3. *Número natural como objeto matemático.* Esta concepción se manifiesta a finales del siglo XIX con las teorías formales de los números naturales. Mediante estas teorías, el número natural ya es un objeto matemático en sí mismo y definido oficialmente. No obstante, también hay manifestaciones de esta concepción con los griegos, en las escuelas pitagórica, aristotélica y euclidiana, pues en éstas el interés estuvo en descubrir y demostrar propiedades de los números en sí mismos, independientes de sus usos. Esta concepción es de tipo estructural.

Las representaciones empleadas varían de acuerdo a cada teoría:

- En la escuela pitagórica, mediante configuraciones puntuales.
- En los Elementos de Euclides, con segmentos, pero no desde una interpretación geométrica. También hay representaciones de tipo verbal, en la manera como se desarrollan las demostraciones.
- En las teorías conjuntistas como la de Frege o Zermelo, se emplean conjuntos, funciones con la notación propia de estos.
- Y en las presentaciones axiomáticas, caracteres o letras que representan los números.

Referencias bibliográficas

BELL, E. T. (2002) *Historia de las matemáticas*. Sexta edición. Fondo de Cultura Económica.

BOYER, C. (1986) *Historia de la Matemática.* Editorial Alianza Universidad. Madrid.

BEDOYA, L. (2003) *Peano, Lawvere, Peirce: tres axiomatizaciones de los números naturales*. Trabajo de grado para optar al título de Profesional en Matemática con énfasis en estadística. Universidad del Tolima. Ibagué.

CAMPIGLIO, A. et al. (1992) *De los Dedos a la Calculadora. La Evolución del Sistema de Cálculo*. Ediciones Paidós. Barcelona.

CASTRO, E. et al (1996) *Números y Operaciones*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid.

DEVLIN, K. (2002) *El Lenguaje de las Matemáticas*. Mannon Troppo.

GÓMEZ, B. (1993) *Numeración y Cálculo*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid.

IFRAH, G. (1987) *Las Cifras. Historia de una Gran Invención*. Alianza Editorial. Madrid.

LUQUE, C. et al. (2002) *Actividades Matemáticas Para el Desarrollo de Procesos Lógicos. El Proceso de Contar y el Proceso de Inducir*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

MORA; L. et al. (2004) Concepciones de Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre Números Reales. *Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.*

NEWMAN, J. (1997) *Sigma. El Mundo de las Matemáticas.* Tomo I y IV. Editorial Grijalbo. Barcelona.

PETERSON, et al. (1969) *Teoría de la Aritmética*. Ed. Limusa-Wiley S.A. México.

TEMPLE, E. (1997) *La Reina de las Matemáticas*. En: NEWMAN, J. Sigma. El mundo de las Matemáticas. V. 4. Ed. Grijalbo.

RICO, L. (1998) *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. En: Revista de Educación de la Universidad de Granada. V. 11. Separata.

ROMERO, I. (1997) *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción*. Colección Mathema. Ed. Comares. Granada.

VERA, F. (1970) *Científicos Griegos.* Aguilar S.A. de Ediciones. Madrid.

Algunas reflexiones en torno a la validación de una generalización matemática

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO. MEDELLÍN

JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA

Resumen

En la actualidad existen diferentes perspectivas para la iniciación al álgebra escolar, entre ellas se destacan la perspectiva histórica, de solución de problemas, la funcional, de modelación y la de generalización (en cuanto a patrones numéricos y geométricos, y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas). El presente documento en intenta plantear algunas reflexiones en torno a esta última perspectiva, la de la generalización, en cuanto a sus procesos de validación. Estas reflexiones, se convierten en un avance de la investigación: “Herramientas para la validación de una generalización matemática” realizada en el ITM. Medellín; las cuales pueden ser de utilidad en el momento de pensarse actividades para introducir el álgebra en la escuela básica.

Introducción

La generalización es un proceso al cual algunos investigadores en Educación Matemática han dedicado varios trabajos; Mason (1999,16) afirma que la generalidad es la vida de las matemáticas y que el álgebra es lenguaje con el que se expresa dicha generalidad; Arzaquiel, (1993) hace una reflexión sobre dicho proceso, los errores que se pueden presentar y sugiere cierto tipo de actividades para el trabajo en el aula. Por otro lado Radford (1996) llama la atención sobre los procesos de validez en el proceso de la generalización.

*La generalización está presente en muchos contextos, de está forma, en muchas de las situaciones de nuestro diario acontecer se presenta haciendo referencia a eventos donde "generalmente ocurre que..." lo cual es interpretado como "casi siempre...". En el contexto de las matemáticas esta misma palabra exige el cumplimiento de la propiedad para todos los elementos de una colección determinada; p*ara poder generalizar una verdad individual a todo un dominio, el elemento del dominio para el cual se conoce dicha verdad ha de ser un elemento cualquiera que en nada especial se diferencia de los demás. *En el campo de la Educación Matemática este término se encuentra como un proceso que involucra el reconocer en diferentes patrones (aritméticos y geométricos) una serie relaciones de variantes e invariantes entre los diferentes términos y un modo sucinto para expresarlo.*

La generalización como herramienta para la introducción al álgebra escolar

Muchas veces en el aula de clase no se hace claridad sobre el significado y las diferentes variables que intervienen en el proceso de generalización; con frecuencia se tiende a hacer limitaciones a este proceso, en palabras del grupo Azarquiel (1993, p 30):

generalizar no es sólo pasar de una colección de casos particulares a una propiedad común, a una expresión que las englobe ni tampoco es definir, a partir de las propiedades de un objeto un campo de objetos caracterizados por cumplirlas (por ejemplo un cuadrilátero tiene dos diagonales, qué figuras tiene sólo dos diagonales?). también se generaliza cuando se transfieren a situación propiedades que se cumplen en otras, y, en general cuando se amplía el ámbito de definición de una ley.

Mason (1996) por su parte afirma:

> La generalización es usualmente tomada como una actividad inductivamente empírica en la cual uno acumula muchos ejemplos y detecta el patrón. Pero la generalización más poderosa es usualmente bastante diferente. Hilbert (Courant, 1981) y Davydov (1990) se refieren ambos al hecho de dominar un solo ejemplo que, con un énfasis apropiado y la consecuente ignorancia de rasgos especiales, sirve como un ejemplo genérico en el cual puede ser leído lo general. Eso no es un rasgo distante de los matemáticos avanzados, pero puede ser experimentados en todos los niveles.

La generalización como cualquier otro proceso sugiere el desarrollo de una serie de habilidades que dan sentido a dicho proceso y el algunos caso se convierten en criterios para categorizar los distintos razonamientos que en él se pueden encontrar. En este orden de ideas Mason (1999, p 17) sugiere algunos aspectos que deben tenerse en cuenta en proceso de la generalización, a saber: a) la visión de la regularidad, la diferencia, la relación (el ***ver***), b) su exposición verbal (***decir, expresar***) y c) su expresión escrita, de la manera mas precisa y sucinta posible (***registrar***).

'ver' hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación (ver un patrón puede ocurrir después de un periodo de tiempo trabajando con un número de ejemplos particulares), y con frecuencia esto cuando se logra la identificación de un algo común, logro que va acompañado de una sensación de regocijo. El 'decir', ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular, en palabras esto que se ha reconocido. 'Registrar' es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos).

La validación: Una fase en el proceso de generalización

En algunas oportunidades, el proceso de generalización en una situación termina cuando los estudiantes registran lo que han observado en la misma; pocas veces se realiza un proceso de reflexión con aquello que los estudiantes "ven, dicen y registran". De este aspecto surgen entonces una serie de interrogantes entre los cuales cabe destacar: ¿Quién valida el resultado de una generalización? ¿bajo qué criterios se valida en aprendizaje? ¿Cómo se establece la validez del conocimiento matemático en la escuela?. En la mayoría de los casos en las aulas de clase, se considera válido todo aquello que resulta de aspectos como: la autoridad del docente, la agilidad perceptual de los estudiantes, el cumplimento para unos casos particulares de expresión general, entre otros. Algunos investigadores se han preocupado por los procesos de validación en la generalización, así por ejemplo Radford

(1996) llama la atención argumentando que desde el punto de vista didáctico es preciso tomar en cuenta que la generalización depende de los objetos matemáticos que se estén generalizando y agrega que la generalización no es una actividad libre de contexto pues hay tipos de generalizaciones que pueden ser todos muy diferentes. Es necesario entonces dedicar tiempo a generar reflexiones en torno a la naturaleza y validación de los procesos de generalización en patrones aritméticos y geométricos[1]; aquí algunas de ellas:

La generalización en patrones geométricos parece tener unas características particulares y significativamente diferentes a la generalización en patrones aritméticos. En primer lugar podemos ver que en los patrones geométricos es posible identificar una serie de ***"variables visuales"*** que en los patrones aritméticos por naturaleza misma no existen. Algunas de estas variables son el agrupamiento y la distribución...

Variable "Agrupamiento": cuando se presenta a los estudiantes una secuencia geométrica es imposible predecir una única forma de asociar o agrupar los diferentes unidades del patrón; existen variadas formas de asociar los elementos de un patrón geométrico cada una de las cuales orientaría en proceso de generalización a alcanzar determinado tipo de expresión simbólica, este tipo de variable se ilustra en el siguiente ejemplo:

Se tienen piscinas de forma hexagonal y se desea cubrir su contorno con baldosas de igual forma como se muestra en la siguiente figura.

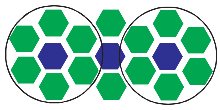
La siguiente tabla, recoge los primeros datos de este patrón:

n: Posición

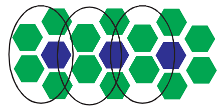
$f(n)$: Número de baldosas hexagonales alrededor de las piscinas

n	1	2	3	...
$f(n)$	6	10	14	...

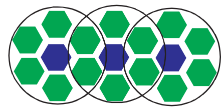
Algunas de las diferentes formas de agrupamiento pueden ser: para $n = 3$



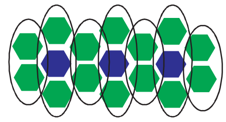
Esto llevaría a la expresión
$6(n - 1) + 2(n - 2)$



Esto conduciría a la expresión
$4n + 2$



Este tipo de agrupamiento sugiere la expresión
$6n - 2(n - 1)$



Esto sugiere para cualquier n, la expresión: $2(2n + 1)$

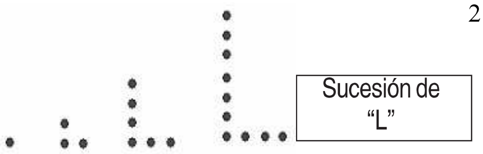
Es importante notar en este caso que todas las expresiones obtenidas en las diferentes formas de agrupación resultan ser equivalentes; este hecho parece ser lo suficientemente convincente para **justificar** este proceso de generalización, de hecho, Azarquiel (1993, p 43) afirma que "el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes. Precisamente esta equivalencia es la que se puede colocar de manifiesto y servir de demostración en un cierto sentido, al construir distintas expresiones que describen una misma realidad"[2]. La incertidumbre con respecto a la validez en la expresión simbólica, parece resuelto en este patrón por medio de la "variable agrupamiento". Sin embargo es preciso plantearse la pregunta ¿con cualquier tipo de agrupamientos en la secuencia, se obtendrá "siempre" expresiones equivalentes? Una aproximación parcial a esta pregunta apuntaría a una respuesta positiva pues aunque existen muchas mas expresiones que satisfacen algunos datos de la secuencia (i.e. $\frac{n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 225n^2 + 754n + 120}{120}$ satisface las condiciones del problema para los primero cinco casos particulares), sin embargo, según Villa (2001) dichas expresiones (polinómicas) tiene un grado igual o superior al número de casos particulares en los cuales se desean que coincidan, lo cual hace, poco viable encontrar dichas expresiones por medio de agrupamientos en los elementos de la secuencia.

Variable "Distribución" es común encontrar diferentes tipos de patrones que al tratar de generalizarlos pueden llevar a una misma expre-

[1] Utilizó el término *patrones aritméticos y geométricos* en lugar de *patrones aritmético-geométricos* porque considero que ambos tienen características muy diferentes que pueden quedar ocultas al mencionarlas como un solo tipo de patrón.

[2] En esta cita el subrayado lo he hecho para resaltar la idea de demostración en relación con la de validación

sión simbólica por ejemplo los dos siguientes patrones pueden obedecer a la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$.



En ambas sucesiones es posible observar que con una reorganización de las piezas de una de las figuras es posible obtener la otra, esta forma cualquier expresión general para una de ellas, es también una expresión para la otra.

En la generalización de ***patrones aritméticos***, se colocan en juego una serie de habilidades con el trabajo con números, así por ejemplo, dada la sucesión de números $1,\ 3,\ 6,\ 10,...$ *es posible que el estudiantes observe que "la secuencia obtenida con las diferencias entre dos elementos consecutivos de la sucesión da como resultado la sucesión de números naturales" o que "las segundas diferencias entre dos elementos consecutivos 'siempre' es constante"*, pero, ¿son estas observaciones hechos suficientes para garantizar la existencia de una única expresión general?. En efecto, el estudiante puede que después de algún tiempo llegue a que la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ representa estos términos de la sucesión y con esto quede satisfecho. En este caso se hace referencia a Radford (1996) cuando afirma que un procedimiento de generalización **g** nos lleva a una conclusión **α**, comenzando por una secuencia de "hechos observados", $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Podemos escribir esto como: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \rightarrow \alpha$ (**α**, es derivada de $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.)

Los hechos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. son interpretados de acuerdo a una cierta manera de pensamiento, dependiendo del conocimiento y los propósitos del observador. Esta forma de pensamiento resulta de la conceptualización de los objetos matemáticos que tiene el observador y las relaciones involucradas en y entre los hechos a_i, y lleva a una particular forma de pensamiento matemático.

En los patrones aritméticos, al no existir formas visuales que permitan una manipulación de los elementos y que cada nuevo término aparece por un proceso inductivo que depende de la experiencia en el dominio numérico del estudiante, se encuentran múltiples expresiones simbólicas que satisfacen los datos dados en el patrón, de esta forma, la secuencia: $1,\ 3,\ 6,\ 10,...$ puede ser presentada por $\frac{n(n+1)}{2}$; o por las expresiones

$$\frac{1}{2520}n^7-\frac{28}{2520}n^6+\frac{322}{2520}n^5-\frac{1960}{2520}n^4+\frac{6769}{2520}n^3-\frac{11872}{2520}n^2+\frac{14328}{2520}n-\frac{5040}{2520}$$

y

$$\frac{1}{114065280}n^9-\frac{628}{114065280}n^8+\frac{67122}{114065280}n^7-\frac{1595160}{114065280}n^6+\frac{17282769}{114065280}n^5$$
$$-\frac{102074532}{114065280}n^4+\frac{346342268}{114065280}n^3-\frac{607413200}{114065280}n^2+\frac{713456640}{114065280}n-\frac{252000000}{114065280}$$

Ante la imposibilidad de encontrar una única expresión simbólica que represente una secuencia de números el proceso validación debe incluir las competencias de los estudiantes para dar explicaciones y argumentos de los procedimientos elaborados, la justificación de la selección de una estrategia para abordar el problema, la comprobación de la expresión mediante la satisfacción de datos del patrón, y la presencia en los razonamientos de los estudiantes de las algunas características de las generalizaciones matemáticas como:

a) Todas incluyen, en forma explícita o implícita, el cuantificador universal.
b) Poseen variables que están definidas sobre dominios determinados. Estos dominios condicionan el valor de verdad de la generalización
c) Son susceptibles de asociarles un determinado valor de verdad. Establecer y reconocer una justificación este valor de verdad se llama: "demostrar la generalización".
d) Existen diversas formas y grados para establecer el valor de verdad.
e) Son susceptibles de ser instanciadas escogiendo valores específicos desde los dominios de las variables.
f) Están construidas usando los conceptos como elementos básicos.
g) Existen dos categorías de competencias asociadas a cada generalización. De Tipo I que corresponden a aquellas necesarias o requeridas para poder instanciar adecuadamente la generalización y las de Tipo II que corresponden a las nuevas competencias provenientes de la capacidad de usarla pertinente y exitosamente. (González en http://lemc.usach.cl/jt/ponencia.doc)

Conclusiones

La perspectiva de la generalización para la iniciación al álgebra es una "ruta"[3] que tiene grandes ventajas en cuanto al desarrollo de habilidades algebraicas de los estudiantes, sin embargo como afirma Radford (1996) La generalización como una herramienta didáctica no puede evitar el problema de la validez y la validez es, en sí misma, una idea muy compleja. Esto no significa que la generalización no pueda ser usada como un puente útil hacia el álgebra. Yo deseo señalar que el uso de la generalización supone que debemos estar preparados para trabajar con esta herramienta (lógica) adicional en el salón de clase.

La generalización de patrones aritméticos y geométricos son de naturaleza diferente y como tales es preciso que se tome conciencia dichas diferencias a la hora de preparar actividades para el aula pues en cualquiera de ellas se hacen presentes una serie de variables que no necesariamente hacen presencia en la otra. En la generalización de patrones de carácter geométrico existe cierto grado de certidumbre (sobre la validez) ofrecida por algunas de las variables visuales que se pueden practicar y al igual que en los patrones aritméticos es necesario incluir las competencias de los estudiantes para dar explicaciones y argumentos de los procedimientos elaborados, la justificación de la selección de una estrategia para abordar el problema, la comprobación de la expresión mediante la satisfacción de datos del patrón.

La imposibilidad de encontrar una única expresión simbólica que generalice determinado tipo de patrón aritmético sugiere que en el aula se incluyan reflexiones sobre la variedad de las expresiones y el contexto en el cual surgen.

La validación, entendida como una fase que da al proceso de generalización en el aula de clase cierto grado de certidumbre y seguridad frente a los resultados obtenidos en el proceso, es una tarea que extrapola la común idea positivista de demostración-deducción o la necesidad de encontrar una respuesta única y correcta por parte del alumno hacia el profesor. Es preciso recontextualizar o redefinir el significado, dar un lugar al estudiante para que el mismo haga parte del proceso de validación, y establecer determinadas condiciones de dicho proceso de tal manera que sea posible, realizarlo y así incluirlo como una fase dentro del gran y maravilloso mundo de la generalización.

[3]Este tèrmino es utilizado a menudo por Mason en sus distintos escritos

Referencias

González, H.. Propuestas para la investigación que emergen del estudio de una generalización matemática. Ponencia presentada a la Sociedade Brasileira de Educação matemática são Paulo. http://lemc.usach.cl/jt/ponencia.doc

Grupo Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para trabajar álgebra. Madrid: Ed Síntesis.

Mason, J y otros. (1999). Rutas y raíces hacia el álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Mason, J. (1996) Expresiones generalizadoras y los orígenes del álgebra. En: Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Departament de mathematiques, Universite du Quebec a Montreal

Radford, L (1996). Algunas reflexiones sobre la enseñanza del álgebra a través de la generalización. En: Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Departament de mathematiques, Universite du Quebec a Montreal

Villa, A. (2001). Identificar funciones polinómicas. Una tarea no siempre realizable. Revista EMA,6 (3) 290-298

Expresión racional de un decimal infinito periódico desde el pensamiento numérico y variacional haciendo uso de calculadora

Fundación Colegio UIS, Bucaramanga

JOSÉ LUIS MANTILLA RUIZ

El año pasado en una clase con estudiantes de 7º grado trabajábamos con la expresión racional de decimales, hasta que uno de ellos planteó una pregunta muy interesante: ¿y cómo se hace cuando el decimal es infinito periódico? Inmediatamente pensé en el método tradicional que aparece en los libros, que hace uso de ecuaciones y que a mi modo de ver se convierte en algo mecánico e inapropiado para estudiantes de este nivel. De esta manera me surgió el reto (problema) de pensar en un procedimiento novedoso y atractivo que apuntara al desarrollo del pensamiento numérico y variacional e hiciera uso de la tecnología. Empecé volviendo a leer en los lineamientos curriculares y en los estándares los elementos teóricos de dichos pensamientos, hasta que pude concretar el método que explico a continuación: