describe un punto de material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo, parte de una sucesión de capas infinitas que cubren esta área y, aunque el resultado es un número (que se consideró una medida), esta sucesión de capas, con la mirada actual, puede entenderse como una sucesión de funciones que convergen a otra función. Esta demostración se pude consultar en Mateus-Nieves y Font (2021, p. 8).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

álgebra geométrica de los griegos, explica cómo se pueden hacer las operaciones aritméticas utilizando regla y compás, rompe con la tradición al considerar que, cualquier expresión algebraica, por ejemplo, a^2 y b^3 representa segmentos y no un área o un volumen respectivamente como en los antiguos griegos.

Descartes tiende un puente entre la geometría analítica y el análisis, amplía el dominio de las curvas geométricas, desarrolla nuevos métodos para calcular tangentes y áreas. Lo que permite a Kepler modificar el método de exhausción contrario a Cavalieri que lo mantenía al estilo griego. Fermat, Wallis, Pascal y Barrow, durante el siglo XVI, usan cantidades infinitesimales, otra ruptura conceptual y metodológica, con el enfoque estrictamente geométrico de Cavalieri, originando una progresiva aritmetización que condujo al uso implícito del límite. De las cuadraturas de Fermat, subyacen, tres aspectos esenciales de la integral definida: a) la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños, b) aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva y c) un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeño[4]. En notación actual: $F(x)=\int_0^a x^n \, \mathrm{dx}=\frac{a^{n+1}}{n+1}, \ \forall \, n \ \in \mathbb{Q}, n \neq -1.$

Wallis identifica que lo considerado estático puede llegar a convertirse en dinámico, definiendo así, cuatro elementos importantes en la conceptualización de la integral definida: a) determinación del área del rectángulo como el producto de la base por altura, b) división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños, c) aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos, y d) un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente a medida que se hacen infinitamente pequeños. Con Saint-Vincent, en 1647, se evidencia otra ruptura epistemológica para la integral, considera estos cuatro elementos, encuentra una extensión para la integral definida, estudia una generalización de la noción de integral, analizando el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, muestra que, si la relación de las longitudes sucesivas es constante (*Figura 1)* es decir $\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}$, entonces las áreas I, II, III, son iguales[5].

[4] Detalles y demostración en Mateus-Nieves y Font (2021, p. 11).
[5] Detalles y demostración, Mateus-Nieves y Font (2021, p. 12).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

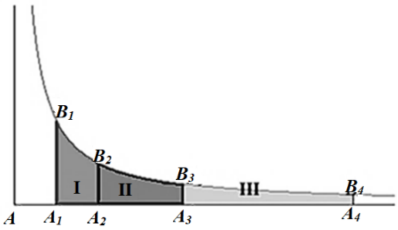

Figura 1 – Relación de las longitudes sucesivas
Fuente: Mateus-Nieves y Font (2021, p. 12)

Estudia en términos de áreas, los valores de lo que, en terminología actual equivale a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, que representa un nuevo tipo de integral; identifica que la función F tiene restricciones, debe estar definida y acotada en un intervalo finito $[a, b]$, situación que plantea un conflicto semiótico dado que para la época era la primera aproximación a lo que hoy conocemos como *integrales impropias*.

Barrow, siguiendo la dirección trazada por Wallis, llama *teorema fundamental* a la relación inversa entre problemas de tangentes y cuadraturas, basado en métodos geométricos. Siguiendo estos razonamientos, Newton (desarrollando unas tesis absolutas) y Leibniz (desarrollando unas tesis relativas), generan otra ruptura epistemológica al convertir la operación integración en una herramienta teórica fundamental. Posicionan la operación integración como una generalización del cálculo de cuadraturas, en el ámbito de la física dinámica, establecen la relación inversa entre problemas de tangentes y cuadraturas. Ambos se adhieren al modelo físico-matemático para la intelección del mundo natural. Sintetizan y establecen un instrumento algorítmico sistemático: el *Cálculo Infinitesimal*, con tres características principales: a) unificaron en dos conceptos generales, integral y derivada, la variedad de técnicas y problemas que se abordaban con métodos particulares. b) Desarrollan simbolismo y reglas formales de cálculo que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independiente de cualquier significado geométrico, que generalizaba el uso de dichos conceptos. c) Reconocieron la relación inversa entre derivación e integración.

Tanto Newton como Leibniz entienden de modo diferente este nuevo cálculo; Newton elabora una reducción puramente matemática de las relaciones cuantificables ente a ente; mientras que Leibniz articula una construcción estrictamente lógica a partir de conceptos mínimos de expresión (primitivos). Dos maneras arquetípicas de concebir la realidad. Para Leibniz, el cálculo lógico es la construcción posible de conceptos complejos a partir de primitivos en virtud de la razón. Su doctrina está con el principio de razón suficiente. Elabora una dinámica que facilita la comunicación entre consideraciones metafísicas, físicas, magnitudes infinitesimales (*momentos*, magnitudes *indefinidamente* o *infinitamente* pequeñas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

generadas por el flujo continuo en un momento de tiempo) y reproducciones simbólicas cartesianas de las curvas representadas por ecuaciones.

En términos leibnicianos, Newton construyó las primeras tablas integrales en la historia de las matemáticas, dando importancia al método inverso, desarrolló técnicas equivalentes a la integración por partes y la sustitución. Llamó *método de series y fluxiones* a las técnicas de expansión de series, determinación de tangentes y cuadraturas de curvas. Este método era un *nuevo análisis* que se extendía a los temas que Descartes había abolido de su *análisis común* – como las curvas mecánicas – gracias al uso de series infinitas. El *nuevo análisis* newtoniano es una ruptura definitiva de la operación integración, convirtiéndola en un nuevo ente matemático con definiciones, propiedades y métodos.

Taylor, Stirling, Cotes, de Moivre, y Maclaurin desarrollan las matemáticas Newtonianas a lo largo del siglo XVIII. Taylor trabajó simbólicamente con diferencias finitas y obtuvo resultados en cálculo fluxional mediante argumentos límite, dejando incrementos finitos tendientes a cero. El resultado: la expansión en series de Taylor, que en términos leibnizianos equivale a integración. El Cuadro 2 muestra la estructura de esta configuración epistémica.

Componentes	**Descripción**
Situaciones-problema	- Procedimientos heurísticos basados en la demostración euclidiana. - Desarrollar técnicas para calcular tangentes o realizar cuadraturas. - Carencia de una teoría aritmética satisfactoria para cantidades inconmensurables. - Necesidad de demostrar. - Uso de simbolismo algebraico.
Lenguajes	Geométrico, aritmético, analítico, algebraico.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Invención y uso de la geometría analítica para solucionar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. - Uso del infinito. - Uso de álgebra geométrica. - Derivadas, anti derivadas, integrales. - Introducción del símbolo ∞ para representar el infinito. - Se considera lo infinitamente pequeño. - Creación del cálculo infinitesimal. - Generalización del cálculo de cuadraturas por Newton y Leibniz, quienes manejan la operación integración como una relación inversa entre problemas de tangentes y cuadraturas.
Argumentos	Cavalieri mantiene la integración como una operación razonando al estilo griego: - Sustituye la evaluación de una suma infinita de elementos infinitamente pequeños. - Generaliza el cálculo de cuadraturas, abandona el método exhaustivo. - No da una definición explícita de indivisible. Críticas al trabajo de Cavalieri: aspectos relacionados con el continuo, el infinito y su exposición retórica, extensa e intrincados razonamientos geométricos, que hacen difícil su lectura y comprensión. Ruptura, conceptual y metodológica, del enfoque geométrico de Cavalieri, dándose una aritmetización que condujo al uso implícito del límite. Lo analítico se convirtió en el método apropiado para reemplazar la intuición geométrica en los procesos de contar y medir. Wallis:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

	- Ruptura total con el rigor de la geometría griega y la tradición aristotélica de evitar el infinito. - Transforma el problema del cálculo de cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva. - Identifica cuatro elementos que fueron importantes en la conceptualización de la integral definida. Newton: - Posiciona la operación integración como una generalización del cálculo de cuadraturas, en el ámbito de la física dinámica. - Adhiere el modelo físico-matemático para la intelección del mundo natural. - Desarrolló técnicas equivalentes a la integración por partes y a la substitución. - Construyó las primeras tablas integrales en la historia de las matemáticas. Leibniz: - Postuló que el cálculo lógico, como la construcción posible de los conceptos complejos a partir de los primitivos en virtud de la razón. - Desarrolla un cálculo lógico. - Proporciona para el nuevo cálculo, herramientas lógicas universales que son independientes del objeto de análisis, alcanzando así, una legitimidad *absolutamente necesaria*. Newton y Leibniz sintetizan y establecen un instrumento algorítmico sistemático conocido como cálculo infinitesimal, (cálculo diferencial newtoniano e integral leibniciano).
Relaciones	- Técnicas carentes de rigor usadas de forma heurística. - Implementación de algoritmos generales, en términos algebraicos y no geométricos, dando origen al nuevo cálculo infinitesimal. - Idea dominante, implícita, de *integral indefinida* como un operador cuyo desarrollo se enfocó en problemas que originaron *integrales definidas*. Estas segundas, originan otras, descubiertas, pero no formalizadas en este período: *integrales impropias*, que más tarde se formalizarían como *integrales impropias de primera y segunda especie,* surgen al extender la noción de integral a intervalos no acotados, y a funciones no acotadas sobre un intervalo acotado. - Newton (desarrollando tesis absolutas) y Leibniz (desarrollando tesis relativas), posicionan la operación integración como una generalización del cálculo de cuadraturas, en el ámbito de la física dinámica, estableciendo la relación inversa entre problemas de tangentes y cuadraturas. - Newton y Leibniz se adhieren al modelo físico-matemático para la intelección del mundo natural; sintetizan y establecen un instrumento algorítmico sistemático conocido como el *Cálculo Infinitesimal* con las siguientes características: - Unificaron en dos conceptos generales: *integral y derivada*, la gran variedad de técnicas y problemas que se abordaban con métodos particulares. - Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de cálculo que podían aplicarse a funciones algebraicas y trascendentes, independiente de cualquier significado geométrico. - Reconocieron la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

Cuadro 2 – Configuración Epistémica global 2. La operación integración como soporte del naciente Cálculo Integral
Fuente: elaboración propia

5.3 Fundamentación teórica del cálculo integral

A partir del siglo XVIII, surgen diversos conflictos semióticos para el concepto de integral que lo llevan a un amplio proceso de fundamentación teórica, basado en rigor y precisión de conceptos en la búsqueda de generalización a una clase cada vez más amplia de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

funciones. Bobadilla (2012, p. 38) menciona que Jacques Bernoulli sugirió a Leibniz el nombre *integral*, este es un hecho epistemológicamente significativo, puesto que "con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial". La integral deja de ser sólo una herramienta para resolver el problema general del cálculo de cuadraturas hasta convertirse en un nuevo concepto con sus propios problemas y métodos.

Fraser (1989) presenta en tres períodos el cambio que generó el nuevo análisis planteado por Newton y Leibniz en las matemáticas del siglo XVIII: *uno geométrico*, en el que predominan los problemas y las concepciones de la geometría; otro *analítico* o *algebraico*, con Euler, y que alcanza su expresión final con Lagrange; por último, el período del *análisis clásico* que comienza a principios del siglo XIX, con Cauchy. Fraser (1989, p. 340) menciona que alrededor de 1740 los matemáticos continentales empezaron a concebir el cálculo no tanto como un algoritmo para el estudio de las curvas u otros objetos geométricos (como había sido con Leibniz y Newton), sino, más bien, como el estudio de las funciones entendidas como "expresiones analíticas compuestas de variables y constantes", abordando así otro conflicto semiótico.

A este giro, Bos (2001) lo llamó la *desgeometrización* del análisis del siglo XVIII, cuyos objetos ahora son funciones, otra nueva ruptura epistemológica del nuevo análisis, porque estas funciones pueden ser multivariadas, expresiones simbólicas de la forma $f(x, y, z, \dots)$, conduciendo a las ecuaciones diferenciales parciales. Son D'Alembert, Daniel Bernoulli y Euler los primeros en manejar, una ecuación diferencial parcial en su estudio de la cuerda vibrante[6]. Dada la importancia de Euler en este proceso de des-geometrización del cálculo leibniziano, compartimos la posición de Guicciardini (2007) de darle a esta nueva teoría simbólica el nombre de *cálculo euleriano* para distinguirlo del cálculo leibniciano. Otra ruptura epistemológica.

Un obstáculo de esta etapa fue la carencia de formalización de la teoría debido a problemas de rigor y consecuente fundamentación teórica, aspectos que marcaron una nueva etapa en la historia de la integral. El recién nacido cálculo integral necesita formalizar los conceptos de integral definida y sus extensiones (integrales impropias). Para ello, Euler desarrolla tratados avanzados sobre cálculo diferencial e integral, estudió las clases de funciones simples y multivariadas como expresiones simbólicas, cuyo propósito fue determinar sus derivadas e integrales[7]. Estos tratados presentan otra ruptura epistemológica porque tienen

[6] El descubrimiento del cálculo parcial diferencial, véase Greenberg (1982).
[7] Profundizar consultando en Euler (1755).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

doble naturaleza: *una taxonómica*, propone una clasificación de las funciones y otra de *carácter instrumental*, presenta la descomposición de polinomios como producto de factores simples (los correspondientes a raíces reales) o dobles (correspondientes a raíces imaginarias).

D'Alembert, Lagrange, y Laplace, siguiendo los lineamientos de Euler, trabajaron funciones en lugar de curvas y superficies; condujo a que las ecuaciones diferenciales parciales, el cálculo de variaciones, la mecánica analítica, el carácter algebraico del cálculo diferencial e integral, obtuvieran soluciones en términos de manipulaciones de símbolos, en lugar de términos de propiedades geométricas, defendiendo así, la necesidad de separar el cálculo de la geometría[8]; otra ruptura epistemológica del nuevo cálculo.

Leibniz defendía la utilidad de los símbolos para los cálculos matemáticos. Directrices puestas en práctica por Euler, Lagrange y Laplace. Terral (1999, p. 250) menciona que "una característica del creciente compromiso de la academia francesa con los métodos analíticos en física en el transcurso del siglo XVIII fue anular la metafísica teleológica de la mecánica racional".

El protagonismo que toma el concepto de función, genera otra ruptura epistemológica en este periodo, la representación en series es relacionada con la integración trasformando el cálculo infinitesimal. Fourier, en 1822, amplió el dominio de las funciones más allá de las continuas, estableció las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas. Una de esas condiciones era la integrabilidad de la función sobre un intervalo determinado, lo que hizo necesario reconsiderar el concepto de integral, conflicto semiótico para la época, porque la integral era utilizada como una herramienta de solución necesaria, pero no era el concepto principal de estudio. Fourier aporta la notación de los extremos de integración, que en notación moderna equivale a $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$, aquí el problema principal consistía en el desarrollo asintótico de la función $\int_a^x f(t)dt$, (esto es, $\int_a^x f(t)dt = x^n + k$), considerado hoy una variante de la integración impropia, otra ruptura epistemológica. Lo planteado hace referencia a la buena definición de la función, relacionado con las integrales impropias de segunda especie.

Pier (1996, p. 66) plantea que con Fourier la integral se ve como el área bajo la curva, desde la pregunta "¿qué tan discontinua puede ser una función para que sea integrable?", lo que representa otro conflicto semiótico para esta época. La respuesta está en la formalización de la integral impropia que trabajó DeMorgan, en 1830, con series convergentes, representan la

[8] Fraser (1989). Óp., cit., 319.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

integral $\int_{u}^{+\infty} x^{\propto} e^{-x} dx$ para $u > 0$ arbitrario. Y con el trabajo de Poisson, que abordó la resolución de una integral impropia mediante extensión al plano complejo, considerando: $dx = -i(\cos z + i\, senz)dz$, deduciendo que $\int \frac{dx}{x} = \left[log\left(-(\cos z + i\, sen\, z)\right)\right]_{0}^{(2n+1)\pi}$ (PIER, 1996, p. 72).

Con los trabajos de Cauchy encontramos nuevas rupturas epistemológicas como una forma de producción cultural de la modernidad. Cauchy adopta métodos rigurosos: el teorema integral que lleva su nombre, las condiciones de Cauchy-Riemann o las sucesiones de Cauchy. A través de los conceptos de límite, función y convergencia logró posicionar una definición analítica de integral definida para funciones continuas, propuso la notación actual para este tipo de integrales, sustituyendo la engorrosa notación de Fourier $\int \mathrm{f(x)dx} \begin{bmatrix} \mathrm{x = b} \\ \mathrm{x = a} \end{bmatrix}$ por $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)dx}$; formalizó propiedades de la integral, expresadas con la nueva notación, como:

a) $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x_0}} \mathrm{f(x)dx} = -\int_{\mathrm{x_0}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)dx}$, cuando $x_0 < x$

b) $\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{x_0}} (\mathrm{f + ig})(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = \int_{\mathrm{x_0}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)dx} + \mathrm{i} \int_{\mathrm{x_0}}^{\mathrm{x}} \mathrm{g(x)dx}$;

c) $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)dx} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} \mathrm{f(x)dx} + \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)dx}$.

Cauchy genera una ruptura epistemológica, separando definitivamente la integral del cálculo diferencial, demostrando la relación inversa de la derivada y la integral, a través del teorema fundamental del cálculo en su primera versión histórica, definiéndola como un límite de sumas.

Dirichlet supera otro de los conflictos semióticos al construir la definición *formal* moderna de función; con la función característica de los racionales reflexionó sobre la relación de la exigencia que debían cumplir los infinitos puntos de discontinuidad para que una función fuese integrable; estableció la falsa condición que es suficiente que los puntos de discontinuidad formen un conjunto diseminado para que la función sea integrable. Lo que permite a Riemann, basándose en las concepciones de Cauchy y Dirichlet incorporar una definición de integral que acoge funciones arbitrarias altamente discontinuas. Define una integral que generaliza la de Cauchy[9], da una definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo que debe ser acotado y cerrado.

Esta nueva integral permitió que Volterra identificara un nuevo conflicto que lo llevó a demostrar la existencia de una derivada acotada que no era Riemann integrable imponiendo, de

[9] El teorema integral de Cauchy (también conocido como el teorema de Cauchy-Goursat) en análisis complejo, es una declaración importante sobre integrales de línea para funciones holomórficas en el plano complejo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

este modo, una nueva ruptura epistemológica, con una severa limitación al Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann, hecho que originó una profunda revisión de la noción de integral. Hankel intenta generalizar la condición de integrabilidad de la función de Riemann en términos del concepto de salto de una función, clasificando las funciones en integrables y no integrables. Bobadilla (2012, p. 12) indica que "la obra de Hankel inicia el enfoque conjuntista de la teoría de integración que permite fundar la teoría de integración moderna".

Mazón (2006) presenta a Borel, con Lebesgue como su alumno, añadiendo a la definición de medida, la noción de *numerablemente aditiva*, extendiendo la longitud ordinaria de un intervalo a conjuntos abiertos, basándose en la propiedad de que todo abierto es la unión numerable y disjunta de intervalos abiertos, denominada conjuntos medibles. Lebesgue posiciona otra ruptura epistemológica analizando, de manera rigurosa, las propiedades, logrando obtener una colección especial de *conjuntos medibles* a la que llama una σ-álgebra. La noción introducida por Borel es el marco en el que Lebesgue desarrolla su integral, realizando un estudio profundo a la integral de Riemann, encuentra que esa integral posee limitaciones. Como respuesta, emerge la integral de Lebesgue (1901), más amplia que la de Riemann, cuyo desarrollo se sustenta, sobre la noción de *medida* como en los antiguos griegos. Lebesgue (1901) definió las *funciones medibles* como aquellas que permiten desarrollar una teoría de integración más amplia y satisfactoria que la Teoría de Integración de Riemann.

La superación secuencial de estos conflictos semióticos con las integrales de Cauchy y Riemann estimuló la búsqueda de un concepto más riguroso de integral, que iniciaron Jordan, Borel, Baire, y que culminaron con la definición de Lebesgue estableciendo una teoría de integración sólida, fuerte y estructurada. Esta última, basada en la idea de cambiar las particiones del dominio de una función por particiones en el rango. Denjoy, en 1912, y Perron, en 1914, construyeron integrales que lograban integrar cualquier función derivada, sin embargo, estas integrales resultaron similares, conocidas como integral de Denjoy-Perron. En 1957, Kurzweil, y dos años después, Henstock definen, por separado, integrales que resuelven el problema de inversión de la derivada; resultados también equivalentes conocidos como integral de Henstock-Kurzweil. El Cuadro 3 muestra la estructura de esta configuración epistémica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

Componentes	Descripción
Situaciones-problema	- Carencia de formalización del *nuevo cálculo* debido a problemas de rigor y fundamentación teórica. - Reconsiderar las condiciones de integrabilidad de la función sobre un intervalo determinado. - Problemas para representar series relacionadas con la integración. - Existencia de una derivada acotada que no era Riemann integrable, (Limitaciones a la integral de Riemann). - Necesidad de establecer condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de cualquier función. - Notación de la integral y de los extremos de integración. - Necesidad de la buena definición de función, dando origen a las integrales impropias de segunda especie. - Dificultades con las integrales de Cauchy y Riemann. - Formalización del cálculo infinitesimal (Diferencial e Integral).
Lenguajes	Analítico, algebraico, geométrico.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Des-geometrización del análisis del siglo XVIII - Desarrollo del cálculo de variaciones enfocado hacia la dinámica analítica en términos de principios extremos (como los de mínima acción o el de velocidades virtuales). - Formalización del concepto de función por Dirichlet. - Incorporación en la notación de los extremos de integración. - Definición rigurosa de la integral por Cauchy y propiedades. - Definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo que debe ser acotado y cerrado. - Profunda revisión de la noción de integral de Riemann. - Desarrollo y formalización del concepto de integral indefinida, definida y sus extensiones, (integrales impropias). - Formalización de integrales impropias de primera y segunda especie. - Definición de funciones medibles. - Se anula la metafísica teleológica de la mecánica racional con los trabajos de Euler, Lagrange y Laplace.
Argumentos	- Se concibe el cálculo no como un algoritmo para el estudio de las curvas u otros objetos geométricos, sino como el estudio de las funciones entendidas como expresiones analíticas compuestas de variables y constantes. - Trabajo con funciones multivariadas motivado por el estudio de las trayectorias ortogonales y la mecánica del continuo. - Concepto de integral basado en el rigor y precisión, alcanzando generalización. - Se establecen condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad, no solo para funciones acotadas. - Separación definitiva del cálculo de la geometría. - Separación definitiva de la integral del cálculo diferencial, Cauchy demuestra la relación inversa de la derivada y la integral, a través del teorema fundamental del cálculo en su primera versión histórica. - La integral deja de ser una herramienta para convertirse en un nuevo concepto con problemas y métodos propios. - Rescate del legado leibniciano: las matemáticas pueden entenderse como un razonamiento desde la manipulación de símbolos, independientemente de las preocupaciones metafísicas. - Se defiende la utilidad de los símbolos para cálculos matemáticos. - Se introduce el concepto de *conjuntos medibles* que denomina una σ-álgebra, emerge la integral de Lebesgue.
Relaciones	Fundamentación del Cálculo Integral en tres períodos: Geométrico, en el que predominan problemas y concepciones geométricas que conlleva a la *des-geometrización* del análisis del siglo XVIII. - Analítico o *algebraico* comienza en 1740, con Euler, y alcanza su expresión final con el trabajo de Lagrange a finales de siglo. - Análisis clásico que comienza a principios del siglo XIX con los escritos de Cauchy. - Se diferencia el *cálculo euleriano* del *cálculo leibniciano*.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

	- Desarrollo y formalización del concepto de integral definida y sus extensiones (integrales impropias). - Formalización de la integral impropia por DeMorgan con series convergentes. - Estudio de funciones, simples y multivariadas, en lugar de curvas y superficies. - Posicionamiento de una definición analítica de integral definida para funciones continuas, a través de los conceptos de límite, función y convergencia. - Definición de funciones medibles. - Se establecen condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de cualquier función. Formalización de: - Las ecuaciones diferenciales parciales, - El cálculo de variaciones, - La mecánica analítica, - El carácter algebraico del cálculo diferencial e integral - Riemann, Darboux y Lebesgue construyen un cálculo más profundo y riguroso, establecen las condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad. - Nuevas integrales: Denjoy-Perron y de Henstock-Kurzweil

Cuadro 3 – Configuración Epistémica global 3. Fundamentación del Cálculo Integral
Fuente: elaboración propia

6 Conclusiones

Los tres periodos para la integral, aquí propuestos, permiten inferir que este trabajo ofrece tanto a profesores como a estudiantes elementos de constitución teórica del cálculo integral, que permiten identificar y conocer los principios, fundamentos, extensiones y métodos que condujeron a la formalización de esta rama del cálculo infinitesimal. Posibilita diferenciar los diversos significados que se le asignan a la integral: al profesor, porque le permite relacionar y evaluar el significado de referencia (diversidad curricular institucional), con el establecido por él en su práctica docente. Al estudiante, porque posibilita el desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático avanzado, desarrollo de competencias matemáticas, conducentes a comprender la complejidad epistémica que conforma la integral como un ente matemático que admite la dualidad unitario-sistémico; vista no como un objeto unitario, sino como un sistema complejo formado por partes o componentes que son útiles para solucionar situaciones problema de carácter intra y extramatemático.

Como conclusión general, se identificó que el cálculo integral es un ámbito poco explorado, quizá por su complejidad epistémica, quizá por su complejidad ontogenética y que, normalmente, es considerado complejo. Lo que permite pensar la integral no como un objeto complejo de enseñar o de aprender, sino como un ente matemático formado por diversos significados que se deben descomponer para su estudio; porque consideramos que una visión integrada de los diferentes significados para la integral, vista desde los tres periodos históricos aquí propuestos permite: identificar la complejidad que la conforma, pensar en posibles maneras de relacionar, conectar o articular esa complejidad, en miras de lograr una articulación

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

que redunde en comprensión y desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos universitarios que la estudian. A los profesores que la enseñan, ofrece una opción para tomar conciencia de la tendencia actual hacia lo procedimental descuidando la particularización, lo que les permitirá replantear la estructuración de sus clases, a fin de trabajar el proceso de generalización de la integral desde la complejidad epistémica que la conforma.

6.1 Recomendaciones

Es importante que el profesor que enseña cálculo integral reconozca que mantener el proceso de enseñanza con el tipo mecanicista, puede entrañar dificultades en los estudiantes que seremos incapaces de solventar correctamente si solo hacemos un estudio superficial de este tipo, mecanicista y operativo, dado que, los ejercicios específicos sobre integrales y más aún, los problemas de carácter intramatemático que involucran el uso de integrales, son el primer contacto con la resolución de situaciones problema que tienen los estudiantes.

Declaración de disponibilidad de datos.

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor, previa solicitud razonable.

Referencias

ANDERSEN, K. Cavalier's method of indivisibles. **Archive for History of Exact Sciences**, University of Aarhus Denmark, v. 31, n. 4, p. 291-367, 1985.

BOBADILLA, M. **Desarrollo conceptual de la integral y la medida**: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. 2012. 280f. Tesis (Doctorado interinstitucional en Educación) – Universidad del Valle, Cali. 2012.

BOREL, E. Le Continu Mathématique et Le Continu Physique. **Rivista di Scienza**. Collezione: Scientia. Ricerca articoli. Paris. v. 6. 1909.

BOS, H. **Redefining Geometrical Exactness**: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.

BOYER, C. **History of the Calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949

BOYER, C. **Historia de las Matemáticas**. Madrid: Alianza Universidad, 1986.

CAJORI, F. **A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse.** Chicago and London, Ed. The Open Court Pub. Co., 1919.

CAUCHY, A. **Cour D'analyse** de l'École Royale Polytechnique. 1´Partie, Analyse Algébrique. De l'imprimerie Royale. Bibliothèque du Roi, rue Serpente. Paris. n. 7, 1821.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

CONTRERAS, Á; ORDÓÑEZ, L; WILHELMI, M. Influencian de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 28, n. 3, p. 367-384. 2010.

COTES R. **Mathématicien. A édité la seconde édition des "Principia" de Newton**. Trinity College, Cambridge, GB., 05-06. 1716.

CRISÓSTOMO, E. **Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas**: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. 2012. 471f. Tesis (Doctorado en Ciencias de la Educación) – Universidad de Granada, Granada, 2012.

D'ALEMBERT, J. **Nouvelles Expériences sur la Resistance Des Fluides.** Ed. Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie. Paris. 1777.

De LORENZO, J. **La matemática y el problema de su historia**. Madrid: Tecnos. 1977.

De MOIVRE, A. **The Doctrine of Changes or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play**. Third editions, printed for A Millar. London, MDCCLVI, 1756.

DENJOY, A. Les Continus Cycliques et la représentation conforme. **Bulletin de la Société mathématique de France**. Tome 70, p. 97-124. 1942. Available on: https://doi.org/10.24033/bsmf.1340

DESCARTES, R. **Geometría a Renato des Cartes.** 2. ed. Amsterdam: Latina, 1659.

DURÁN, A. **Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo**. Madrid: Alianza editorial, 1996.

EULER, L. **Institutionum calculi integralis volumen primum** (1768). Euler Archive – All Works. 342.

FONT, V.; GODINO, J.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Nature Switzerland AG, v. 82, p. 97-124, 2013.

FOURIER, J. **Theorie Analytique de la Chaleur.** París: Chez Firmin Didot. Pere et fils, 1822.

FRASER, C. D'Alembert's Principle: The Original Formulation and Application in Jean d'Alembert's Traité de dynamique (1743). **Centaurus**, New Jersey, v. 28, p. 31-61, 1985.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. **The International Journal on Mathematics Education**, Granada, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J.; FONT, V. La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 20, p. 376- 381, 2007.

GODINO, J.; GONZATO, M.; CAJARAVILL, J. Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas**, [en línea], v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012.

GREENBERG, J. Alexis Fontaine's Integration of Ordinary Differential Equations and the Origins of the Calculus of Several Variables. **Annals of Science**, [en línea], v. 39, p. 1-36, 1982.

GUICCIARDINI, N. La época del punto: el legado matemático de newton en el siglo XVIII. **Estud. filos**, Medellín, v. 35, p. 67-109, 2007.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

HAYEK, N. **Los orígenes de la matemática moderna.** Tenerife: Universidad de La Laguna, 1979.

HENSTOCK, R. **Theory of Integration.** London: Buttherworths, 1963.

HOUZEL, C. Historia de las Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas. *En*: Babiloni (y otros). **Materiales para una discusión sobre la enseñanza de la historia de la ciencia y su posible uso didáctico**. Barcelona. ICE, Univ. Barcelona, 1982. p. 1-10.

KLINE, M. **El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días**. Madrid: Alianza Universidad, 1972.

LAGRANGE, J. **Théorie des Fonctions Analytiques, contenant Les Principes du Calcul Différentiel**. De L'imprimerie de la République, Paris. 1758.

LAPLACE, R. **Traité de Mécanique Céleste.** Tome Premier. Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins. Paris. 1798.

LEBESGUE, H. **Sur une généralisation de l´intégrale définie. Comptes Rendus de l´Académie des Sciences.** Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Tome 132, p. 1025-1028, 1901.

MACLAURIN, C. **Reseña de *De fluxionibus libri duo***. Publicada en Acta Eruditorum, universidad de Glasgow. Glasgow, Escocia. 1747.

MATEUS-NIEVES, E. Evolución histórico-epistemológica del concepto de integral. **Actas de la Quinta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática [ENHEM 5].** 2015. DOI:10.13140/RG.2.2.32081.56164, Bogotá, D.C., 2015.

MATEUS-NIEVES, E. Significado global de un objeto matemático a partir de la triada de configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.** Flores, Rebeca (Ed.), ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, p. 705-712. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. 2016*a*.

MATEUS-NIEVES, E. Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 559-585, 2016b.

MATEUS-NIEVES, E. El EOS como herramienta de análisis de un proceso de instrucción. **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Granada España. J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html, 2017.

MATEUS-NIEVES, E. **Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes**. 2018. 276f. Tesis (Doctorado en Educación, énfasis Educación Matemática) – Facultad Ciencias de la Educación, Universidad Distrital, Bogotá. 2018.

MATEUS-NIEVES, E.; HERNANDEZ, MONTAÑEZ, W. Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. **UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. España, ISSN 1815-0640. Año XVI (60), p. 196-211, 2020a.

MATEUS-NIEVES, E.; ROJAS, C. Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 22, n. 3, p. 65-81, 2020b.

MATEUS-NIEVES, E. Preliminares del cálculo integral. [Preliminaries of integral calculus]. **Project: line of research PhD in Mathematics Education.** Bogotá, 2020c. DOI: 10.13140/RG.2.2.19373.51683.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a17

MATEUS-NIEVES, E. EL teorema del cambio de variables, con estudiantes de ingeniería. **Conference: Didactics of calculus (infinitesimal). Project: PhD research line in Mathematics Education.** Bogotá, oct, 2020d. DOI:10.13140/RG.2.2.13956.96647.

MATEUS-NIEVES, E.; FONT, MOLL, V. Epistemic Complexity of the "integral" mathematical object**. Mathematics**, 9, 2453, 2021. https://doi.org/10.3390/math9192453.

MAZÓN, L. **La integral de Lebesgue en Rn**: Teoría y problemas. Valencia. Universitat de Valencia, 2006.

MUÑOZ, O. Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa***,* Ciudad de México, v. 3, n. 2, p. 131-170, 2000.

NEWMAN, J. **Sigma**: El mundo de las matemáticas. Barcelona: Ed. Grijalbo, v. 1, 1994.

NEWTON, I. **Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias**: cum enumeratione linearum tertii ordinis. London: Ex Officina Pearsoniana, 1687.

ORDÓÑEZ, L. **Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida.** 2011. Tesis (Doctorado en innovación Didáctica y Formación de profesorado) – Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, Jaén, 2011.

PASTOR, R.; BABINI, J. **Historia de la matemática**. Barcelona: Gedisa S.A., 1984.

PERRON, O. **Die Lehre von den Kettenbruchen.** Vol. II. Analytisch-funktionen-teoretische Kettenbruche. 3d ed. Stuttgart, Teubner, DM 49. 1957.

PIER, J. **Histoire de l'intégration**: vingt-cinq siecles de mathématiques. Paris : Masson, 1996.

STIRLIN, J. **MAthhodus Differentialis: Sive Tractatus de Summatione et Interpolatione.** Serierum Infinitarum. Ed. Whiston & White, fleect-ftreet. London, 1764.

TALYLOR. B. **Methodus Incrementorum, Directa & Inverfa**. *In*: Encyclopaedia Britannica, Latest Edition by The Riverside Publishing Company, Chicago, U.S.A. 1809.

TERRALL, M. Metaphysics, Mathematics, and the Gendering of Science in Eighteenth-Century France. *In:* CLARK, W.; GOLINSKI, J.; SCHAFFER, S. (Ed.). **The Sciences in Enlightened Europe**. Chicago y Londres: editorial, 1999. p. 246-271.

VALDIVÉ, C.; GARBIN, S. Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime**, México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. v.11, n.3, p. 413-450. 2008.

VOLTERRA, V. **Siu Principii del calcolo integrale.** G Mat, Pisa. v. 19, p. 333-372. 1882.

WITTGENSTEIN, L. **Philosophical investigations**. New York: The MacMillan Company, 1953.

Submetido em 01 de Fevereiro de 2021.
Aprovado em 09 de Julho de 2021.