artigo

EXPLORANDO A PROPORCIONALIDADE NO LABORATÓRIO DE ENSINO

Marizete Marconato Cantarelli*
Vania Elisabeth Barlette**

Resumo

Através de experimentos simples de laboratório envolvendo medição e análise, são estudadas relações proporcionais entre grandezas. Foram utilizadas figuras geométricas de diferentes tamanhos e diferentes materiais, na forma de quadrados e círculos, para estabeler relações matemáticas entre medidas experimentais de peso e um parâmetro geométrico da figura, tal como área, lado e raio. As constantes de proporcionalidade são obtidas através de ajuste linear de mínimos quadrados aos pontos experimentais. Procurou-se enfatizar a importância do conceito de proporcionalidade na construção de modelos matemáticos, a partir do reconhecimento de padrões apresentados pelos dados experimentais.

Palavras-chave: Grandezas proporcionais, Ajuste linear, Constante de proporcionalidade, Modelos empíricos

Introdução

A representação matemática entre grandezas que expressam uma tendência regular, e as quais são medidas em laboratório sob certas condições, é denominada modelo empírico. De forma geral, os modelos matemáticos são construções mentais para representar, tanto quanto possível, as concepções teóricas ou observações realizadas sobre um determinado fenômeno, e são expressos, por exemplo, por meio de funções ou equações diferenciais com finalidade de predição e análise. No ensino, a modelação matemática como prática metodológica tem contribuído para contextualizar a aprendizagem da matemática e das suas aplicações às ciências naturais.

Neste trabalho, são utilizadas funções lineares e quadráticas para representar relações matemáticas entre medidas experimentais de peso em função de um parâmetro geométrico de figuras de diferentes tamanhos. O conceito de proporcionalidade assume papel importante para representar as relações entre as grandezas estudadas e sua aplicação na construção de modelos empíricos. Neste trabalho, as constantes de proporcionalidade são obtidas através de ajuste linear de mínimos quadrados aos pontos experimentais. Com esses estudos, pretende-se colaborar para a discussão sobre o tema proporcionalidade, enfatizando sua importância para o ensino nos níveis fundamental, médio e superior. Como exemplos de aplicabilidade de relações proporcionais na construção de modelos empíricos, podem ser citadas as relações que descrevem o comportamento dos gases ideais, descritas pelas leis de Boyle, Charles e Gay-Lussac, e a relação que descreve a deformação de um corpo sujeito à tensão, descrita pela lei de Hooke (TIPLER, 1984).

Este trabalho foi motivado pelos resultados de uma pesquisa descritiva envolvendo mais de 500 alunos de curso superior de Santa Maria e região, com a finalidade de avaliar o grau de conhecimento com relação a conteúdos programáticos do ensino fundamental (CANTARELLI & BARELETTE, 2002). Esses resultados indicaram que aproximadamente 24% dos alunos pesquisados apresentam conhecimento apenas regular sobre grandezas proporcionais. É importante enfatizar que esses resultados indicam apenas tendências, uma vez que os dados coletados foram retirados de uma população relativamente pequena (510 alunos) e em um curto período de observação (primeiro semestre de 2001). Esses resultados, entretanto, delinearam a presente pesquisa sobre grandezas proporcionais.

* Licenciada em Matemática pelo Centro Universitário Franciscano, RS.
** Dra. em Física pela UFSCar, SP, e-mail: barlette@unifra.br.

Fundamentos Teóricos

Como parte da fundamentação teórica, os conceitos de grandeza, grandeza diretamente proporcional e grandeza inversamente proporcional são reportados e discutidos na forma de exemplo, direcionados a este trabalho.

Grandeza

Entende-se por grandeza tudo aquilo que pode ser medido. Comprimento, temperatura, peso, tempo e área são exemplos de grandezas (TIPLER, 1984).

Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, se estiverem assim relacionadas (ÁVILA, 1986),

$$y = kx, \qquad (1)$$

ou,

$$y/x = k, \qquad (2),$$

em que k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.

Como exemplo, considere a relação matemática que pode ser escrita entre o peso P e o volume V para uma figura geométrica de densidade r,

$$P = \rho g V, \qquad (3)$$

Então, o peso e o volume aumentam na razão de proporção ρg, ou seja, se a medida da grandeza volume é de 1 unidade de volume, segundo a Eq. 3 a medida esperada para o peso é de ρg unidades de peso por unidade de volume. Para as mesmas condições laboratoriais das medidas anteriores e para uma figura de mesma densidade (mesma razão massa por unidade de volume) que a primeira, sendo a medida de volume de 2 unidades de volume, a nova medida esperada para o peso é, então, de $2\rho g$ unidades de peso por unidade de volume. Se, ainda, uma nova medida de volume fornece 3 unidades de volume, então $3\rho g$ unidades de peso por unidade de volume é a nova medida esperada para o peso. Resumindo, $\rho g / 1 = 2\rho g / 2 = 3\rho g / 3 = ... = \rho g$ unidades.

Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se (ÁVILA, 1986)

$$y = k/x, \qquad (4)$$

ou,

$$xy = k, \qquad (5),$$

em que k é uma constante positiva, também chamada constante de proporcionalidade.

Como exemplo, considere uma figura de área A e espessura e variáveis e volume V constante. Então

$$V = \varepsilon A, \qquad (6)$$

que diz que se a espessura e aumentar (ou diminuir), então a área A deve diminuir (ou aumentar), uma vez que o produto $e\,A$ deve permanecer constante e igual a V. Então e e A são inversamente proporcionais.

Grandezas proporcionais a outras

Se z é diretamente proporcional a x e y, e inversamente proporcional a r e s, então as variáveis x, y, z, r e s estão relacionadas por uma equação do tipo (ÁVILA, 1986)

$$z = (x, y, r, s) = k(xy/rs) \qquad (7)$$

para k constante. Então diz-se que z é diretamente proporcional a x e a y, e inversamente proporcional a r e a s.

Substituindo-se a Eq. 6 na Eq. 3, tem-se

$$P = \rho g \varepsilon A, \qquad (8)$$

Então, o peso P é diretamente proporcional à área A e à espessura e, cuja constante de proporcionalidade é rg. Para figuras de mesmo material, cuja densidade é r, e de mesma espessura e, pode-se dizer que o peso P é diretamete proporcional à área A da figura de espessura constante, cuja constante de proporcionalidade passa a ser rge.

Além de proporção direta e proporção inversa, tem-se outras relações, igualmente importantes, tais como proporção ao quadrado e proporção inversa ao quadrado.

Materiais e Métodos

Materiais

Para os experimentos, foram utilizados: dinamômetro de 2,0 N com precisão de 0,01 N, tripé, haste metálica de fixação para o dinamômetro, papel cartão duplex preto, papel cartolina azul, tesoura comum e régua milimetrada.

Para o presente estudo de proporcionalidade, é importante a escolha de papéis com diferentes espessuras e massa por unidade de área. No presente caso, o papel cartão duplex preto tem espessura e massa por unidade de área maiores do que as correspondentes quantidades para o papel cartolina azul.

O dinamômetro é um instrumento de medida usual e de baixo custo, disponível ou de fácil aquisição, mesmo em laboratórios de escolas de ensino médio que dispõem de poucos recursos. Em unidades de gramas, e considerando g como 10,0 m/s^2, o peso de 0,01 N (metade da menor divisão na escala de leitura do dinamômetro) corresponde à massa de 0,001 g, precisão esta similar ou superior a de uma balaça semi-analítica.

Procedimento Experimental

Foram recortadas figuras na forma de quadrados em papel cartão duplex preto e papel cartolina azul, com medidas de lado L variando de (200,0±0,5) mm a (550,0±0,5) mm. Também foram recortadas figuras na forma de círculos em papel cartão duplex preto e papel cartolina azul, com medidas de raio R variando de (100,0±0,5) mm a (450,0±0,5) mm. A seguir, dois experimentos simples foram realizados para a leitura do peso P de cada figura, utilizando o dinamômetro conectado à haste, e este conjunto montado no tripé.

Experimento 1: Medidas de peso das figuras na forma de quadrados para os dois tipos de papel.

O que se pretendeu relacionar foram as grandezas peso e área para as figuras. Nesses experimentos, por simplicidade, as figuras foram denominadas de "quadrados", uma vez que a espessura foi considerada constante para o mesmo tipo de papel. Também foi considerada constante a distribuição de massa por unidade de área para o mesmo tipo de papel.

Experimento 2: Medidas de peso das figuras na forma de círculos para os dois tipos de papel.

Nesses experimentos, também se pretendeu relacionar as grandezas peso e área para as figuras. Por simplicidade, as figuras foram denominadas de "círculos", uma vez que a espessura foi considerada constante para o mesmo tipo de papel. E também, para o mesmo tipo de papel, foi considerada constante a distribuição de massa por unidade de área.

Ajuste linear pelo método de mínimos quadrados

É comum, em laboratório, se estar interessado na medida de uma grandeza em função de outra, ou seja, em como varia uma grandeza sob a variação da outra. Nessas observações, em geral, mantêm-se constantes todas as demais grandezas envolvidas. Nos Experimentos 1 e 2 apresentados em Procedimento Experimental, a grandeza espessura é considerada constante na análise de dados, para o mesmo tipo de papel, e é observada a variação da grandeza peso P sob a variação da área A.

> A idéia de movimento em geometria não é nova; o século XVII marcou um rompimento com a tradição grega

Se, para cada experimento, os N pontos experimentais (A_1, P_1), (A_2, P_2), ..., (A_N, P_N) apresentam um padrão linear, então a solução do sistema de equações

$$b\sum_{i=1}^{N} A_i + Na = \sum_{i=1}^{N} P_i \qquad (9a)$$

$$b\sum_{i=1}^{N} A_i^2 + a\sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i \qquad (9b)$$

fornece os coeficientes angular b e linear a da equação de reta

$$P = a + bA$$

que melhor ajusta os N pontos experimentais, em que a qualidade do ajuste dos dados experimentais à equação de reta é medida em termos de um coeficiente, chamado coeficiente de correlação (ANTON & RORRES, 2001).

Resultados e Discussão

Os resultados das medidas experimentais de peso P, lado L e raio R para as figuras, estão listados nas Tabelas 1 e 2.

Nessas tabelas, estão incluídos os valores para as áreas das figuras, calculados a partir de dados experimentais de medidas de L e R, em que

$$A = L^2 \quad \text{(quadrado)} \qquad (10)$$

e

$$A = \pi R^2 \quad \text{(círculo)} \qquad (11)$$

A partir dos dados experimentais listados nas Tabelas 1 e 2, foram traçadas curvas experimentais relacionando o peso em função da área. A Figura 1 ilustra essa relação, para quadrados, e a Figura 2, para círculos. Para ambos os tipos de figuras (quadrados e círculos) e tipos de papel (cartão duplex preto e cartolina azul), pode-se observar um comportamento linear entre as grandezas peso e área.

Com essas observações, é possível estabelecer que o peso e a área, tanto para quadrados quanto para círculos, podem estar relacionados segundo a Eq. 1, de forma que

$$P = k_1 A \quad \text{(quadradoazul)} \qquad (12)$$

$$P = k_2 A \quad \text{(quadrado preto)} \qquad (12)$$

$$P = k'_1 A \quad \text{(círculo azul)} \qquad (12)$$

e

$$P = k'_2 A \quad \text{(círculo preto)} \qquad (12)$$

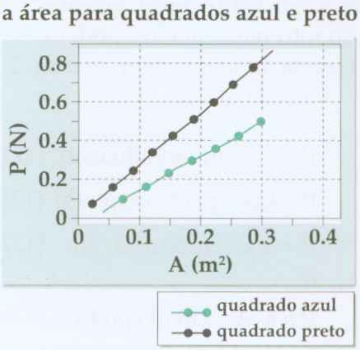
Tabela 1. Resultados experimetais para medidas do peso P em função do lado L para quadrados azul e preto. A área A das figuras foi calculada a partir de medidas de L. A precisão das medidas está indicada entre parênteses.

quadrado		quadrado azul	quadrado preto
L (±0,5 mm)	A (×10³ mm²)	P (±0,01 N)	P (±0,01 N)
200,0	40,0	0,06	0,06
250,0	62,5	0,10	0,10
300,0	90,0	0,15	0,15
350,0	122,5	0,20	0,20
400,0	160,0	0,28	0,28
450,0	202,5	0,34	0,34
500,0	250,0	0,42	0,42
550,0	302,5	0,52	0,52

Tabela 2. Resultados experimetais para medidas do peso P em função do raio R para círculos azul e preto. A área A das figuras foi calculada a partir de medidas de R. A precisão das medidas está indicada entre parênteses.

círculo		círculo azul	círculo preto
R (±0,5 mm)	A (×10³ mm²)	P (±0,01 N)	P (±0,01 N)
100,0	31,4	31,4	0,08
150,0	70,7	70,7	0,18
200,0	125,7	125,7	0,35
250,0	196,3	196,3	0,54
300,0	282,7	282,7	0,78
350,0	384,8	384,8	1,06
400,0	502,6	502,6	1,39

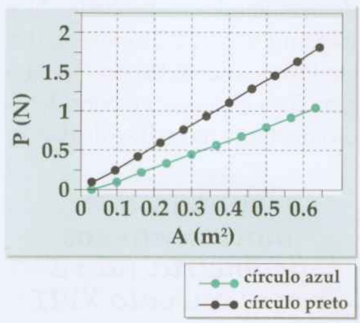
Figura 1. Correlação entre peso e a área para quadrados azul e preto



Para a obtenção das constantes de proporcionalidade nas Eqs. de 12 a 15, foi feito um ajuste linear de mínimos quadrados aos dados de peso e área correspondentes, conforme as Eqs. 9a e 9b. Essa análise, aplicada aos dados para os quadrados, fornece os valores para as constantes k_1 e k_2. De forma análoga, aplicada aos dados para os círculos, essa análise fornece os valores para as constantes k_1^c e k_2^c.

Os resultados obtidos para essas constantes, foram [1]

Figura 2. Correlação entre peso e a área para círculos azul e preto



$$k1 = 1{,}74 \pm 0{,}02 \text{ (quadrado azul)}, \quad (16)$$

$$k1 = 2{,}75 \pm 0{,}03 \text{ (quadrado preto)}, \quad (17)$$

$$k1 = 1{,}76 \pm 0{,}01 \text{ (círculo azul)}, \quad (18)$$

e

$$k1 = 2{,}80 \pm 0{,}01 \text{ (círculo preto)}, \quad (19)$$

para quadrados e círculos foram, respectivamente, 0,9995 e 0,9999. Esses números refletem uma boa qualidade para o ajuste dos dados a uma equação de reta.

Com esses resultados, é possível escrever as Eqs. de 12 a 15 para os quadrados e círculos como,

$$P = 1{,}74\,A \quad \text{(quadrado azul)}, \quad (20)$$

$$P = 2{,}75A \quad \text{(quadrado preto)}, \quad (21)$$

$$P = 1{,}76A \quad \text{(círculo azul)}, \quad (22)$$

e

$$P = 2{,}80A \quad \text{(círculo preto)}, \quad (23)$$

A constante de proporcionalidade em cada uma das equações acima representa a inclinação da reta. Em cada uma dessas equações, o valor para o intercepto da reta (em unidades de newton) com o eixo das ordenadas, obtido no ajuste linear, foi suprimido, uma vez que suas magnitudes são da ordem da incerteza do dinamômetro (0,01 N). Evidentemente que não é esperada nenhuma resposta na leitura do dinamômetro quando a área da figura geométrica for nula.

A Eq. 8 relaciona o peso P e a área A para uma figura geométrica de espessura e. Essa relação é válida tanto para uma figura na forma de quadrado quanto na forma de círculo.

A comparação entre a Eq. 8 e as Eqs. 12 e 13, permite escrever

$$k_1 = \rho_1 \varepsilon_1 g \quad \text{(quadrado azul)} \quad (24)$$

e

$$k_2 = \rho_2 \varepsilon_2 g \quad \text{(quadrado preto)} \quad (25)$$

Também, a partir da comparação entre a Eq. 8 e as Eqs. 14 e 15, é possível escrever

$$k_1' = \rho_1' \varepsilon_1' g \quad \text{(quadrado azul)} \quad (26)$$

e

$$k_2' = \rho_2' \varepsilon_2' g \quad \text{(quadrado preto)} \quad (27)$$

As quantidades $\rho_1 \varepsilon_1 g$ e $\rho_1' \varepsilon_1'$ que aparecem nessas equações são expressas em unidades de massa por unidade de área. Não

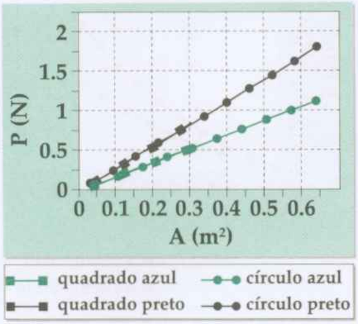
1 Os resultados obtidos para os coeficientes das correlações entre peso e área para quadrados e círculos foram, respectivamente, 0,9995 e 0,9999. Esses números refletem uma boa qualidade para o ajuste dos dados a uma equação de reta.

é surpresa, portanto, que neste trabalho se tenha obtido $k'_2 > k'_1$ e $k'_2 > k'_1$, como mostram os resultados nas Eqs. 16 e 17, e Eqs. 18 e 19, respectivamente. De fato, como todas as medidas foram realizadas em um mesmo local, o valor g é o mesmo para todos os experimentos. Esses resultados refletem a inclinação das curvas experimentais obtidas. Para as figuras pretas, as curvas experimentais têm maior inclinação comparada à inclinação das curvas de mesmo tipo de figura, mas de cor azul. Nessa comparação, entende-se comparação entre inclinação referente a figuras de mesmo tipo: quadrados pretos com quadrados azuis, e círculos pretos com círculos azuis.

Portanto, as constantes de proporcionalidade de mesmo tipo de figura k_i (quadrados azul ou preto) ou $k¢_i$ (círculos azul ou preto) refletem a quantidade de massa por unidade de área contida naquele tipo de papel.

Assim, é esperado que papéis com maior quantidade de massa por unidade de área tenham maior razão de proporção P / A. Também é esperado que o mesmo tipo de papel forneça a mesma constante de proporcionalidade, independente da forma da figura, no presente caso, independente de ser a figura um quadrado ou um círculo. Isso pode ser observado, examinando-se a Figura 3, em que estão correlacionados linearmente dados de peso em função da área para quadrados e círculos azuis (mesmo tipo de papel, diferentes formas de figuras). Nessa figura, como esperado, também estão correlacionados linearmente dados de peso em função da área para quadrados e círculos pretos.

Figura 3. Correlação entre peso e a área para quadrados azul e preto e círculos azul e preto



Essas conclusões também podem ser obtidas, comparando-se os valores para as constantes k_1 (quadrados azuis) e k'_1 (círculos azuis) apresentados nas Eqs. 16 e 18 (1,74 para quadrados azuis e 1,76 para círculos azuis), as quais concordam entre si dentro do desvio padrão calculado na análise por regressão linear (0,02 para quadrados azuis e 0,01 para círculos azuis). Como pode ser observado pelos resultados apresentados nas Eqs. 17 e 19, os valores para as constantes k_2 (quadrados pretos) e k'_2 (círculos pretos) (2,75 para quadrados pretos e 2,80 para quadrados azuis) concordam entre si dentro de um desvio percentual de 5%.

Se for utilizada balança para aferição das massas, as relações matemáticas apresentadas de peso em função da área devem ser modificadas para relações matemáticas de massa em função da área. Nesse caso, são esperados outros valores para as constantes de proporcionalidade, mas conclusões semelhantes.

Relações proporcionais ao quadrado também podem ser identificadas pela simples observação do padrão apresentado pelas curvas experimentais relacionando as grandezas peso em função do lado do quadrado e peso em função do raio do círculo. Essas curvas estão apresentadas nas Figuras 4 e 5. Pode-se observar que o comportamento entre as grandezas, em ambas as figuras, não é linear. Para as figuras na forma de quadrados, é possível supor uma relação de potência entre o peso em função do lado ao quadrado,

$$P = cL^n, \tag{28}$$

assim como para figuras na forma de círculos é possível supor uma relação de potência entre o peso em função do raio do círculo,

$$P = cR^n, \tag{29}$$

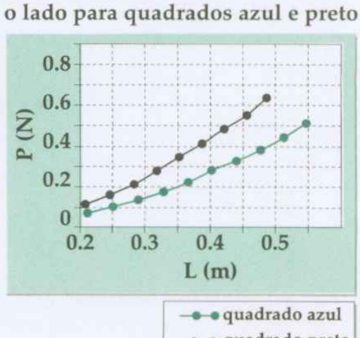
em que c e c' são constantes de proporcionalidade. Os expoentes n e n' fornecem o grau de proporcionalidade entre P e L, e entre P e R, respectivamente. O valor esperado para ambos os expoentes é 2. Isso pode ser observado, substituindo-se a Eq. 10 na Eq. 8, para obter uma relação entre peso e lado do quadrado,

$$P = \rho g \varepsilon L^2,$$

e a Eq. 11 na Eq. 8, para obter uma relação entre peso e raio do círculo,

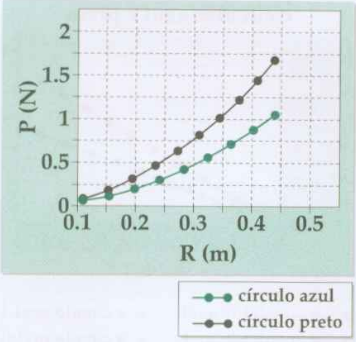
$$P = \rho g \pi R^2,$$

Figura 4. Correlação entre o peso e o lado para quadrados azul e preto



A partir dos dados experimentais das Tabelas 1 e 2, foram obtidos os seguintes resultados: (a) para o caso dos quadrados pretos, o resultado obtido para o expoente concordou com o valor esperado 2; (b) para o caso dos quadrados azuis, o resultado obtido para o expoente apresentou um erro percentual de 6% relativo ao valor esperado 2; (c) para o caso dos círculos azuis, o resultado obtido para o expoente apresentou 4% de erro percentual relativo ao valor esperado 2; e (d) para o caso dos círculos pretos, o resultado obtido para o expoente apresentou um erro percentual de 3% relativo ao valor esperado 2. Esses resultados foram obtidos usando o procedimento de linearização das relações de potência, apresentadas nas Eqs. 28 e 29, e posterior ajuste de mínimos quadrados destas funções aos dados experimentais correspondentes, apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Figura 5. Correlação entre o peso e o raio para círculos azul e preto



Conclusão

Em conclusão, a partir do reconhecimento de padrões apresentados pelos dados experimentais, procurou-se identificar o tipo de relação matemática a ser utilizada, ou seja, o tipo de proporção. Acreditamos que essa forma de abordar grandezas proporcionais para a construção de modelos matemáticos é interessante para o aluno e importante para o seu aprendizado, uma vez que apresenta-se ao aluno a possibilidade de efetivamente apropriar-se do conhecimento.

Referências Bibliográficas

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra linear com aplicações.* 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

ÁVILA, Geraldo. Razões, proporções e regra de três. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n.8, p.01-08, 1.sem. 1986.

CANTARELLI, Marizete Marconato; BARLETTE, Vania Elisabeth. Relações Proporcionais entre Grandezas e suas Aplicações na Construção de Modelos Empíricos. Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2002. (Trabalho de Final de Graduação).

TIPLER, Paul A. *Física*. 2.ed. Trad. Horácio Macedo. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984. v.1.