Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# PROVAS E DEMONSTRAÇÕES E NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: CONCEITOS, BASES EPISTEMOLÓGICAS E RELAÇÕES

## Proofs and Demonstrations and Levels of geometric thinking: concepts, epistemological basis and relationships

**Marcella Luanna da Silva LIMA**
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil
marcellaluanna@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9408-6479

**Marcelo Câmara dos SANTOS**
Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-6466-9040

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

## RESUMO

As ideias apresentadas por Balacheff evidenciam a importância do trabalho com as provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica pois, em seu estudo, ele se interessou em saber qual a natureza das provas, se é possível elucidar uma hierarquia da gênese da demonstração e quais são os meios de provocar sua evolução. Balacheff teve como base epistemológica o método das provas e refutações de Imre Lakatos, o qual descreve a Matemática como uma ciência falível, semi-empírica e que cresce por meio da crítica e correção de teorias, estimulando assim o trabalho com procura por regularidades, teste, formulação, justificação, refutação, reformulação, reflexão e generalização. Já as ideias defendidas por van Hiele evidenciam a importância de compreender os níveis de pensamento geométrico dos alunos para, assim, elaborar materiais e utilizar a linguagem adequada para cada nível. Para isso, van Hiele recebe algumas influências da psicologia da Gestalt sobre o conceito de *insight* e as leis da teoria da apercepção, como também traz alguns conceitos do processo mental racional de Selz e as ideias de Van Parreren sobre o pensamento intencional e o autônomo. Foi percebido também algumas similaridades e diferenças com a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget. Portanto, nesse artigo, os autores procuraram realizar algumas reflexões sobre as pesquisas defendidas por Balacheff e van Hiele, evidenciando alguns aspectos importantes citados por eles, destacando sucintamente as suas bases epistemológicas e estabelecendo algumas relações entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova e as demonstrações matemáticas.

**Palavras-chave:** Provas e demonstrações, Níveis do pensamento geométrico, Epistemologia.

## ABSTRACT

The ideas presented by Balacheff show the importance of working with mathematical proofs and demonstrations in Basic Education, because in his study he was interested in knowing the nature of the proofs, if it is possible to elucidate a hierarchy of the demonstration genesis and what are their evolution. Balacheff had as an epistemological basis the method of proofs and refutations of Lakatos, which describes Mathematics as a fallible, semi-empirical science that grows through the criticism and correction of theories, thus stimulating the work by means of the search for regularities, testing, formulation, justification, refutation, reformulation, reflection and generalization. Already the ideas defended by van Hiele show the importance of understanding the levels of geometric thinking of the students in order to elaborate materials and use the appropriate language for each level.

For this, van Hiele receives some influences from the Gestalt psychology on the concept of insight and the laws of the theory of apperception, but also brings some concepts of the rational mental process of Selz and the ideas of Van Parreren about intentional and autonomous thinking. We also noticed some similarities and differences with Piaget's theory of cognitive development. Therefore, in this article, the authors sought to carry out some reflections on the research advocated by Balacheff and van Hiele, highlighting some important aspects cited by them, briefly highlighting their epistemological bases and establishing some relationships between the levels of geometric thinking and the types of proof and mathematical demonstrations.

**Keywords:** Proofs and demonstrations, Levels of geometric thinking, Epistemology.

# 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Davis e Hersh (1989), a Matemática sempre desempenhou um papel especial na batalha entre o racionalismo e o empirismo. Para os racionalistas, a Matemática era o melhor exemplo para confirmar sua visão do mundo, enquanto que os empiristas afirmavam que todo conhecimento, exceto o conhecimento matemático, provinha da observação. Os empiristas geralmente não tentavam explicar como era obtido o conhecimento matemático.

Após alguns anos, Hilbert tenta empreender a tarefa de defender a Matemática, adotando uma demonstração matemática com a consistência da Matemática Clássica. Com isso, os fundamentos formalistas de Hilbert trouxeram mais certeza e confiabilidade para a Matemática, contribuindo para a sua codificação em uma linguagem formal (Davis & Hersh, 1989).

No século XX surge uma nova tendência da filosofia da Ciência, o fundamentismo, que teve como principal pilar os trabalhos de Imre Lakatos. Ele escreve um livro, intitulado Proofs and Refutations, apresentando uma Matemática totalmente diferenciada da visão formalista. Nesse livro, Lakatos apresenta a ideia da Matemática como falível, não sendo indubitável e que cresce por meio da crítica e da correção de teorias, as quais nunca estarão totalmente livres de ambiguidades ou da possibilidade de erro. Ele considerava a Matemática tão falível quanto o conhecimento do mundo externo, preocupando-se em observar o crescimento do conhecimento matemático, sendo gerado por meio de conjecturas informais e provas heurísticas de teorias já formalizadas (Silva & Moura, 2015).

Balacheff (2000) acredita que os alunos não devem ser obrigados a demonstrar, eles devem, a partir de seus argumentos, serem motivados a pensar, refutar e levantar conjecturas, fazendo com que o aluno tome para si a responsabilidade de sua aprendizagem e para que a demonstração faça sentido para ele. Para isso, é necessário levar em consideração a racionalidade[1] que eles têm inicialmente, saber como funciona e como pode evoluir, pois é a partir dela que os alunos conseguirão dar sentido a uma demonstração.

A partir das dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, Dina van Hiele-Geldof e Pierre Marrie van Hiele perceberam a relação existente entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. A ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos enquanto aprendem Geometria. Kaleff et al. (1994), Nasser e Tinoco (2003) e Oliveira (2012) afirmam que, para van Hiele, o avanço da idade cronológica não produz automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento e que decididamente poucos atingem o último nível.

Portanto, por meio de uma metodologia de pesquisa qualitativa, este trabalho é fruto de um estudo exploratório e bibliográfico realizado para a elaboração da tese da primeira autora sob orientação do segundo autor. Buscaremos, inicialmente, discutir algumas das principais ideias de Balacheff sobre provas e demonstrações, apresentando sucintamente algumas ideias de sua base epistemológica, Imre Lakatos. Além disso, buscaremos apresentar sucintamente as principais ideias do modelo de van Hiele e de suas bases epistemológicas, Gestalt, Selz, Van Parreren e Piaget. Ao final, discutimos algumas relações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova e as demonstrações propostas por Balacheff.

## 2 CONCEITOS INICIAIS DE BALACHEFF

A não utilização das provas e demonstrações matemáticas na sala de aula está relacionada à forma como o professor as apresentam aos seus alunos, pronta e acabada, pedindo para eles reproduzirem tal como mostraram, sem saber que tipo de dificuldades esses alunos terão ao realizar essa tarefa (Balacheff, 2000). Antes de apresentar a demonstração aos alunos, de acordo com o autor, é preciso ter em mente a racionalidade deles e quais são os meios possíveis para eles fazerem matemática.

Um fato importante na pesquisa de Balacheff (2000) é a ideia de distinguir as palavras *explicação*, *prova* e *demonstração*, pois, para ele essas palavras podem se

[1] Balacheff (2002, n.p) entende racionalidade como “o sistema de critérios ou regras mobilizadas quando é necessário fazer escolhas, tomar decisões ou executar julgamentos” (tradução nossa). Para o pesquisador, a racionalidade nos permite raciocinar e decidir e é então a base de qualquer processo de prova.

constituir em um obstáculo à pesquisa sobre esse assunto e levam a amalgamar diferentes níveis de atividade do aluno. Ou seja, a distinção desses termos implica aceitar, a depender do contexto, outras produções dos alunos para estabelecer a validade de uma afirmação, tais como casos particulares, exemplos ou desenhos. Assim, a *explicação* se situa no nível do sujeito locutor e para esse sujeito a explicação estabelece e garante a validade de uma proposição, a qual está sustentada por seus conhecimentos e no que constitui sua racionalidade (Balacheff, 2000).

Quando a explicação é reconhecida e aceita em determinado contexto, Balacheff (2000) chama esse novo termo de *prova*. A passagem da *explicação* para a *prova* diz respeito a um processo social pelo qual um discurso que garante a validade de uma proposição muda sua posição e passa a ser aceito por uma comunidade. Porém, essa posição não é definitiva, pois com o tempo pode evoluir simultaneamente com o avanço do conhecimento em que está ancorado. Além disso, uma prova pode ser aceita por uma comunidade, como também pode ser rejeitada por outra.

Quando a *prova* trata de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras e é o tipo dominante na Matemática, chamaremos de *demonstração*, caracterizando assim as demonstrações como gênero de discurso em sua forma estritamente codificada. Inferimos então que, para Balacheff (2000), uma *demonstração* pode ser um tipo particular de *prova*, mas nem toda *prova* é uma *demonstração*. Ou seja, a prova é considerada em um sentido mais diverso do da demonstração que é mais específica, podendo ser construída a partir de exemplos, casos particulares, desenhos ou gráficos, já a demonstração é apresentada a partir de um discurso matemático, com o rigor e o formalismo necessários à sua construção.

Balacheff (2000) discute a ideia de que, antes da existência do modelo euclidiano, os antigos matemáticos utilizaram outros meios de prova para estabelecer o caráter necessário de uma proposição ou resultado e que, portanto, a atividade matemática reconhecida como tal antecede a 'invenção' da demonstração feita pelos gregos. Por esta razão é interessante que a atividade de ensino da Matemática também siga os rumos da produção matemática que, antes de demonstrar, investiga, faz conjecturas, testa exemplos, elabora refutações, constrói novos argumentos, etc.

Balacheff (2000) afirma que a dinâmica do desenvolvimento da Matemática põe em evidência um processo fundamental: a dialética das provas e refutações. Então ele admite em seu trabalho a validade do modelo de Lakatos e usa esse modelo para analisar os processos de prova realizados por alunos na França e sua evolução no curso da construção de seus conhecimentos matemáticos, especialmente no transcurso da solução de um problema.

Balacheff (2000) afirma que, no funcionamento didático, a existência de um saber matemático de referência, seja científico ou escolar, dá ao professor o poder de decidir acerca do caráter contraditório de uma situação. Então, a tarefa do professor consiste em facilitar ao aluno a possibilidade de reconhecer este caráter contraditório das situações. Além disso, o autor afirma que nas aulas de Matemática o contraexemplo é geralmente percebido como uma catástrofe pela maioria dos professores, cuja consequência é o abandono puro e simples de posições conquistadas durante a solução do problema. Entretanto, para ele nós não podemos rechaçar o contraexemplo, pois é a partir dele que os alunos revisitam a conjectura e reexaminam a prova, estimulando assim o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Percebemos então que o trabalho de Balacheff (2000) foi verificar a aplicabilidade das ideias apresentadas por Lakatos (1978) sobre provas e refutações, confirmando assim que esse trabalho pode ser desenvolvido nas aulas de Matemática, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, levando em consideração o conhecimento e a maturidade dos alunos, retirando a ideia da Matemática como uma ciência que trata de verdade infalíveis e imutáveis e apresentando-a como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

## 3 BASE EPISTEMOLÓGICA DE BALACHEFF

Ao revisitar o livro de Balacheff (2000), Herbst (2000) percebe uma base epistemológica importante em suas discussões. A partir das obras de Imre Lakatos, Balacheff obteve a noção fundamental de que as provas e refutações estão necessariamente ligadas às concepções dos objetos matemáticos, nas quais as provas servem para a construção desses objetos e, portanto, são irredutíveis para a lógica formal.

Lakatos (1978), em sua obra clássica intitulada *A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações*, apresenta um diálogo entre professor e alunos em uma sala de aula imaginária, caracterizada por Garnica (1996) como a mostra da construção do conhecimento matemático tal como ele acontece, apresentando as trajetórias de idas e vindas. A busca da turma fictícia de Lakatos (1978) diz respeito ao interesse em resolver o seguinte problema: existe alguma relação entre o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F dos poliedros – sobretudo para os poliedros regulares? Os participantes desse diálogo, após muitas tentativas e erros, percebem que, para todos os poliedros regulares, vale a fórmula observada por Euler (V – A + F = 2). Um dos alunos se aventura no palpite de que isso pode ser aplicado a qualquer poliedro. Outros alunos tentam falsear esta conjectura, propondo provas de modos diferentes, com resultados satisfatórios.

O trabalho desenvolvido pela turma fictícia de Lakatos (1978) em resolver o problema da eulerianidade para os poliedros regulares diz respeito a um longo processo de construção de uma demonstração, que muitas vezes é ocultado quando os professores somente apresentam a demonstração aos seus alunos tal qual se encontra no livro-texto. Lakatos (1978) considera esse processo essencial, pois é a partir dele que os alunos levantam hipóteses, conjecturam, refutam, exibem contraexemplos, reexaminam as conjecturas, criam novas ideias, até conseguirem chegar a uma demonstração. E todo esse processo está de acordo com o que Balacheff (2000) propõe ao afirmar que devemos estimular nos alunos formas de pensar, levando-os a fazer conjecturas, a argumentar, a validar hipóteses, etc.

Ao final de seu texto, Lakatos (1978) discorre alguns aspectos sobre o enfoque dedutivista e o enfoque heurístico. Para ele, o estilo dedutivista diz respeito à metodologia euclidiana e começa com uma lista laboriosa feita de axiomas, lemas e/ou definições, onde os teoremas são cuidadosamente redigidos e estão carregados de pesadas condições. Nesse estilo, a Matemática é apresentada como uma série sempre crescente de verdades imutáveis e eternas, escondendo a luta e a aventura de se chegar a determinados resultados. Para Lakatos (1978), esse estilo é o pior inimigo do pensamento independente e crítico, pois discrimina o contexto da descoberta e da justificação.

Enquanto que o enfoque heurístico está preocupado em apresentar como se dá o desenvolvimento, os avanços e a criação da Matemática, permitindo conceber o saber matemático como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação e também permeável aos problemas nos vários outros campos científicos. Portanto, ao considerarmos um saber matemático desse tipo, ele pode ser o motor de inovações e de superação de obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento.

## 4 TIPOS DE PROVAS

Balacheff (2000) se interessou em saber qual a natureza das provas, se seria possível elucidar uma hierarquia da gênese da demonstração e quais seriam os meios de provar sua eventual evolução. Com isso, ele buscou analisar a natureza e a hierarquia das provas, conseguindo identificar dois tipos básicos de provas: as *pragmáticas* e as *intelectuais*. As primeiras são aquelas em que os sujeitos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Já as segundas, são aquelas em que o discurso a ser utilizado é unicamente teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura.

Para Balacheff (2000), a elaboração de uma *demonstração* necessita um nível maior de conhecimentos, pois ela se constitui em uma verdadeira teoria reconhecida como tal. Ou seja, a demonstração se fundamenta sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita socialmente. Esse é um dos fundamentos do rigor matemático. Com isso, a transição de *provas pragmáticas* a *provas intelectuais*, especialmente a *demonstração*, se apoia em três polos que interagem fortemente: o polo dos conhecimentos, o polo linguístico e o polo da validação que sustentam as provas produzidas (Balacheff, 2000).

A partir de seus primeiros trabalhos de investigação, Balacheff (2000) conseguiu distinguir quatro tipos principais de *provas pragmáticas* e *intelectuais*: o *empirismo ingênuo*, a *experiência crucial*, o *exemplo genérico* e a *experiência mental*. O autor considera uma hierarquia hipotética desses níveis de prova, evidenciada pela ordem em que será apresentada. A posição de cada tipo de prova dentro desta hierarquia é determinada pelo seu nível de exigência de generalidade e por seu nível de conceituação dos conhecimentos que exige.

Para Balacheff (2000), o *empirismo ingênuo* consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente e é uma das primeiras formas do processo de generalização. A *experiência crucial* consiste em verificar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar, no qual o aluno começa a realizar experiências e a tomar consciência de que busca por um resultado geral. A *experiência crucial* difere do *empirismo ingênuo* no sentido de que o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização e o resolve, aventurando-se na investigação de um caso que reconhece tão pouco quanto possível (Balacheff, 2000). Embora o pesquisador afirme que o *empirismo ingênuo* e a *experiência crucial* possam fornecer provas que convençam os alunos acerca da validade de uma afirmação, ele recomenda que devemos explicitar aos alunos, desde o início, que os exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é realmente necessária.

O *exemplo genérico*, para Balacheff (2000), consiste na busca por uma generalização ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição. Desse modo, o aluno justifica a partir de um exemplo o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis. A *experiência mental* se centra na ação, interiorizando-a e separando-a de sua execução sobre um representante em particular. O aluno afirma a validade de uma proposição de forma genérica e não faz mais referência ao caso particular, pois a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é sustentada pela teoria.

Aguilar Jr e Nasser (2012) compreendem que o *empirismo ingênuo* e a *experiência crucial* fazem parte do tipo de *provas pragmáticas*, para as quais os alunos recorrem a testes de validade, exemplos ou desenhos para verificar a validade de uma afirmação. Já a *experiência mental* reside no tipo de *provas intelectuais*, pois se concentra mais no discurso teórico, não necessitando mais o uso de exemplos para justificar uma afirmação. O *exemplo genérico* transita entre os dois tipos básicos de prova (*pragmática* e *intelectual*), pois o aluno está começando a generalizar uma proposição ainda baseado em exemplos.

Um aspecto interessante discutido por Balacheff (2000) diz respeito à transição entre a *experiência mental* e as *demonstrações.* Para o autor, ainda é necessário reconhecer os diferentes tipos de *provas intelectuais* que diferem tanto em seus níveis de *descontextualização*, *despersonalização* e *atemporalidade*[2], como também em seu nível de formalismo. Já do ponto de vista da *demonstração*, o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial. Assim, ainda é preciso mais estudos para verificar o que acontece durante esse processo de construção das provas e

[2] O desenvolvimento da linguagem, como uma ferramenta para o cálculo lógico e não apenas um meio de comunicação, requer em particular: "uma *descontextualização* ou renúncia ao objeto atual como um meio eficaz de executar as ações, para acessar a categoria de objetos, independentemente das circunstâncias associadas ou anedóticas de sua aparência; uma *despersonalização*, separando a ação de quem foi seu ator e da qual ela deve ser independente; uma *atemporalidade*, liberando as operações a partir da data em que foram realizadas e sua duração anedótica. Esse processo marca a transição do universo de ações para o de relacionamentos e operações" (Balacheff, 2000, p. 23).

demonstrações e se realmente há outros tipos de provas entre a *experiência mental* e a *demonstração* (Balacheff, 2000). Isto quer dizer que a *experiência mental* ainda não seria considerada uma *demonstração*, mas já é o primeiro tipo de prova dentro da categoria *intelectual*, no qual o aluno utiliza apenas o discurso teórico para validar uma afirmação.

## 5 CONCEITOS INICIAIS DE VAN HIELE

Para discutir um pouco sobre o modelo de van Hiele, buscamos uma versão em espanhol[3] de sua tese, defendida em 1957, intitulada *De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.* Os tradutores de sua tese para o espanhol afirmam que embora no contexto do modelo de van Hiele a palavra 'inzicht', ou *insight* em inglês, não tenha uma tradução unanimemente aceita em espanhol, eles optaram por traduzi-la como 'compreensão'. Assim, o único significado de 'compreensão' adotado é o que van Hiele propõe em sua tese adotando a palavra *insight*.

Inicialmente, em sua tese, van Hiele (1957) afirma que 'inzicht' ou *insight* (em inglês) é um conceito que pode se manifestar de diferentes formas e o significado dos diferentes aspectos irá variar de acordo com o contexto em que se está estudando a compreensão. Para o autor, o significado de *compreensão* em Matemática é tão fundamental que sua didática pode ser estruturada em grande medida por meio da análise da compreensão. Para van Hiele (1957), ao analisarmos o fenômeno compreensão tal como é conhecido no Ensino Superior e Secundário da Holanda, um aluno desenvolve compreensão em um determinado campo da Geometria quando, a partir de dados e relações geométricas que lhe são fornecidos, é capaz de chegar a uma conclusão em uma situação que nunca teria enfrentado antes.

Van Hiele (1957) afirma que o processo de formação da compreensão em Geometria se dá em quatro momentos. No primeiro momento se produz uma estruturação do campo perceptivo. No segundo momento a estruturação do campo perceptivo está ligada a diferentes palavras. No terceiro o processo mental acerca das palavras vai se desenvolvendo cada vez mais no terreno verbal, ou seja, a estruturação perceptiva vai se transformando, paulatinamente, em estruturação linguística. Por fim, no quarto momento, se cria certa autonomia na estruturação linguística.

[3] Corberán, R. et al. (1990). Tradução da tese de doutorado para o espanhol realizada para o projeto de investigação *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría em Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* (diretor Angel Gutiérrez) do Concurso Nacional de Projetos de Investigação Educativa do C.I.D.E (1989-91).

A partir desses quatro momentos propostos por van Hiele (1957), se o aluno realizar os três primeiros momentos, diz-se que ele desenvolveu a compreensão. Quando ele consegue chegar no quarto momento, então tem-se que ele desenvolveu uma compreensão maior. Assim, mesmo em Matemática, essa estruturação final normalmente só será lógica quando o professor levar intencionalmente o aluno nessa direção. Por isso, ao desenvolver-se a compreensão geométrica nos encontramos com três estruturações: a estrutura perceptiva, a linguística e a lógica. Sendo, portanto, necessário levar em consideração a linguagem como parte integrante do material adotado pelo professor.

Por fim, Van Hiele (1957) apresenta algumas condições práticas que hão de ajudar na formação da compreensão, que são: o interesse do aluno por determinado tema, o aprofundamento nos assuntos, a utilização adequada do material didático, o contato pessoal com outros alunos e os mecanismos de controle, para os quais o professor pode ou utilizar perguntas a fim de verificar se o aluno é capaz de chegar à solução de um problema sem a sua ajuda ou fazer uma leitura do assunto de forma diferente de como o aluno aprendeu.

## 6 BASES EPISTEMOLÓGICAS DE VAN HIELE

Para estudar o conceito da compreensão, van Hiele (1957) discutiu sobre o lugar que ela ocupa nas principais psicologias da aprendizagem e do pensamento. Para isso, ele discute sucintamente em sua tese acerca de a Psicologia da Gestalt, o processo mental racional de Selz e a contradição e a colaboração entre o pensamento intencional de Van Parreren. Além disso, apresentamos algumas similaridades e diferenças entre as ideias de van Hiele e a Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget, segundo Mateya (2008).

Inicialmente, van Hiele (1957) afirma que a psicologia do pensamento de Selz oferece uma abordagem que incentiva a aprendizagem com compreensão, ao afirmar que o sistema de complementações de complexos, princípio básico do pensamento, é o modo mais racional para solucionar problemas dentro da Geometria. Van Hiele (1957) afirma que ao considerarmos esta colocação de Selz, teremos então a resolução de problemas como o meio por excelência para praticar o desenvolvimento do pensamento, ou seja, teremos uma Geometria com um valor formativo máximo. Contudo, o pesquisador alerta que não devemos esquecer que o material adotado deve estar suficientemente estruturado, antes de estruturar a resolução do problema. Ou seja, o material não pode ser tão complicado que desvie a atenção do problema real, nem pode ser tão esquemático que mostre uma articulação insuficiente do problema.

Van Hiele (1957) se ocupa, de modo especial, com a psicologia da Gestalt, já que ela oferece de modo particular uma aprendizagem que pode ajudar a desenvolver a compreensão. O autor afirma que a teoria da apercepção da Gestalt já é muito atrativa quando se leva em conta a estruturação na percepção e indica que as quatro leis da teoria da apercepção são: *lei da analogia*, da *proximidade*, da *oclusão* e da *continuação correta*. A primeira está relacionada às figuras e transformações análogas que geralmente são percebidas como uma unidade. A segunda, as partes que se encontram próximas se percebem mais facilmente como unidades. A terceira diz respeito às figuras fechadas, que se percebem mais facilmente que as figuras abertas e, por conta disso, a percepção tende a fechar as figuras que se encontram abertas. A última lei afirma que na percepção se tende a completar uma figura sem alterar sua estrutura.

Além da Gestalt, van Hiele (1957) ressalta que também devemos nos concentrar na autonomia do processo de aprendizagem, como fez Van Parreren. Este último afirma que a valência é um conceito funcional e a aprendizagem autônoma manifesta-se assim na formação de valências. Ou seja, para se entender esta formação devemos levar em consideração duas fases: a receptiva, em que se formam as valências, e a de estruturação, em que se formam as estruturas. Por regra geral, a formação de valências se desenvolve com maior fluidez do que a formação de estruturas. Então quando o aluno tem a atitude receptiva correta, o professor pode incentivá-lo diretamente às valências. Já quando ele tem a atitude de estruturação ativa correta, ele chegará, sem dúvida, com a devida orientação do professor, a formar padrões mentais. Nesse sentido, devemos buscar meios para que os alunos adquiram compreensão em situações mentais mais abstratas. Se a estruturação não funciona em determinada situação, então deveremos conseguir uma formação em um contexto mais simples (Van Hiele, 1957).

Inspirado nas ideias de Piaget, quanto à evolução da inteligência, van Hiele (1957) descreveu a existência de diferentes níveis de raciocínio quanto aos conceitos geométricos e o desenvolvimento desses níveis são mais influenciados pela educação e incentivo adotados do que pela maturação e idade dos sujeitos. De acordo com Mateya (2008), as similaridades entre essas duas ideias residem no fato de que os alunos devem construir ativamente seu próprio conhecimento e devem passar por níveis mais baixos de pensamento geométrico antes de alcançar os níveis mais altos e essa passagem leva uma quantidade considerável de tempo. Enquanto Piaget sugere que o movimento entre os estágios depende da atividade e se concentra em descrições da progressão e maturidade do pensamento, van Hiele sugere que o movimento entre os níveis depende da linguagem e busca ajudar os professores a melhorar os métodos de instrução da Geometria, descrevendo os níveis de pensamento dos sujeitos (Mateya, 2008).

Portanto, van Hiele (1957) espera que para que os alunos adquiram efetivamente a compreensão em Geometria, necessita-se que o professor trabalhe com problemas novos ou situações novas, atuem de forma adequada, elaborem perguntas-compreensão e, acima de tudo, que os problemas trabalhados não sejam mecânicos e de simples aplicação de fatos e regras já construídos pelo aluno. Ou seja, é preciso instigar o raciocínio do aluno de forma que ele seja levado a questionar, interpretar, raciocinar, conjecturar, argumentar, verificar e provar o que está sendo pedido.

## 7 NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O casal van Hiele, ao identificar as dificuldades encontradas por seus alunos do curso secundário na Holanda, elaborou um modelo estabelecendo a relação entre a compreensão e o nível de maturidade geométrica do aluno. Nesse sentido, a proposta elaborada pelo casal pode ser usada tanto para orientar na formação quanto para avaliar as habilidades do aluno. A ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem Geometria.

Uma das principais características desse modelo é a distinção entre os cinco níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria. Em resumo, esses níveis são atingidos em sequência e, por meio de uma instrução adequada, o aluno vivencia cinco fases ao progredir de um nível para outro superior.

No primeiro nível, *visualização* ou *reconhecimento*, os alunos reconhecem as figuras por sua aparência global, mas não conseguem identificar explicitamente suas propriedades. Ou seja, os alunos, nesse nível, podem aprender o vocabulário geométrico, identificam figuras geométricas, reproduzem uma figura dada, associam o nome à figura, reconhecem nos elementos do meio ambiente representações de figuras geométricas, porém eles não conseguem reconhecer as figuras por suas propriedades e não enxergam as características de uma figura em outra da mesma classe (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff et al., 1994; Dall'Alba, 2015).

No segundo nível, *análise*, o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si. Isto quer dizer que ele começa a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são, então, usadas para conceituarem classes e formas, porém ele ainda não explicita inter-relações entre figuras e propriedades (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff et al., 1994; Dall'Alba, 2015).

No terceiro nível, *dedução informal* ou *ordenação*, os alunos relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não dominam o processo dedutivo. Dessa forma, eles conseguem formar definições abstratas, estabelecendo inter-relações das propriedades nas figuras e entre figuras. Esses alunos podem distinguir entre a necessidade e as suficiências de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico, como também conseguem acompanhar e formular argumentos e provas informais, porém não compreendem o significado de uma dedução como um tudo nem têm condições de elaborar argumentos e provas formais (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff et al., 1994; Dall'Alba, 2015).

No quarto nível, *dedução formal*, o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema e já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. Além disso, nesse nível, o aluno pode construir provas e não somente memoriza-las, como também percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira, porém ainda não sente a necessidade do rigor. Por fim, no quinto e último nível, *rigor*, o aluno já compreende a importância do rigor nas demonstrações e é capaz de analisar outras geometrias, tais como a Geometria Não-Euclidiana. Além disso, ele consegue utilizar sistemas dedutivos abstratos, como também é capaz de fazer ligações entre os conceitos e desenvolver, às vezes, novos postulados (Van Hiele, 1957; De Villiers, 2010; Nasser, 1992; Kaleff et al., 1994; Dall'Alba, 2015).

Além disso, as principais características do modelo que auxiliam na orientação da prática docente são:

> - *Hierarquia:* os níveis obedecem a uma sequência, isto é, para atingir certo nível o indivíduo deve passar antes pelos níveis inferiores;
> - *Linguística:* cada nível tem sua própria linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações;
> - *Intrínseco e extrínseco:* o que está implícito num nível torna-se explícito no próximo nível;

- *Avanço:* o progresso entre os níveis depende mais de instrução do que da idade ou maturidade dos alunos;
- *Desnível ou combinação inadequada:* não há entendimento entre duas pessoas que estão raciocinando em níveis diferentes ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno (Nasser, 1992, p. 33).

Por isso que é tão importante que o professor primeiro identifique o nível de seus alunos para, em seguida, utilizar a linguagem e a instrução adequadas. Conseguindo associar essa linguagem e instrução, o aluno será capaz de progredir de nível se passar pelas experiências adequadas, e para que ele progrida de um nível para outro superior é necessário que ele vivencie cinco fases de aprendizagem, que devem ser consideradas em cada nível subsequente. São elas:

- *Fase 1 – questionamento ou informação*: professor e alunos estabelecem um diálogo versando sobre o material de estudo deste nível. Neste diálogo são feitas observações, questões são levantadas e o vocabulário específico do nível é introduzido. Nesta fase, o professor percebe quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto e estes percebem qual direção os estudos tomarão;
- *Fase 2 – orientação direta*: os alunos devem explorar o assunto de estudo através de materiais cuidadosamente selecionados pelo professor que os levarão gradualmente a se familiarizarem com as estruturas características deste nível. As atividades, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas específicas e objetivas;
- *Fase 3 – explicitação*: com base nas experiências anteriores, os alunos refinam o uso de seu vocabulário, expressando verbalmente suas opiniões emergentes sobre as estruturas que observam. O papel do professor, nesta fase, deve ser mínimo, deixando o aluno independente na busca da formação do sistema de relações em estudo;
- *Fase 4 – orientação livre*: nesta fase, as tarefas apresentadas ao aluno devem ser de múltiplas etapas, tarefas que possibilitam várias maneiras de ser completadas ou tarefas em aberto. É fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver as tarefas, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos;
- *Fase 5 – integração*: esta fase é de revisão e síntese do que foi estudado, visando uma integração global entre os objetos e relações com a consequente unificação e internalização num novo domínio de pensamento. O papel do professor nesta fase é o de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem todavia introduzir ideias novas ou discordantes (Kaleff et al., 1994, p. 28).

Ao término da quinta fase de instrução, os alunos passam para um novo nível de pensamento geométrico e então o antigo nível de raciocínio é substituído por um novo nível, e assim os alunos estão aptos a refazerem as fases de instrução no próximo nível. Além disso, Nasser e Sant'Anna (2010) ressaltam que essas fases de instrução descritas acima podem ocorrer concomitantemente e em diferentes ordens, porém a última fase só deve se dar após as anteriores terem sido desenvolvidas, pois as anteriores irão fornecer a estrutura necessária para que a aprendizagem ocorra.

## 8 RELAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVAS E AS DEMONSTRAÇÕES PROPOSTAS POR BALACHEFF

Battista e Clements (1995) afirmam que van Hiele considera que o desenvolvimento do pensamento dos alunos sobre o raciocínio e a prova é uma evolução que depende da crescente compreensão do conhecimento geométrico. Ou seja, um aluno só estará pronto para provar alguma coisa se a compreensão do conteúdo estiver em um nível apropriado, por exemplo, o da *dedução formal*, tendo-se aliado o material e a linguagem adequada para esse nível. Além disso, esses pesquisadores apresentam uma relação entre os níveis de pensamento geométrico e o processo de justificativa e prova abordada por Van Dormolen (1977). Para eles, somente após o nível 3 é que os alunos podem justificar as declarações formando argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, ou seja, após o nível 3, os alunos já são capazes de construir demonstrações. Antes desse nível, é possível trabalhar processos de argumentações e justificações com os alunos, a partir de atividades que desenvolvam seu raciocínio matemático.

De Villiers (1987) também discute um pouco sobre os níveis de van Hiele e o raciocínio dedutivo e a prova. Para ele, o raciocínio dedutivo ocorre apenas no nível 3, pois é quando a rede de relações/implicações lógicas entre propriedades é estabelecida, enquanto que o significado de dedutivo formal e demonstração só é entendido no nível seguinte (o quarto). Dessa forma, os alunos que estão nos níveis 1 e 2 em relação a um tópico específico não irão entender instruções direcionadas às atividades e significados dos níveis mais altos. Como eles não possuem essa rede de implicações lógicas, acabam experimentando uma determinada prova como uma tentativa de verificação do resultado. No entanto, uma vez que ele não duvida da validade de suas observações empíricas, então ele experimenta tal prova como sem sentido, pois está provando o que já lhe é óbvio.

Nasser e Tinoco (2003) também argumentam que nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e por isso não percebem que a demonstração é necessária. Senk (1989) acrescenta que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas de aula cujos alunos estejam pelo menos no nível 3, pois antes disso eles não conseguirão acompanhar o professor e poderão não perceber a importância dela na Matemática. Usiskin (1982) também observou que os níveis de pensamento geométrico são sim um bom indicador quando se trata de prever o sucesso na escrita e elaboração de provas.

Jaime e Gutiérrez (1994) e Gutiérrez e Jaime (1998) descrevem o desenvolvimento de provas dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele. Para os pesquisadores, os alunos do nível 1 não entendem o conceito de prova. Para os do nível 2, uma prova consiste em alguma verificação experimental da verdade da propriedade em um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os alunos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os alunos do nível 3 são capazes de fazer deduções e provas informais e podem verificar a veracidade de uma afirmação a partir de alguns exemplos, mas eles já procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados.

Os alunos do nível 4 de van Hiele já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para uma prova, pois eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer implicações com base em definições, axiomas e teoremas já demonstrados. Por fim, os alunos do nível 5 já são treinados para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, podendo apreciar a consistência, a independência e a integridade dos axiomas dos fundamentos da Geometria. Além disso, nesse nível, os alunos já têm a capacidade de compreender a importância da precisão ao lidar com os fundamentos e relações entre estruturas matemáticas e só se desenvolve em alunos da Universidade que possuem boa capacidade e preparo em Geometria (Jaime & Gutiérrez, 1994; Gutiérrez & Jaime, 1998; Vargas & Araya, 2013).

A partir dessas descrições, conseguimos estabelecer uma relação mais específica entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova e as demonstrações propostas por Balacheff. No nível 1 (*visualização*), os alunos não entendem o conceito de prova ou de demonstração e por isso eles não produzem nenhum tipo de construção empírica ou dedutiva, pois só reconhecem as figuras por sua aparência física global, não são capazes de ler uma definição matemática nem de aceitar qualquer relação entre duas famílias diferentes.

No nível 2 (*análise*) os alunos já poderão verificar experimentalmente, a partir de um ou alguns casos, a verdade de uma propriedade, pois já compreendem que as figuras geométricas são formadas por partes e que são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda não são capazes de relacionar algumas propriedades a outras. Logo, conseguimos distinguir dois tipos específicos de prova (dentro das *pragmáticas*) de Balacheff (2000) que podem ser construídos no segundo nível, são eles: o *empirismo ingênuo*, consistindo em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos particulares, e a *experiência crucial*, buscando verificar para um caso especial, geralmente familiar, pois começa a realizar experiências e a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

No nível 3 (*dedução informal*) os alunos poderão fazer deduções e provas informais, pois a sua capacidade de raciocínio formal (matemático) começa a ser desenvolvida, mas ainda está apoiada na manipulação, por isso ainda não conseguem organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações. Assim, conseguimos identificar apenas um tipo de prova proposto por Balacheff (2000) que venha a ser construído nesse nível, o *exemplo genérico*, que se encontra na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, pois o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com a teorema relacionada a esta proposição.

No nível 4 (*dedução formal*) os alunos já poderão entender e escrever provas matemáticas formais e as figuras específicas são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para estas provas, pois elas já têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a verdade de uma afirmação de forma genérica. Além disso, os alunos já têm um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, pois já entendem e executam o raciocínio lógico formal, mas ainda não sentem a necessidade do rigor matemático. Logo, conseguimos identificar apenas um tipo de prova proposto por Balacheff (2000) que pode ser construído nesse nível, a saber: *experiência mental*, que se encontra na categoria das *provas intelectuais*, pois os alunos afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, pois a validação é sustentada apenas pela teoria.

Considerando que Balacheff (2000) afirma que a *demonstração* é entendida como uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras, inferimos que ele não entende a *experiência mental* como a *demonstração* em si, pois ele próprio argumenta que existem outros tipos de *provas intelectuais* na transição da *experiência mental* para a *demonstração*, diferindo em seu nível de formalismo. Compreendendo que no nível 5 (*rigor*) de van Hiele os alunos já entendem a importância do rigor das demonstrações e são capazes de analisar outras Geometrias, acreditamos que esse nível está além do tipo de prova *experiência mental*, pois aqui os alunos já têm a capacidade de compreender a importância da precisão ao lidar com os fundamentos e relações entre as estruturas matemáticas. Por conta disso, inferimos que o nível 5 está associado com as *demonstrações*, uma vez que elas se fundamentam sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita matemática e socialmente, tendo como um dos fundamentos o rigor matemático.

Portanto, somente com o pensamento geométrico desenvolvido, é possível que os alunos construam e elaborem diferentes tipos de prova, podendo também chegar a elaborar demonstrações. Conforme recomendação de Nasser e Tinoco (2003), é preciso auxiliar os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico-dedutivo e a habilidade de argumentar. E para isso é preciso utilizar as provas e demonstrações de modo a propiciá-los o *fazer matemática*, envolvendo experimentações, conjecturas, refutações, argumentações e justificações. De modo que esses alunos consigam tanto compreender a Matemática quanto refletir acerca de a evolução do pensamento matemático por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica (Caldato, Utsumi & Nasser, 2017). Ou seja, a ideia de se trabalhar com as provas e demonstrações é que os alunos sejam levados, a partir de procedimentos empíricos ou não, a refletir e conjecturar por meio da intuição, observação, analogia, experimentação, indução e dedução.

## REFERÊNCIAS


Aguilar Jr, C. A., & Nasser, L. (2012). Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. *Vidya*. Recuperado de https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/278/254

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. In F. L. Lin (Ed.). *Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*. Taipei, Taiwan: NSC and NTNU. Reprinted in *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, 109*. Recuperado de http://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/texto%20prova%20balacheff.pdf

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Douglas_Clements/publication/258932986_Geometry_and_proof/links/5a6ec0c3aca2722c947f3ac5/Geometry-and-proof.pdf

Caldato, J., Utsumi, M. C., & Nasser, L. (2017). Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. *Revista Triângulo*. Recuperado de http://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583/pdf

Dall'Alba, C. S. (2015). *Possibilidade de utilização do software GeoGebra no desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1989). *A experiência matemática*. 4. ed. Rio de Janeiro: F. Alves.

De Villiers, M. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory: Some critical comments*. University of Stellenbosch: RUMEUS. Recuperado de http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf.

De Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*. Tradução de Celina A. A. P. Abar. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/5167/3696

Garnica, V. A. M. (1996). Lakatos e a filosofia do Provas e Refutações: contribuições para a educação matemática. *Educação & Sociedade*, 56, 431-451.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf

Herbst, P. G. (epílogo). (2000) ¿A dónde va la investigación sobre la prueba?. In Balacheff (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. In S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica em educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. In *Proceedings of the 18th PME Conference* (pp. 41-48). Lisboa, Portugal: PME. Recuperado de https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut94a.pdf

Kaleff, A. M. et al. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van Hiele. *Bolema*. Recuperado de http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10671

Lakatos, I. (1978). *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar.

Mateya, M. (2008). *Using the van Hiele theory to analyse geometrical conceptualisation in grade 12 students: a namiban perspective* (Dissertação de Mestre em Educação). Rhodes University, África do Sul.

Nasser. L. (1992). Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. *Boletim GEPEM*, 29, 21-25.

Nasser, L., & Sant'Anna, N. F. P. (2010). *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. 2 Ed. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Editora do IM/UFRJ.

Nasser, L., & Tinoco, L. A. A. (2003). *Argumentação e provas no ensino de Matemática*. 2 Ed. Projeto Fundão. Rio de Janeiro: Editora do IM/UFRJ.

Oliveira, M. C. (2012). *Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir do estudo de sólidos geométricos*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.

Silva, G. H. G., & Moura, A. Q. (2015). O falibilismo de Lakatos e o trabalho com investigações matemáticas em sala de aula: possíveis aproximações. *Acta Scientiae*. Recuperado de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/910

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA).

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria). (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán et al. Universidade de Utrecht: Utrecht, Holanda.

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de van Hiele e la enseñanza de la Geometría. *UNICIENCIA*, v. 27, n. 1, 74-94.

# NOTAS

## TÍTULO DA OBRA

Provas e Demonstrações e Níveis do pensamento geométrico: conceitos, bases epistemológicas e relações.

**Marcella Luanna da Silva Lima**
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática
Professora Substituta
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Práticas Educacionais e Currículo, Natal, Brasil
marcellaluanna@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9408-6479

**Marcelo Câmara dos Santos**
Doutor em Sciences de Leducation
Professor aposentado do Colégio de Aplicação
Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Recife, Brasil
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br
https://orcid.org/0000-0002-6466-9040

**Endereço de correspondência do principal autor**
Av. Dom Moisés Coelho, 344, ap. 505, 58040-760, João Pessoa, PB, Brasil.

**AGRADECIMENTOS**
Agradeço ao meu orientador por ter me ajudado na escrita deste trabalho.

**CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA**
**Concepção e elaboração do manuscrito:** M. L. S. Lima, M. C. dos Santos
**Discussão dos resultados:** M. L. S. Lima, M. C. dos Santos
**Revisão e aprovação:** M. L. S. Lima, M. C. dos Santos

**CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA**
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

**FINANCIAMENTO**
Não se aplica.

**CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM**
Não se aplica.

**APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA**
Não se aplica.

**CONFLITO DE INTERESSES**
Não se aplica.



**PUBLISHER**
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

**EDITOR**
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

**HISTÓRICO**
Recebido em: 26-07-2019 – Aprovado em: 22-04-2020.