


# FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES: UMA ANÁLISE DA ADEQUAÇÃO DE RECURSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Continuing teacher education: an analysis of the adequacy of didactic resources for the teaching of rational numbers

**Patricia Pujol Goulart CARPES**

Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Brasil  
patigou23.carpes@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0001-5206-8718>

**Eleni BISOGNIN**

Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil  
eleni@ufn.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0003-3266-6336>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

## RESUMO

Neste estudo são discutidos resultados parciais de uma pesquisa qualitativa que teve por objetivo investigar como um programa formativo mobiliza conhecimentos didático-matemáticos dos professores quanto ao uso adequado e pertinente de recursos didáticos para ensinar números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa análise foi feita por meio da dimensão mediacional do Sistema de Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM), descrita por Pino-Fan e Godino. Os dados foram obtidos por meio dos registros escritos dos professores, da gravação em vídeo dos encontros e das observações da formadora registrados em seu diário. Os resultados apontam para uma compreensão limitada dos professores referente ao emprego de recursos didáticos em sala de aula, bem como evidenciou poucas condições de infraestrutura das escolas para emprego de recursos digitais.

**Palavras-chave:** Dimensão mediacional, Recursos didáticos, Números racionais, Conhecimentos didático-matemáticos

## ABSTRACT

This study discusses partial results of a qualitative research that aimed to investigate how a formative program mobilizes didactic-mathematical knowledge of teachers regarding the adequate and pertinent use of didactic resources to teach rational numbers in the final years of Elementary School. This analysis was done through the mediational dimension of the Didactic-Mathematical Knowledge System (CDM), described by Pino-Fan and Godino. The data were obtained through the teachers' written records, the video recording of the meetings and the teacher's observations recorded in her diary. The results point to a limited understanding of teachers regarding the use of didactic resources in the classroom, as well as evidenced few infrastructure conditions of the schools for the use of digital resources.

**Keywords:** Medial dimension, Didactic resources, Rational numbers, Didactic-mathematical knowledge

# 1 INTRODUÇÃO

Apresentam-se, neste artigo, resultados parciais de uma investigação que tem por objetivo discutir a pertinência e adequação dos recursos didáticos desenvolvidos durante uma formação continuada com professores de Matemática sobre a temática números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

A formação continuada de professores esteve alinhada com a proposta desenvolvida por Pino-Fan e Godino (2015) sobre o sistema denominado Conhecimentos Didático-Matemáticos dos professores, (CDM). O modelo interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões: a matemática, a didática e a meta didático-matemática.

A dimensão matemática é composta por duas subdimensões: do conhecimento comum e do conhecimento ampliado, que atende a necessidade de solidificar os conhecimentos dos professores de Matemática em tópicos específicos de Matemática. Os autores entendem como conhecimento comum, aquele conhecimento matemático compartilhado pelo professor e pelo aluno, isto é, o conhecimento suficiente para resolver um problema, por exemplo. O conhecimento ampliado é aquele que o professor deve ter sobre as noções matemáticas, saber vincular o objeto de estudo com outras noções matemáticas e encaminhar os alunos a estudos subsequentes (Pino-Fan & Godino, 2015).

Compreende-se que o conhecimento matemático não é suficiente para o professor na sua prática de ensino e, sim, que o mesmo deve ter conhecimento de diversos fatores que interferem no planejamento e implementação do estudo de um objeto matemático. Neste contexto, é proposto a dimensão didática do CDM. A mesma é composta de seis facetas, a saber: faceta epistêmica (conhecimento especializado de Matemática), faceta cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), faceta afetiva (conhecimento dos aspectos afetivos, emocionais e atitudes dos estudantes), faceta interacional (conhecimento sobre interações presentes na sala de aula), faceta mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem dos alunos) e a faceta ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares, sociais, políticos que influenciam na gestão da aprendizagem dos alunos) (Pino-Fan & Godino, 2015).

A dimensão meta didático-matemática é composta por duas partes: uma relativa aos conhecimentos sobre os critérios de idoneidade didática e a outra, os conhecimentos sobre as normas e metanormas (epistêmica, ecológica, cognitiva, interacional, afetiva e

mediacional), as condições e restrições do ambiente. A idoneidade didática tem o caráter de avaliar o processo de ensino e aprendizagem, isto é, nela está presente a reflexão, a avaliação e a detecção das melhores potencialidades da prática (Pino-Fan & Godino, 2015).

Atendendo ao objetivo desse estudo, são apresentados e discutidos dados desenvolvidos, considerando a faceta mediacional, durante a formação continuada, ou seja, foram analisados os conhecimentos que o professor deve ter para avaliar a pertinência do uso de recursos didáticos (concretos e digitais) para potencializar a aprendizagem, assim como o tempo destinado para tal procedimento.

Neste sentido, foram utilizados com os professores de Matemática recursos didáticos para o objeto matemático números racionais como *applets* e jogos, sendo o Jogo do Varal e Jogo do Bingo criados pela primeira autora desse artigo e foi discutido e proposto aos professores a pertinência dos jogos por meio dos Momentos do Jogo desenvolvido por Grandó (2000). Na sequência, discute-se um aporte teórico para o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, os recursos didáticos supracitados, as potencialidades e limitações apontadas pelos professores de Matemática durante a formação.

## 2 NÚMEROS RACIONAIS

O processo de ensino e aprendizagem dos números racionais tem se mostrado cada vez mais desafiante ao professor e apresentado dificuldades recorrentes aos alunos. Compreender o que é um número racional parece ser um ponto chave nesse processo. Para tal, vários estudos teóricos e empíricos têm apontado para os significados e representações desse conjunto numérico.

Um dos pioneiros nessa temática foi Kieren (1975), quando apontou que os números racionais são constituídos de diferentes construtos e que sua compreensão mais ampla depende do entendimento desses diferentes significados. Kieren (1980), indicou cinco ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo a parte/todo, o quociente, a medida, a razão e o operador. Desse modo, o autor aponta que a compreensão completa dos racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam.

O significado de parte/todo é base e normalmente o primeiro a ser explorado em sala de aula. Apresentado sob a forma  $\frac{1}{n}$  em que esta fração representa uma ou mais partes da

unidade, que foi dividida em  $n$  partes iguais (Lamon, 2006). Desta forma, a fração indica a comparação entre o numerador (número de partes que se toma da unidade dividida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida).

O significado de quociente remete à ideia de partilha, em que a fração  $\frac{a}{b}$  indica o quociente  $a : b$ ,  $b \neq 0$ . Neste significado, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão devem estar claros, pois dividir em partes iguais é a base para que se compreendam os racionais como quocientes (Lamon, 2006). Desta forma,  $a$  pode ser maior, igual ou menor que  $b$ . A critério de exemplificação do significado quociente, podemos ter 3 bolos divididos para 4 crianças ou 4 bolos para 3 crianças. Pelo exemplo dado, nota-se que o significado quociente extrapola o parte/todo, uma vez que existem duas variáveis, bolos e crianças (Silva, 2005).

O significado de operador está associado à ideia de modificar uma grandeza contínua, tanto aumentar quanto diminuir considerando a fração imprópria ou própria respectivamente. Ideia equivalente quando a grandeza é discreta (Lamon, 2006).

O significado de medida possibilita ao aluno identificar a unidade de medida, determinar um comprimento e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida – iteração (Lamon, 2006). A utilização da reta numérica pode ajudar o aluno a compreender o significado medida em contextos de equivalência (Llinares & Sanchez, 2000), assim como, é importante que reconheçam medidas em diferentes locais da reta numérica.

O significado razão do número racional surge da relação de duas quantidades, sendo necessário o raciocínio multiplicativo. Lamon (2006), afirma que se deve fazer uma distinção entre a noção de razão parte/parte (duas partes de um todo “ratio”) e a razão de grandezas de tipos diferentes (“rate”), dando origem a uma nova grandeza.

Behr, Lesh, Post e Silver (1983), apontam que para os alunos compreenderem os números racionais, devem, primeiramente, desenvolver uma concepção básica do que é um número racional para, depois, prosseguirem por meio de uma sequência de tópicos, em cada vertente dos números racionais que se baseiam em concepções matemáticas importantes. As referidas concepções são o raciocínio multiplicativo, a densidade e valor de posição, a partição, a equivalência e ordenação e as estruturas comuns para adicionar ou subtrair.

Para Lamon (2006), o raciocínio multiplicativo é diferente do raciocínio aditivo. A autora apresenta como exemplo, para ilustrar a diferença entre os raciocínios, uma caixa

com 4 balas e outra com 10 balas. Para responder a pergunta “Quantas balas a segunda caixa tem a mais que a primeira?” os alunos devem usar o raciocínio aditivo. Já a pergunta “Que parte de uma dúzia representam as balas de cada caixa?” os alunos devem empregar o raciocínio multiplicativo.

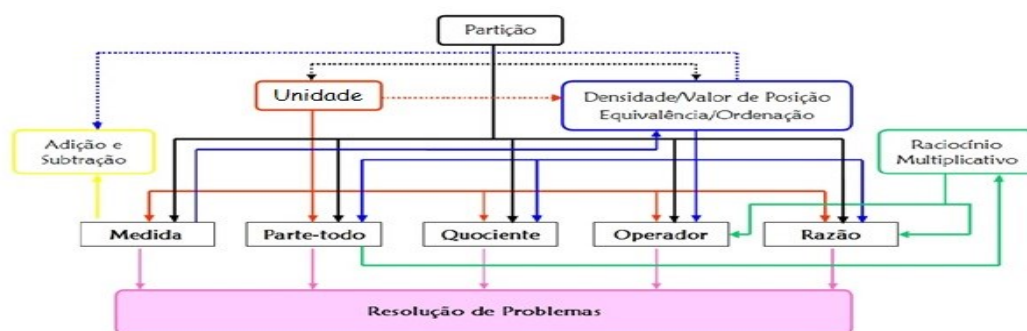
A densidade e valor de posição do número racional indicam a compreensão de que existe uma relação entre o numerador e o denominador, logo, cada fração deve ser vista como uma única quantidade e não como dois números distintos (Wheeldon, 2008). Sem esta noção é difícil compreender que entre dois racionais existe outro racional, ou seja, a noção de densidade (Martinie, 2007).

A ideia de unidade é complexa e está relacionada à interpretação do todo. Lamon (2006) considera importante que os alunos aprendam a trabalhar com unidades de vários tipos – contínua, discreta e as compostas. A noção de unidade é ampla e abarca também a ideia de decompor e recompor a unidade, essencial para compreensão completa do significado parte/todo. A partição é dada como a divisão de uma quantidade contínua em partes iguais (Martinie, 2007).

A equivalência e ordenação estão relacionadas à quantidade (densidade e valor posicional). É preciso compreender que os números racionais podem ser comparados e ordenados. Ao comparar duas frações, podem surgir os casos: a) ambas têm o mesmo denominador (a maior é a que tiver maior numerador); b) ambas têm o mesmo numerador (a maior é a que tiver menor denominador) e; c) os denominadores e numeradores são distintos (usar frações equivalentes) (Lamon, 2006).

As estruturas comuns para adicionar ou subtrair frações devem ser compreendidas pelos alunos, pois, o denominador determina o tamanho das partes e por isso tem de ser o mesmo em ambas as frações (Wheeldon, 2008).

A Figura 1 ilustra o modelo teórico de Behr et al (1983), que esquematiza a transversalidade que envolve a compreensão do número racional, isto é, a capacidade de resolver problemas que envolvem os diferentes significados depende da compreensão das concepções fundamentais para o entendimento dos números racionais.



**Figura 1:** Modelo de transversalidade.  
 Fonte: adaptado de Ventura (2013, p.61).

O modelo de transversalidade criado para a compreensão do número racional indica que:


- A partição e unidade são a base para desenvolver o conhecimento de todos os significados dos números racionais, assim como, a noção de partição é fundamental para que a compreensão da unidade, equivalência e ordenação possa se desenvolver.
- A noção de equivalência/ordenação/densidade de frações é fundamental para que os alunos consigam somar e subtrair frações e que o significado de medida pode auxiliá-los.
- O significado parte/todo é base para o raciocínio multiplicativo e fundamental para a compreensão dos significados razão e operador. Por ser base para os outros, o significado parte/todo é o mais explorado e, muitas vezes, o único trabalhado em sala de aula (Magina & Campos, 2008).
- A compreensão dos cinco significados é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais.

Há diversas discussões sobre qual a melhor maneira de iniciar a compreensão dos números racionais, pois um significado deve ser o ponto de partida. Para Lamon (2006), apesar dos significados se relacionarem entre si e cada um ter suas características particulares, nem todos são um bom ponto de partida. Os significados quociente e operador são menos poderosos que os significados de medida, parte/todo e razão para iniciar a aprendizagem dos racionais.

Além da compreensão dos significados dos racionais, percebe-se como necessário, o estudo das suas representações, visto que os números racionais não são apenas as

frações ou os decimais e, ainda, a interpretação de uma situação pode ser mais simples a um indivíduo ou institucionalmente numa representação do que em outra.

Segundo Duval (2003), o que difere a Matemática de outras áreas do conhecimento é sua abstração desencadeada por processos de generalizações. O conhecimento matemático necessita de uma representação para se desenvolver e/ou compreender. Especificamente com os números racionais, por exemplo, a quantidade um meio pode ser escrito por diferentes registros, a saber:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\% \text{ ou } $$

O presente estudo visa desenvolver recursos didáticos para compreensão de um número racional. Desse modo, adota-se o esquema de transversalidade, conforme a Figura 1 ilustra, que considera as concepções fundamentais dos números racionais e seus significados, como também, dos diferentes tipos de registro desses números para organizar os recursos e potencializar a aprendizagem do objeto tratado.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, isto é, ao pesquisador qualitativo os dados numéricos são interpretados de forma crítica, não os toma apenas pelo seu valor facial (Bogdan & Biklen, 1994). Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, por meio de uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão.

Para tal foi desenvolvido um curso de formação continuada com professores de Matemática do Município de Itaqui (RS), Brasil. Foram nove encontros, perfazendo 36 horas. Participaram da formação seis professores que se reuniram sempre às segundas feiras que era o horário de planejamento dos professores de Matemática do Município.

Os dados coletados neste curso de caráter formativo e investigativo, foram analisados sob as dimensões do CDM. Neste estudo são apresentados os resultados parciais desta investigação, focando na dimensão mediacional, isto é, na discussão do uso adequado e pertinente dos recursos didáticos e métodos de ensino do professor ao desenvolver os conhecimentos matemáticos sobre o objeto números racionais para um ambiente de sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental.

A seguir, são apresentados os resultados referentes à dimensão mediacional do CDM. Os dados foram levantados por meio dos registros escritos dos professores e gravações em áudio e vídeo dos encontros. O projeto desse estudo foi aprovado pelo comitê de ética da Universidade da qual as autoras pertencem sob o parecer número 2.752.490.

#### 4 RECURSOS DIDÁTICOS PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS E AS PONDERAÇÕES DOS PROFESSORES

Os recursos didáticos e métodos de ensino desenvolvidos durante a formação de professores de Matemática estavam alicerçados no referencial adotado neste estudo para os números racionais e na dimensão mediacional do CDM, isto é, no uso de materiais concretos ou digitais de maneira pertinente e oportuna no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental. Como também, de métodos de ensino que torne o aluno mais ativo na sua aprendizagem.

Neste contexto, buscou-se mobilizar os conhecimentos dos professores de forma que os recursos didáticos fossem empregados realmente para potencializar a aprendizagem de tópicos de Matemática e, não como uma ferramenta apenas lúdica ou alheia aos conhecimentos desenvolvidos em sala de aula.

Desta forma, propôs-se a compreensão das concepções fundamentais dos números racionais: comparação, ordenação, densidade, equivalência, unidade (o todo e partes iguais) e dos cinco significados via *applets*<sup>1</sup> desenvolvidos no *software* GeoGebra. Vale ressaltar, que, primeiramente, explorou-se este recurso digital por considera-lo menos acessível aos professores, portanto, poderia ter maior interesse/motivação à compreensão dos mesmos.

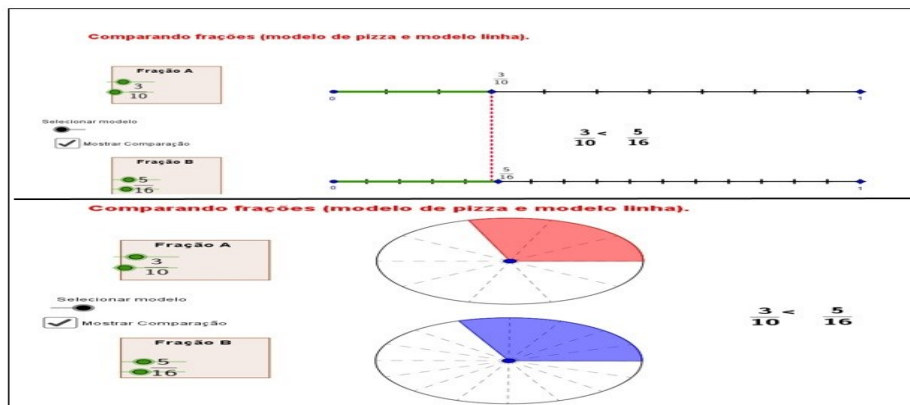
O emprego de recursos durante a formação segue as ideias de Godino, Batanero e Font (2004) que apontam o uso de recursos tecnológicos como um meio para enriquecer a aprendizagem matemática, contribuindo para a condução da construção do conhecimento matemático, enfatizando que, em pleno século XXI, o processo de ensino e aprendizagem não deve ficar restrito a quadro e giz ou a práticas que não incluam as tecnologias digitais.

---

<sup>1</sup> *Applet* é um pequeno *software* que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro *programa* maior. Os *applets* empregados neste estudo estão disponíveis no repositório do GeoGebra de forma *online*, pelo *site* <[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)>.



A Figura 2 ilustra o primeiro *applet* proposto que explora a comparação (e ordenação) entre duas frações com dois *layouts*: em forma de reta numérica ou na forma de pizza.



**Figura 2:** Layout do *applet* sobre comparação de frações.

Fonte: disponível em <https://www.geogebra.org/m/EtanP5kU>. Acesso em 29 nov 2018.

A formadora elaborou a atividade ilustrada no Quadro 1, denominada de roteiro. Os professores receberam de forma impressa o roteiro para que fossem manipulando o *software* para resolver as atividades. Ressalta-se que a proposta tinha como propósito que os professores vivenciassem uma atividade que desenvolvesse a compreensão do conhecimento matemático (comparação e ordenação) por meio de um recurso digital.

**Quadro 1:** Roteiro das atividades via o *applet*.

- 1) Abra o objeto de aprendizagem (*applet*) denominado **comparação 1**. Faça manipulações e, após, responda as questões abaixo.
- 2) A atividade inicia com a fração  $A = \frac{3}{10}$  e a fração  $B = \frac{5}{16}$ . Perceba que há a opção de registro dessas frações na reta numérica ou na forma de pizza. Também, há a opção mostrar comparação (verifique qual fração é maior).
- 3) Por meio desse material, a seguir propomos uma atividade para desenvolver a compreensão do aluno sobre comparação e ordenação.
  - a) Mova os controles deslizantes da fração A para obter  $\frac{2}{5}$ . O que você identifica que aconteceu na figura da linha para a representação dessa fração? E se fosse na figura de pizza há alguma diferença?
  - b) Na fração B, mova os controles deslizantes para obter  $\frac{3}{5}$ . Olhando para a figura (em reta), qual fração é a maior (A ou B)? Como você justificaria que uma fração é maior que a outra?
  - c) Que fração poderia ser menor que  $\frac{2}{5}$ ? E maior que  $\frac{3}{5}$ ?
  - d) Se você unir (somar) a fração A com a fração B, o que ocorreria com as figuras (reta e pizza)? Que fração representa essa quantidade (da união)?
  - e) Quantas vezes cabe a medida  $\frac{1}{5}$  em  $\frac{2}{5}$ ? E quanta vezes cabe  $\frac{1}{5}$  para completar a linha?
- 4) Este material, você o empregaria para trabalhar quais conceitos dos números racionais? Identificou alguma limitação do material?
- 5) Percebes benefícios em se trabalhar com este material digital ao invés do contexto tradicional de uso do lápis e papel.
- 6) Quanto a atividade elaborada via o material (objeto de aprendizagem) traria alguma dificuldade ao aluno, um obstáculo?

Fonte: da pesquisa.

Ao desenvolver o roteiro, um professor mencionou que as atividades são simples ou os alunos esperam, por exemplo, algo mais desafiante. A formadora, então, questionou o professor sobre as possíveis justificativas, do porquê é válido ou não uma fração. Por exemplo, diga uma fração menor que dois quintos? Quando o aluno justifica a escolha da fração, ele pode responder ao professor que ele acha que é menor porque ele dividiu as frações e verificou qual é a menor (em decimal), ou porque ele viu que o tracejado de uma fração é menor que da outra (pelo *applet*), ou manipular no *applet* ele marca a fração  $2/5$  e na linha debaixo, começa a procurar uma fração menor (por tentativa e erro apenas). Logo, o *applet* por si só não desenvolve o processo de ensino e aprendizagem, é preciso o professor para encaminhar as atividades, fazer os questionamentos pertinentes e elucidar as atividades quando necessário.

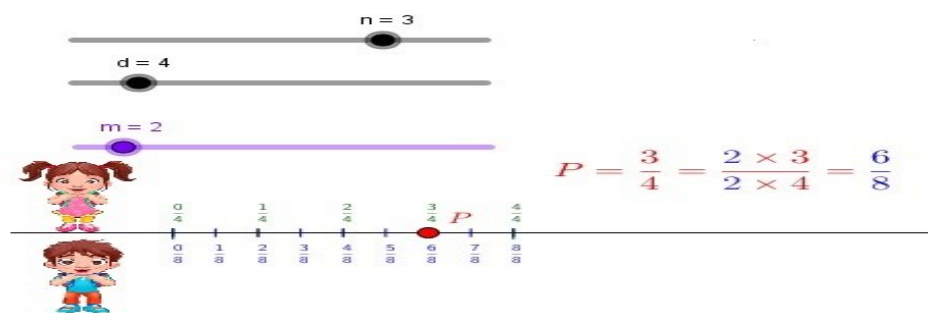
Além disso, foi destacado que propondo um roteiro ao aluno, o mesmo tem mais autonomia para desenvolvê-lo, possibilitando assim que o professor atenda mais aqueles alunos com maior dificuldade. Os professores apontaram que os alunos não possuem o hábito e interesse em atividades de maior demanda cognitiva. Isto é, preferem que o professor faça a leitura das atividades e o desenvolvimento dos procedimentos a serem tomados.

Os itens 4 ao 6 do quadro 1 foi discutido entre os professores onde os mesmos reconhecem a importância da tecnologia no nosso meio (cotidiano), entretanto são enfáticos em dizer que ela não chegou à escola ainda, seja pela infraestrutura precária da escola ou o não domínio desses recursos digitais pelos professores.

Ciente das dificuldades dos professores elaborou-se um modelo de atividade avaliativa por meio de um *applet*. O propósito era ampliar os horizontes dos professores quanto ao uso pertinente e adequado de recursos didáticos. Desta maneira, no laboratório de informática, os professores exploraram/manipularam um *applet* e verificaram suas possibilidades e limitações.

**Quadro 2:** Modelo de avaliação via o applet

ESCOLA TODOS ALEGRES Modelo de avaliação	
Profª XXX	
Nome: _____	Série/ano: 6º ano
Esta avaliação é baseada no objeto de aprendizagem <b>equivalência 2</b> explorado em aula.	
1) Durante a aula de educação física, o professor organizou uma corrida de obstáculos. De um lado correriam as gurias com 4 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. Do outro lado, correriam os guris com 8 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. A figura abaixo ilustra a situação. Considere a para responder as questões abaixo.	



Fonte: disponível em < <https://www.geogebra.org/m/Pr3s9vak> > Acesso em 29 nov 2018.

- Depois de 5 minutos, Ana havia acabado de pular o terceiro obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Ana já percorreu? Quanto falta para Ana terminar a prova?
- Após os mesmos 5 minutos, Beto havia acabado de pular o sexto obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Beto já percorreu? Após esse tempo, quem vai a frente: Ana ou Beto? Justifique.
- Construa uma nova reta agora considerando que a prova dos guris tenha 9 obstáculos e das gurias 3 obstáculos, todos igualmente espaçados.

Fonte: da pesquisa.

Os professores usaram o *applet* antes de conhecerem a avaliação para compreender como ele funciona e o que os controles deslizantes indicam ( $n$ ,  $d$ ,  $m$ ). Por fim, a formadora expôs aos professores que o material disponibilizado serve para propor o entendimento de equivalência (no laboratório de informática, com os alunos trabalhando em duplas ou grupos) como, também, para avaliar de uma forma dita tradicional (prova individual e sem consulta em sala de aula) por meio do material já desenvolvido. Foi proposto aos professores um modelo de prova tradicional tendo em vista que, de modo geral, os professores de Matemática estão “presos” a um modelo de avaliação na forma de uma lista de exercícios. Deste modo, não desejou-se ser tão disruptivo no como avaliar, mas em como fazer um bom uso do material digital.

Os professores ressaltaram a visualização que o *applet* proporciona para a compreensão das duas questões propostas. Como também, a formadora destacou que o *applet* está pronto, porém as atividades para explorar o recurso precisam ser construídas, e assim se faz necessário o conhecimento do professor (conhecimento matemático, conhecimento do aluno, conhecimento das limitações e potencialidades do *applet* e a forma de emprego do mesmo para introduzir, retomar ou avaliar um objeto matemático).

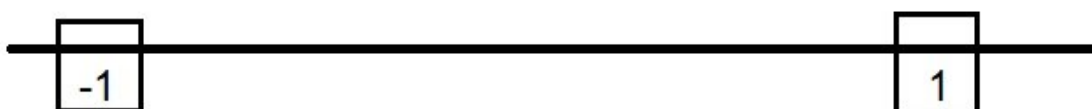
Pino-Fan e Godino (2015) indicam para a dimensão mediacional do CDM a disponibilidade e adequação dos recursos didáticos (concretos e digitais) e temporais

necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática. Neste sentido, foi explorado com os professores um recurso (*applets*) menos empregado em sala de aula e foi vislumbrado a possibilidades para o seu uso no processo (propor, retomar ou avaliar um objeto). Apontando que, ao desenvolverem as atividades dos Quadros 1 e 2, os professores reconhecem os conhecimentos mobilizados e que a forma de propor o estudo de um objeto usando tecnologias deve ser mais atrativa ao aluno.

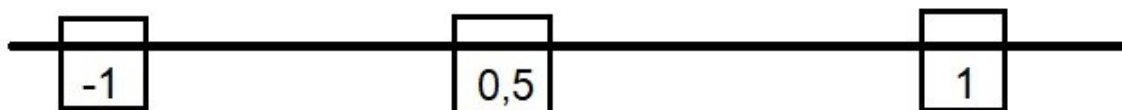
Após abordar alguns recursos digitais, foi proposto aos professores o trabalho com jogos, sendo eles: Jogo do Varal dos Números Racionais e Bingando com os Racionais. Como também, a perspectiva de trabalhar com jogos, os “Momentos do Jogo” desenvolvido por Grandó (2000) em sua tese de doutorado.

O jogo Varal dos Números Racionais (uma corda onde dispõe-se os números) é comumente conhecido e normalmente substitui/relaciona a reta numérica apresentada em livros textos de apoio (livro didático). A ideia aqui foi de tomar esse recurso e desenvolver um jogo. Desse modo, elaborou-se o Jogo do Varal dos Números Racionais e foi proposto aos professores que o jogassem para vislumbrar as potencialidades e limitações do mesmo. As regras do jogo são simples:

1) Inicialmente dois números racionais são escolhidos e dispostos no varal. A seguir em cada jogada, o grupo escolhe um aluno para colocar o número no varal. O tempo de cada jogada é combinado de 30 segundos. Para marcar um número no varal é preciso antes jogar o dado numerado de 1 a 6. Os números 1, 2 e 3, o grupo deve marcar um número à esquerda do número escolhido por último. Se for os números 4, 5 e 6 no dado, o grupo deve marcar um número à direita do número escolhido por último.



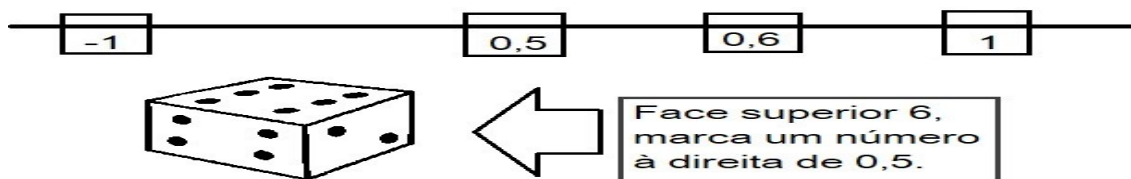
2) Com o par ou ímpar decide-se qual grupo começa jogando. O grupo que inicia deve marcar no varal um número racional no intervalo entre os dois números já dispostos no varal.



3) O outro grupo deve jogar o dado e escolher um número no intervalo indicado para marcar no varal. E assim por diante durante 5 rodadas. Se o aluno registra o número certo no varal,

o grupo recebe um ponto, caso contrário não marca ponto. Vence o jogo o grupo que pontuar mais.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 6, logo deve marcar um número à direita do último número marcado (0,5).

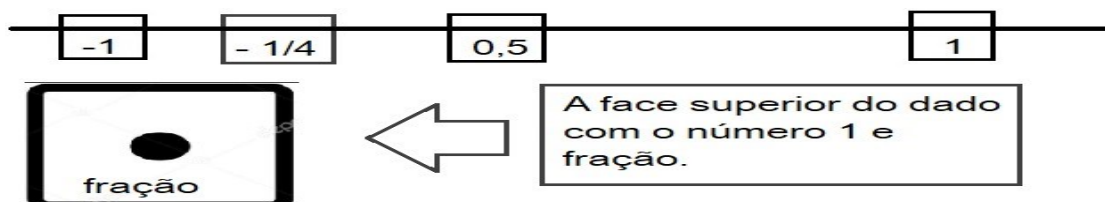


*Observação 1:* as regras do jogo são simples, há tempo para cada rodada e há um grupo vencedor. Cada grupo deve organizar suas estratégias: números possíveis em cada intervalo e qual participante (aluno) deve atirar o dado, escolher o número e marcar no varal.

*Observação 2:* cada jogo deve ser diferente, pois os intervalos iniciais são de escolha do professor (ou dos alunos). As figuras ilustram um jogo com registros em números decimais, mas a critério do professor pode-se explorar os outros registros (frações, frações equivalentes, frações decimais, porcentagens).

*Observação 3:* O jogo pode se tornar mais complexo se ao atirar o dado cada face represente uma ação. Por exemplo, as faces com os números 1, 2 e 3 deve marcar um número à esquerda do intervalo, porém o número 1 (do dado) tem que registrar um número fracionário, 2 (do dado) um número decimal e 3 um número percentual. Do mesmo modo, à direita. O número 4 marca um número à direita e fracionário, o número 5 à direita e decimal e o número 6 à direita e percentual.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 1 e fração, logo deve marcar um número fracionário à esquerda do último número marcado (0,5).



Os professores acharam fácil o jogo, porém apresentaram algumas dificuldades, como por exemplo se confundiram qual número estava a direita ou a esquerda de (-0,9). Tinham marcado o número (-0,5) e corrigiram para (-0,95) para a escolha de um número menor que (-0,9). Esse foi o primeiro encontro que os professores se sentiram a vontade de sair da cadeira (ficar em pé) e irem ao quadro para registrar os números no varal e

discutir a marcação certa ou errada no quadro. Neste sentido, percebe-se que o jogo criou um ambiente agradável e oportuno para abordar conhecimentos didático-matemáticos com os professores. Durante as jogadas dos professores, a formadora destacou as escolhas das duplas para alocarem um número no varal, ou seja, o número alocado poderia tornar a jogada do oponente mais fácil ou difícil, dependendo se o intervalo restante fosse maior ou menor respectivamente.

Godino, Batanero e Font (2004) apontam que os recursos manipulativos desempenham funções representativas que propiciam a compreensão dos significados matemáticos para posterior formulação de conceitos e estruturas matemáticas, podendo, portanto, ser considerados como instrumentos semióticos, servindo de elo entre a realidade e o objeto matemático. Neste contexto, explorou-se os jogos durante a formação de professores. Por meio do jogo supracitado, o aluno pode desenvolver/empregar os tipos de registros de um número racional (transitando nas representações e ampliando sua compreensão de uma quantidade não inteira, por exemplo).

Além disso, conforme apontam os mesmos autores, conceitos e estruturas matemáticas devem ser desenvolvidos por meio de recursos didáticos para o uso adequado e pertinente dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem. Em se tratando dos números racionais, Behr et al (1983) propõem que para os alunos compreenderem esses objetos, devem, primeiramente, desenvolver uma concepção básica dos mesmos para após, prosseguirem numa sequência de tópicos dos números racionais que se baseiam em concepções matemáticas importantes. Em outras palavras, a possibilidade que o jogo (ou recurso manipulativo) assume para desencadear ideias e promover uma aprendizagem significativa.

Na sequência foi proposto aos professores o jogo Bingando com os Números Racionais. O desenvolvimento do jogo é equivalente ao jogo de bingo tradicional, porém explora as diferentes representações do número racional, como também, não há o sorteio de um número, mas de uma carta com a representação pictórica (geométrica) da quantidade. Os materiais do jogo são 24 cartas com as frações com registro pictórico e 35 cartelas com os números racionais com registro fracionário, decimal e porcentagem conforme modelo na Figura 4. As regras do jogo são as seguintes:

a) Os alunos organizados individualmente recebem uma cartela que contém 6 números racionais, os números não são sorteados, mas há cartas que são embaralhadas, dispostas uma embaixo da outra e com a face para baixo. O jogo inicia quando o professor mostra a primeira carta aos alunos e os mesmos devem verificar se possuem a mesma quantia na

sua cartela. Por exemplo, a carta da figura 3, indica o número  $\frac{1}{1}$  ou 1 ou 1,0 ou 100% disponível nas cartelas.



**Figura 3:** simulação de uma carta.  
Fonte: da pesquisa.

b) O objetivo do jogo é alcançado quando o primeiro aluno completar sua cartela (6 números). Note que em cada cartela, há números com representação decimal, fracionária e porcentagem.

NÚMEROS RACIONAIS		
$\frac{1}{1}$	20%	$\frac{5}{6}$
$\frac{16}{10}$	$\frac{9}{15}$	0,5

**Figura 4:** Modelo da cartela do jogo.  
Fonte: da pesquisa.

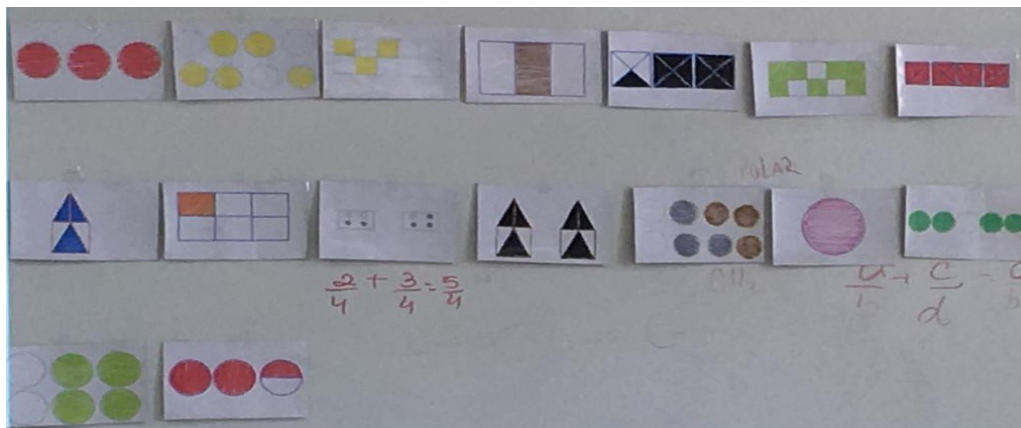
Todos os professores receberam três modelos de cartelas para reconhecerem o material, como os números estavam dispostos (há registro em fração irredutível, ou não, porcentagem ou decimal). De modo geral, os professores acharam mais difícil em relação ao jogo anterior pois tinham que buscar frações equivalentes.

Durante o jogo, os professores perceberam que deveriam buscar trocas de registros, ver o número de diferentes formas, assim como reconhecer os significados de parte/todo (visto que a imagem da cartela é uma representação da parte e do todo) ou de quociente (ao dividir a fração e buscar o decimal). Assim, perceberam que necessitavam de uma estratégia para buscar os números (representações), pois se não os números eram sorteados e não eram marcados nas cartelas caso os tivessem.

Diante da dificuldade de buscar uma estratégia para marcar o número na cartela e assim ganhar o jogo, a formadora comentou que sua estratégia foi tomar todos os números das suas cartelas e determinar o decimal deles e também o número sorteado escrito na forma decimal para verificar se tinha ou não. Foi uma estratégia formulada rapidamente para trabalhar apenas com números decimais. Já o Prof. D buscou a fração irredutível do

número, também, no intuito de mais rapidamente conseguir verificar se tinha ou não o número sorteado. Outra dificuldade apontada foi na representação fracionária ou decimal de uma fração imprópria.

A Figura 5 ilustra as frações sorteadas.



**Figura 5:** Disposição das cartelas sorteadas durante o jogo de bingo no quadro.  
Fonte: da pesquisa.

Todos os professores receberam uma folha para fazer o registro das rodadas/jogadas e, portanto, a formadora poderia acompanhar os registros/estratégias dos jogadores. Porém, como a folha foi dada em branco, os professores preencheram de forma irregular, sem ordem, ficando difícil compreender os cálculos/raciocínio adotados. Desse modo, caso o professor queira esses registros, seria importante organizar a folha por rodada, ou seja, orientar a escrita (mas não entregar uma folha em branco).

Após o desenvolvimento dos dois jogos, foi retomado com os professores os encaminhamentos, procedimentos e os raciocínios buscados/explorados durante os jogos. Neste sentido, colocou-se aos professores que não foi aleatório o comportamento e questionamentos da formadora durante os jogos. Havia uma proposta (método) empregada que eram os Momentos do Jogo, descritos no Quadro 3, elaborado por Grandó (2000). Foi apresentado e discutido com os professores esses momentos e, então, fez-se um paralelo entre o que a teoria indica em cada momento (passo) com os dois jogos desenvolvidos. O Quadro 4 ilustra os Momentos do Jogo Bingando com os Números Racionais.

**Quadro 3:** Os Momentos do Jogo Bingando com os números racionais

Momentos do jogo conforme Grandó (2000)	Comparação com o jogo Bingando com os Números Racionais
1º) <i>Familiarização com o jogo</i> Identificam o material: trilha, peão, dados, simulação de jogadas, analogias com jogo já conhecido pelos alunos.	Reconhecem as cartelas, as cartas que serão sorteadas e retomada das ideias do jogo de bingo.
2º) <i>Reconhecimento das regras</i>	Relacionar as regras do jogo de bingo com o jogo Bingando com os Números Racionais. Via



O professor pode explicar as regras ou serem lidas num guia ou por meio de várias jogadas-modelo para que os alunos possam identificar as regularidades do jogo (as regras).	algumas cartas (figuras) selecionadas mostrar no quadro os tipos de registros do número selecionado.
<b>3º) O jogo pelo jogo: jogar para garantir regras</b> É o jogo espontâneo simplesmente, garantir que os alunos compreenderam as regras.	O professor inicia o jogo tomando uma carta e deixando disponível em frente ao quadro e após vai sorteando as cartas até alguém bingar.
<b>4º) Intervenção pedagógica verbal</b> Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo professor a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de “jogadas erradas” realizadas anteriormente, etc.) A atenção está voltada para os procedimentos criados pelos alunos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.	Alguns questionamentos que podem elucidar as jogadas aos alunos: É necessário buscar a fração irredutível do número sorteado? Ou é melhor buscar a sua forma decimal? Já reconheceram as quantidades que representam os números racionais da cartela de vocês?
<b>5º) Registro do jogo</b> O registro dos pontos, ou mesmo dos procedimentos e cálculos utilizados, pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização, através de uma linguagem própria que, no nosso caso, seria a linguagem matemática. É importante que o orientador da ação procure estabelecer estratégias de intervenção que gerem a necessidade do registro escrito do jogo, a fim de que não seja apenas uma exigência, sem sentido para a situação de jogo.	Quando o professor sorteia uma carta (figura), é importante que os alunos façam o registro no seu caderno da figura e já busquem outros registros do mesmo número (quantidade) seja por frações, frações equivalentes, decimais ou porcentagem. Desse modo, o professor pode observar as marcações na cartela do aluno, verificar jogadas erradas ou concepções errôneas.
<b>6º) Intervenção escrita</b> Para o aluno, as situações-problema, proposta pelo professor, escritas representam um aperfeiçoamento nas suas formas de jogar, o que significa em uma melhora do seu desempenho a fim de vencer o jogo. É nesse sentido que buscamos garantir, até certo ponto, a pouca perda de ludicidade do jogo, ao levá-lo para o contexto de sala de aula.	<i>Situação-problema:</i> Se na cartela tem um número decimal, como faço para descobrir com qual figura pode ser equivalente? <i>Situação-problema:</i> Por que essa igualdade é válida $0,5 = 50\%$ ? <i>Situação-problema:</i> Quantas possíveis representações pode ter a fração $\frac{1}{2}$ ?
<b>7º) Jogar com competência</b> Um último momento representa o retorno à situação real de jogo, considerando todos os aspectos anteriormente analisados (intervenções). É importante que o aluno retorne à ação do jogo para que execute muitas das estratégias definidas e analisadas durante a resolução dos problemas. Assim, o jogo passa a ser considerado sob vários aspectos e óticas que inicialmente poderiam não estar sendo considerados.	Após os passos anteriores, o jogo deve ter um fluído mais rápido e competente. É importante, ainda, o aluno fazer o registro no seu caderno das figuras sorteadas para a verificação do professor. Isso, também, facilita o aluno nas jogadas, pois ele já fez o registro no caderno, então pode só retomar o registro e não fazer todo o cálculo novamente.

Fonte: da pesquisa.

Opta-se em trabalhar com os Momentos do Jogo visto que os professores demonstravam estar limitados às funções que um jogo pode se prestar num ambiente de sala de aula para ensinar os conhecimentos matemáticos. Oportuna-se mostrar/aplicar jogos com a perspectiva de resolução de problemas, concordando com Grandó ao dizer que,

[...] é necessário que a escola esteja atenta à importância do processo imaginativo na constituição do pensamento abstrato, ou seja, é importante notar que a ação é regida por regras. Por isso sua capacidade de elaborar estratégias, previsões,

exceções e análise de possibilidades acerca da situação de jogo, perfaz um caminho que leva à abstração (Grando, 2000, p. 54)

A autora coloca outras características do jogo: desenvolver a cooperação, a possibilidade de aprender com outro (acerto ou erro).

Enfim, foi proposto aos professores o jogo como resolução de problemas, isto é, o jogo para desenvolver um conhecimento matemático e não apenas como algo a mais, para sair da rotina. Os professores, nesse sentido, ouviram as propostas. Entretanto, levaram muito mais em consideração quando o jogo foi desenvolvido do que a formalização de um estudo (ponto de vista teórico). Ressalta-se que se destina um tempo muito menor para colocar ideias/teorias pela formadora durante as formações. Visto que os professores, querem a prática simplesmente. A teoria precisa estar condensada na prática. Por isso, os jogos foram executados na perspectiva da teoria (com os momentos bem demarcados e como a resolução de problemas está sendo empregada).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo buscou-se discutir sobre a adequação e pertinência do uso de recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais durante uma formação continuada com professores de Matemática. Para tal, analisou-se a construção e desenvolvimento dos materiais, assim como as ponderações dos professores sobre os mesmos sob a ótica da dimensão mediacional do CDM.

Conforme as atividades foram sendo desenvolvidas, foi observado pela formadora, que os professores ainda são resistentes ao emprego de recursos digitais em sala de aula para a compreensão ou exploração de um objeto matemático. Seja pela falta de infraestrutura adequada das escolas para desenvolver tal proposta ou o pouco domínio das ferramentas digitais. Nessa perspectiva, foi discutido com os professores que tais ferramentas já estão disponíveis, mas cabe ao professor fazer o devido uso e a elaboração de atividades que via recursos digitais potencializem a aprendizagem dos alunos.

Os recursos concretos são melhores vistos/compreendidos pelos professores já que desde sua formação inicial há um contato com materiais manipuláveis. Também observa-se a limitação do seu emprego no ambiente de sala de aula. Por muitas vezes é apenas usado como uma forma lúdica (recreativa).

A formação continuada com os professores de Matemática demonstrou ser um momento rico para aprimorar os conhecimentos didático-matemáticos dos professores de Matemática por meio da troca de experiências entre os mesmos, os recursos digitais e concretos desenvolvidos na formação ampliaram a compreensão dos professores sobre o porquê e como usar jogos em sala de aula.

Por fim, considera-se que este estudo foi um início para compreender os conhecimentos dos professores para o uso e pertinência de recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem de objetos matemáticos. Almeja-se, na sequência dos estudos, investigar como os conhecimentos desenvolvidos num ambiente de formação continuada influenciam o planejamento, implementação e avaliação do professor num ambiente de sala de aula.

## REFERÊNCIAS

- Behr, M., Lesh, R., Post, T.; Silver, E. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R; Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (pp. 91-125) New York: Academic Press.
- Bogdan, R.C. & Biklen, S. K. (1994) *Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.
- Duval, R. (2003) Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. (pp. 11-33) São Paulo: Papirus.
- Godno, J. D.; Batanero, C. & Font, V. Recurso para el Estudio de las Matemáticas. (out 2004) In: Godino, J. D. (Dirección). *Didáctica de La Matemática para Maestros*. Manual para el Estudiante. Universidad de Granada. Disponível em: <http://www.ugr.es//local/jgodino/edumat.maestros/>. Acesso em 22 mar. 2019.
- Grando, R.C. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.
- Kieren, T. (1975) On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In LESH, R. (Ed.) *Number and measurement: Paper from a research workshop*. (pp.101-144) Columbus, Ohio: ERIC/MEAC.
- Kieren, T. (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. ( eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. (pp. 162-180) Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 2 ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association.
- Llinares, S. & Sánchez, M. V. (2000) *Fracciones*. España: Editorial Síntesis.
- Magina, S. & Campos, T. (2008). A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. *Boletim de Educação Matemática*: Rio Claro, 21(31), 23-40.
- Martinie, S. (2007). *Middle school of rational numbers knowledge* – Abstract of dissertation. Manhattan, Kansas: Kansas State University.
- Pino-Fan, L.R. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor. *Paradigma*, XXXVI(1), 87– 109.
- Silva, M.J.F. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Ventura, H.M.G.L. (2013). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Wheeldon, D. A. (2008). *Developing mathematical practices in a social context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions*. Tese (Doutorado em Educação) University of Central Florida, Florida.

## NOTAS

### TÍTULO DA OBRA

Formação continuada de professores: uma análise da adequação de recursos didáticos para o ensino de números racionais.

### Patricia Pujol Goulart Carpes

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática  
Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Brasil  
patigou23.carpes@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0001-5206-8718>

### Eleni Bisognin

Doutora em Matemática  
Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil  
eleni@ufn.edu.br  
<https://orcid.org/0000-0003-3266-6336>

### Endereço de correspondência do principal autor

Rua Rincão da Cruz, 2151, 97650-000, Itaqui, RS, Brasil.

### AGRADECIMENTOS

Agradecimentos aos professores municipais da Cidade de Itaqui e a Secretaria de Educação do município.

### CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

**Concepção e elaboração do manuscrito:** P. P. G. Carpes, E. Bisognin

**Coleta de dados:** P. P. G. Carpes

**Análise de dados:** P. P. G. Carpes, E. Bisognin

**Discussão dos resultados:** P. P. G. Carpes, E. Bisognin

**Revisão e aprovação:** E. Bisognin

### CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

### FINANCIAMENTO

Não se aplica.

### CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

### APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

### CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

### LICENÇA DE USO

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 Internacional. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

### PUBLISHER

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

### EDITOR

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

### HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 06-06-2019 – Aprovado em: 23-10-2019.

