Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RACIOCÍNIO GEOMÉTRICO E APRENDIZAGEM DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Geometric reasoning and learning of congruence of triangles

Odalea Aparecida VIANA
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasill
odaleaviana@gmail.com
http://orcid.org/0000-0003-4782-6718

Lucas Rafael Pereira SILVA
Rede Pública do Estado de Minas Gerais, Ituiutaba, MG, Brasil
lucasfacip@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1825-0097

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo identificar avanços no raciocínio geométrico de um grupo de alunos submetidos a uma proposta didática no tema congruência de triângulos, a partir da manifestação das habilidades lógica e visual. A sequência didática foi elaborada no âmbito de mestrado profissional em ensino de ciências e matemática e aplicada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental, sendo utilizados materiais manipuláveis, slides com animação e o software GeoGebra. As análises dos diálogos e dos registros produzidos pelos alunos, feitas com base no modelo teórico de Van Hiele, permitiram identificar avanços no raciocínio geométrico, já que as atividades promoveram: (a) a formação, a inspeção e a manipulação de imagens mentais, o que permitiu interpretar e deduzir informações a partir de figuras (características da habilidade visual) e (b) o processo de análise acerca das afirmações verdadeiras e falsas, e de tirar conclusões a partir de princípios e evidências (características da habilidade lógica). Considerou-se que a aplicação da sequência didática em outros contextos pode gerar análises de modo a avançar no entendimento a respeito do raciocínio lógico na aprendizagem da geometria.

Palavras-chave: Pensamento geométrico, Habilidades geométricas, Psicologia da educação matemática.

ABSTRACT

The objective of this work is to identify improvements in geometric reasoning from the manifestation of logical and visual skills, related to a group of students submitted to a didactic proposal in the topic “congruence of triangles”. The didactic sequence was developed in the scope of professional Master’s degree program in Sciences and Mathematics teaching, and was applied to students from grade eight of elementary school. Manipulable materials were used, as well as slides with animated figures and the software GeoGebra. The analysis of dialogues and registers produced by the students were based on Van Hiele’s theoretical model and allowed to identify improvements in geometric reasoning, seeing that the activities promoted: (a) formation, inspection and manipulation of mental images, which allowed to interpret and deduce information from figures (characteristics of visual skill); and (b) the process of analyzing true and false statements and drawing conclusions from principles and evidences (characteristics of logical ability). It was considered that the application of that didactic sequence to other contexts can generate analysis in order to advance the understanding of logical reasoning in geometry learning.

Keywords: Geometric thinking, Geometric skills, Psychology of mathematical education.

1 INTRODUÇÃO

O raciocínio lógico é um tipo formal de pensamento que pertence ao processo de tirar conclusões a partir de princípios e evidências. No raciocínio indutivo, alcança-se uma provável conclusão geral a partir de fatos ou observações específicas; no dedutivo, extraem-se conclusões que são definidamente válidas, contanto que outras informações sejam consideradas verdadeiras. Os estudos da psicologia cognitiva indicam que as pessoas naturalmente têm essa forma de raciocínio, mas falham em situações mais críticas, seja por erros de compreensão, seja por inadequação da linha processual do raciocínio (Eysenk & Keane, 2000; Sternberg, 2000).

O desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes é um dos objetivos do ensino da matemática, conforme indica a Base Nacional Comum Curricular da Educação Básica – BNCC (Brasil, 2017).

Tentativas de explicar o desenvolvimento do raciocínio lógico na aprendizagem de conceitos e proposições referentes à geometria escolar foram realizadas por Van Hiele (1986). A teoria explica que os alunos podem progredir numa hierarquia de formação conceitual, que se dá em cinco níveis, desde o reconhecimento de figuras de maneira global, evoluindo para análise de propriedades; em seguida, para dedução informal, em que se verifica a capacidade de o aluno reconhecer que umas propriedades decorrem de outras e descobrir estas implicações; até atingir o nível formal de dedução e, finalmente, o rigor matemático.

Nas literaturas nacional e internacional são encontradas pesquisas que investigam os níveis de conceituação de alunos, bem como sugerem metodologias de modo a contribuir para o avanço do chamado pensamento geométrico (Hohenwarter & Jones, 2007; Villiers, 2010). Outras pesquisas sugerem o desenvolvimento de habilidades consideradas importantes para a aprendizagem da geometria, e destacam-se aquelas que se apoiam na perspectiva de Hoffer (1981) – este autor relacionou cinco habilidades (visualização, desenho, lógica, verbalização e aplicação do conhecimento geométrico em outras áreas) com os níveis de raciocínio geométrico proposto por Van Hiele (1986). No que se refere à habilidade visual, pesquisas indicam a relação entre esta e o desempenho em matemática (Bishop, 1990; Lean & Clements, 1981); outras buscam apoio teórico em Kosslyn (1995), que explica os processos de formação e manipulação de imagens mentais (Viana, 2005).

Nos anos finais do ensino fundamental, um dos temas cuja aprendizagem parece exemplificar a necessidade de avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico é a congruência de triângulos. A BNCC (Brasil, 2017) indica que, no 8° ano, o estudante deveria ser capaz de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes e de aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, o que contribuiria para a formação do raciocínio dedutivo, um dos objetivos do ensino da matemática.

Entre os poucos estudos que discutem possibilidades para o ensino de congruência, destaca-se o trabalho de Leivas e Fogaça (2017), que se apoia em atividades de transformações geométricas no plano (translação e rotação) com utilização do software GeoGebra, e o trabalho de Patkin e Plaksin (2011), que sugere tarefas de investigação e de discussão sobre as condições suficientes e insuficientes para a congruência de triângulos.

Já Leung, Ding, Leung e Wong (2014) consideram um desafio ensinar os alunos a utilizarem a dedução lógica para justificar proposições geométricas, como os casos de congruência de triângulos. As dificuldades estariam diretamente relacionadas à necessidade de formação conceitual em um nível mais alto de abstração, o que nem sempre é objetivado no ensino básico.

Neste nível de ensino destaca-se, entre outras metodologias e recursos didáticos propostos por educadores matemáticos, a utilização de softwares de geometria dinâmica. No presente trabalho, utilizou-se o GeoGebra, um software livre de matemática dinâmica, que reúne elementos de geometria, álgebra e cálculo. Conforme analisado por Cyrino e Baldini (2012), entre muitos outros, a utilização do GeoGebra nas aulas de matemática pode propiciar um ambiente favorável ao processo de investigação matemática e à construção de conceitos e ideias matemáticas.

A partir da revisão da literatura brevemente indicada neste texto, considerou-se importante entender como se identificam avanços no desenvolvimento do raciocínio geométrico no decorrer do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos – admitindo que esse entendimento possa ser útil para o professor planejar, acompanhar e avaliar suas atividades em sala de aula. Nessa perspectiva, foi elaborada e aplicada uma sequência didática direcionada a alunos do oitavo ano do ensino fundamental com o objetivo de promover a aprendizagem dos casos de congruência de triângulos. Esta ação foi realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática/PPGECM/UFU, em que foram utilizados recursos como slides com animação, material manipulável e o software GeoGebra; na aplicação da sequência, mereceram destaque os diálogos estabelecidos com os alunos e os registros produzidos por estes nas situações que pareciam explorar as habilidades visual e lógica – elementos considerados como essenciais para o entendimento do tema.

Neste texto, encontra-se um recorte dos dados já analisados, com aprofundamento do olhar no suposto desenvolvimento dessas habilidades. Evidentemente, a intenção não foi focar cada aluno individualmente quanto ao nível de desenvolvimento avaliado antes e depois da aplicação, mas, sim, identificar avanços no grupo como um todo, tomando por objetos de análise os diálogos estabelecidos com o professor e os registros produzidos ao longo da aplicação da sequência didática.

Assim, o objetivo deste trabalho foi analisar, nos limites da experiência, possíveis avanços no raciocínio geométrico do grupo de alunos no processo de aprendizagem do tema congruência de triângulos.

2 RACIOCÍNIO, NÍVEIS DE FORMAÇÃO CONCEITUAL E HABILIDADES EM GEOMETRIA

O modelo de Van Hiele (1986) procura explicar o modo de pensar dos alunos quando aprendem geometria. A teoria, que trata de níveis hierárquicos de formação conceitual e de desenvolvimento de habilidades geométricas, não é muito utilizada para avaliar a aprendizagem dos alunos nos conteúdos geométricos, mas principalmente para orientar a prática pedagógica do professor.

O modelo de pensamento ou de formação conceitual consiste em cinco níveis de compreensão: “visualização” (ou reconhecimento), “análise”, “dedução informal” (ou ordenação, ou síntese, ou abstração), “dedução formal” e “rigor”, sugerindo que os alunos avancem nesta sequência hierárquica no processo de aprendizagem em geometria.

No Nível 1, os alunos reconhecem os conceitos geométricos como entidades totais, não sendo identificadas as suas partes ou suas propriedades. Por exemplo, reconhecem um triângulo, mas não identificam os vértices, lados e ângulos; não reconheceriam, assim, um quadrilátero qualquer, mas apenas figuras particulares, como quadrado e retângulo. No Nível 2 (Análise), os alunos passam a identificar as características das figuras, a descobrir e a generalizar propriedades (a partir da manipulação e da observação necessariamente); no entanto, não seriam capazes de explicar relações entre propriedades, ou inter-relações entre as figuras, e não entenderiam as definições. Por exemplo, reconhecem os elementos de um triângulo e de um quadrilátero; generalizam que a soma de seus ângulos mede 180º e 360º, respectivamente; conseguem identificar dois triângulos congruentes ou dois quadriláteros congruentes medindo lados e ângulos, mas não entenderiam as condições necessárias e suficientes para a congruência.

Parece que somente no Nível 3 (Ordenação) os alunos aprenderiam a congruência de triângulos, já que a teoria afirma que neste nível são capazes de reconhecer propriedades entre as figuras, entender que algumas propriedades decorrem de outras e descobrir estas implicações, além de dar definições matematicamente corretas e de compreender os passos sucessivos individuais de um raciocínio lógico formal; apesar disso, não compreendem a necessidade de um encadeamento desses passos nem a estrutura de uma demonstração.

Assim, pode-se afirmar que a tarefa de identificar os quadriláteros I e II como congruentes na Figura 1(a) exige um nível de pensamento hierarquicamente inferior ao que é necessário para justificar que são congruentes os triângulos ABC e ADE obtidos a partir de diagonais do pentágono regular ABCDE (Figura 1(b)).

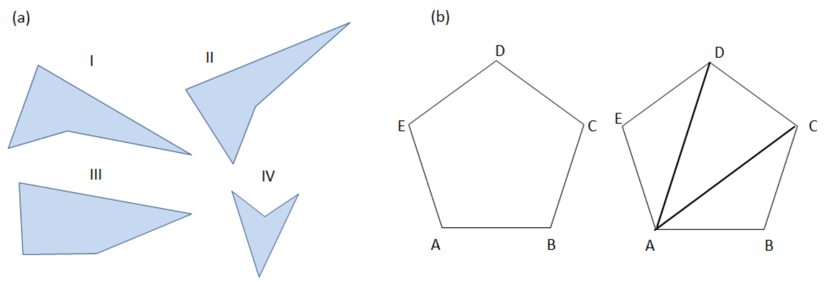


Figura 1: (a) Quadriláteros e (b) Pentágono regular e diagonais
Fonte: Arquivo dos autores

Já no Nível 4 (Dedução), os alunos podem construir demonstrações, compreendendo o significado de dedução como uma ferramenta para estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. No caso da situação exposta na Figura 1(b), nesse nível o aluno poderia provar que as diagonais do pentágono regular são congruentes, utilizando o caso LAL (Lado, Ângulo, Lado) de congruência de triângulos. Finalmente, no Nível 5 (Rigor), conseguem entender geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes.

O modelo de Van Hiele (1986) indica que, como os níveis formam uma hierarquia, é impossível passar de um nível para outro sem dominar as operações do nível anterior. O avanço dependeria do conteúdo e dos métodos de ensino, além de experiências sobre o assunto.

Com a finalidade de explicar a estrutura recursiva dos níveis, Jaime e Gutiérrez (1990) afirmaram que em cada nível N há determinados elementos que são utilizados implicitamente pelos alunos e que se tornam explícitos no nível N+1. Assim, se as propriedades das figuras são elementos implícitos no Nível 1, o que permite ao aluno reconhecê-las, elas serão os elementos explícitos no Nível 2. Da mesma forma, neste nível o aluno percebe algumas relações entre as propriedades, mas que só serão entendidas no nível seguinte, em que ele poderá, por exemplo, fazer classificações de figuras utilizando propriedades comuns.

Acrescenta-se que o movimento para um nível mais alto é acompanhado de domínio de uma nova linguagem, com definições e simbologia adequadas. Por exemplo, para provar que as diagonais do pentágono da Figura 1(b) são congruentes, o aluno utilizaria termos e símbolos, tais como: nos triângulos ΔABC e ΔADE tem-se que AB=AE e BC=ED, pois são lados do pentágono regular ABCDE; $A\hat{B}C = A\hat{E}D$, pois são ângulos internos do mesmo pentágono regular; logo $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ pelo caso LAL e então AC = AD.

É possível observar que as tarefas normalmente apresentadas aos alunos nas aulas de geometria podem exigir-lhes diferentes habilidades. No caso da situação exposta na Figura 1(a), a habilidade visual para manipular mentalmente as imagens mentais (com rotação e translação) dos quadriláteros I e II até sobrepô-los seria suficiente para reconhecer a congruência. Na situação 1(b) da mesma figura, além do raciocínio dedutivo condicional – que tem suas origens na lógica proposicional em que os operadores lógicos como ou, e, se...então, se e somente se estão incluídos nas sentenças ou proposições – há a necessidade de uma habilidade para lidar com os símbolos. Entre outras consideradas importantes na aprendizagem da geometria, Hoffer(1981) apresenta as habilidades visual e lógica e estabelece níveis hierárquicos no seu desenvolvimento.

De acordo com o autor, a habilidade visual está ligada à capacidade de formar e manipular imagens mentais e, assim, interpretar informações a partir de figuras. Com essa habilidade, o aluno poderia reconhecer figuras diferentes de um desenho, estabelecer propriedades comuns de diferentes tipos de figuras e até deduzir informações a partir de uma figura.

Numa abordagem da psicologia cognitiva, Primi e Almeida (2000), com base nas concepções fatoriais da inteligência, descreveram que a habilidade espacial seria avaliada pela capacidade de visualização, isto é, de formar representações mentais visuais e de manipulá-las, transformando-as em novas representações. Os processos de formação e de manipulação de imagens mentais visuais são explicados por uma teoria na linha do processamento da informação defendida por Kosslyn (1995). O modelo teórico integra os processos de reconhecimento e identificação de objetos com o de imagens mentais. Kosslyn (1995) esclarece que a percepção e a imagem mental compartilham mecanismos mentais comuns, mas que há diferenças entre os processos: a imagem mental desaparece, esvanece rapidamente, e é preciso esforço para mantê-la e assim permitir os processos de inspeção e manipulação da imagem (como modificação, rotação, translação etc.). Além disso, as imagens mentais são criadas a partir de informações armazenadas na memória, sendo que não é o mundo externo que dita o conteúdo das imagens. Com base em Kosslyn (1995), Viana (2005) pondera que talvez esses fatores expliquem por que muitas vezes os alunos têm dificuldades em responder às questões acerca de geometria quando são necessárias habilidades visuais; a partir disso, sugere que o professor utilize muitas representações externas com uso de materiais, desenhos, softwares etc.

Com relação à habilidade lógica, Hoffer (1981) salienta a necessidade de que sejam reconhecidos e analisados argumentos válidos e não válidos no contexto de figuras geométricas. As habilidades lógicas permitem aos alunos, em diferentes níveis de conceituação, classificar figuras de acordo com as semelhanças e diferenças, estabelecer propriedades, incluir classes, deduzir consequências a partir de informações etc.

No âmbito da psicologia cognitiva, Primi e Almeida (2000) alegam que a habilidade lógica está ligada ao chamado raciocínio abstrato e pode ser considerada como a capacidade de estabelecer relações abstratas em situações novas, construir conceitos e compreender implicações. Sternberg (2000) define o raciocínio como o processo cognitivo pelo qual uma pessoa pode inferir uma conclusão a partir de um grupo de evidências ou de declarações. No raciocínio indutivo, a pessoa tenta alcançar uma provável conclusão geral, com base em observações específicas; no dedutivo, alcança-se uma conclusão lógica específica e logicamente certa, a partir de proposições gerais.

O raciocínio dedutivo baseia-se em proposições lógicas – asserções que podem ser verdadeiras ou falsas. Se o sujeito tirar uma conclusão baseada numa proposição “se – então”, trata-se do raciocínio condicional. Na geometria formal, os teoremas são afirmações passíveis de demonstração, estando sua veracidade garantida por um encadeamento de inferências lógicas apoiadas na estrutura que dá início ao modelo e nos teoremas já demonstrados (Gravina, 2001).

Na aprendizagem da geometria euclidiana plana, uma atividade baseada em habilidade lógica no nível de dedução informal de Van Hiele (1986) seria, por exemplo, propor várias experiências empíricas de modo a levar os alunos a concluírem que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180º – o que envolveria raciocínio indutivo. Em um nível mais avançado, valer-se dos casos de congruência de triângulos para deduzir que as diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seu ponto médio – o que evidenciaria o raciocínio dedutivo.

Além de teoremas, evidentemente, o conteúdo de geometria inclui noções, relações intuitivas e definições; no entanto, subtende-se que a aprendizagem de todos esses itens pressupõe algum tipo de raciocínio, o que justifica a adaptação feita por Hoffer (1981) das habilidades visual e lógica aos níveis de Van Hiele (1986).

Quanto aos recursos didáticos adotados em sala de aula de modo a promover o desenvolvimento de algumas dessas habilidades, destaca-se o GeoGebra. Neste software, para construir figuras na tela do computador, o aluno deve valer-se dos comandos que, além de substituírem os instrumentos tradicionais de desenho geométrico (como régua, compasso e transferidor), permitem manipulações das figuras (como translação e rotação) – o que evidencia a percepção, formação e inspeção de imagens mentais, características da habilidade visual.

Conforme Gravina (2001) e Lovis e Franco (2013), os ambientes de geometria dinâmica facilitam a exploração e experimentação e, principalmente, o questionamento das ações e a descoberta de generalizações, o que pode levar ao encorajamento para as demonstrações. Apesar disso, Gravina (2001) adverte que a disponibilidade e a obtenção de alto grau de precisão nas figuras construídas por meio dos softwares podem desencadear nos alunos atitudes que priorizam as validações empíricas em detrimento das validações hipotético-dedutivas.

A partir do exposto, foram consideradas as habilidades visual e lógica para serem analisadas na perspectiva do raciocínio geométrico, visto terem sido estas as mais evidenciadas na sequência didática aplicada.

3 OBJETIVOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Este trabalho teve como objetivo identificar possíveis avanços no raciocínio geométrico de um grupo de alunos submetidos a uma proposta didática no tema congruência de triângulos, a partir da manifestação das habilidades visual e lógica. A proposta didática foi direcionada a alunos do ensino fundamental na forma de uma sequência de atividades em que foram utilizados alguns recursos como material manipulável, slides com animação e o software GeoGebra.

Como a sequência didática foi elaborada no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática/PPGECM/UFU, o tema congruência e a turma de alunos (30 estudantes do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Ituiutaba, MG) foram escolhidos por conveniência do pesquisador (segundo autor deste trabalho), que era professor da turma, o que caracteriza a chamada pesquisa do professor (Carneiro, 2008). Foram aplicadas oito atividades distribuídas ao longo de 20 aulas regulares de 50 minutos, no ano de 2016. Parte das aulas aconteceu na própria sala de aula e outra parte no Laboratório de Informática da escola.

A coleta de dados deu-se a partir da descrição dos objetivos das atividades, dos diálogos estabelecidos entre professor e alunos durante a aplicação da sequência didática – diálogos que foram transcritos a partir da gravação de áudio – e também das produções dos alunos oriundas das fichas de registros e dos arquivos do GeoGebra, além das anotações do professor em seu diário de bordo, realizadas em momentos imediatamente posteriores às aulas.

Apesar de a proposta ser formada por oito atividades, neste texto foram analisadas apenas cinco delas, por estarem mais diretamente ligadas ao conceito de congruência.

Para a análise qualitativa – considerando que as habilidades estão ligadas à noção de realização de tarefas, conforme Primi et al. (2001) – optou-se por identificar as ações previstas nos objetivos e também aquelas evidenciadas na ocasião da aplicação das atividades ao grupo de alunos e compará-las com as ações descritas por Van Hiele (1986) e por Hoffer(1981) para caracterizar os níveis de raciocínio geométrico a partir da manifestação das habilidades visual e lógica. Para tanto, foram localizados (nos procedimentos adotados pelo professor, nos diálogos estabelecidos com os alunos, nas respostas dadas nas fichas de registro e nos arquivos de computador) os verbos que designavam aquelas ações, tais como: perceber, reconhecer, identificar, estabelecer, relacionar, classificar, interpretar, justificar, argumentar, descrever, dominar (a linguagem) e concluir, entre outros, de modo a relacioná-los, no contexto da experiência, com a caracterização das habilidades visual e lógica nos diferentes níveis de raciocínio.

4 ANÁLISE

Foram selecionadas as cinco atividades mostradas no Quadro 1.

Quadro 1: Atividades da sequência didática

Atividade	Objetivos	Materiais	Local e duração
1)Polígonos congruentes	Perceber, reconhecer, identificar pares de polígonos congruentes; classificar pares congruentes e não congruentes; definir polígonos congruentes.	Ficha de registro, *Slides*, polígonos de papel-cartão, lápis e borracha.	Sala/aula. 02 aulas.
2)1º caso de congruência de triângulos – LLL: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.	Identificar e justificar pares triângulos congruentes a partir de construções utilizando o *software* GeoGebra; descrever a condição LLL como necessária e suficiente.	Computador com o *software* GeoGebra; Slides, Ficha de registro, lápis e borracha.	Laboratório e sala/aula. 02 aulas.
3)2º caso de congruência de triângulos – LAL: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.	Identificar e justificar pares triângulos congruentes a partir de construções utilizando o *software* GeoGebra; descrever a condição LAL como necessária e suficiente.	Computador com o *software* Geo-Gebra; Slides, Ficha de registro, lápis e borracha.	Laboratório e sala/aula. 02 aulas.
4)3º caso de congruência de triângulos – ALA: se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então eles são congruentes.	Identificar e justificar pares triângulos congruentes a partir de construções utilizando o *software* GeoGebra; descrever a condição ALA como necessária e suficiente.	Computador com o *software* GeoGebra; Slides, Ficha de registro, lápis e borracha.	Laboratório e sala/aula. 02 aulas.
5)4º caso de congruência de triângulos – LAA_o : se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.	Identificar e justificar pares triângulos congruentes a partir de construções utilizando o *software* GeoGebra; descrever a condição LAA_o como necessária e suficiente. Concluir os casos de congruência de triângulos.	Computador com o *software* GeoGebra; Slides, Ficha de registro, lápis e borracha.	Laboratório e sala/aula. 02 aulas.

Note-se que a primeira atividade era relativa ao conceito de congruência de polígonos (mais geral) e não especificamente de triângulos (mais particular). Considera-se importante, neste contexto, diferenciar a percepção, o reconhecimento e a identificação de pares de polígonos congruentes. Se fossem apresentados os pares de polígonos da Figura 2, o aluno poderia perceber de maneira imediata que são congruentes (ou “iguais”, na linguagem utilizada na ocasião) os polígonos do primeiro par; no entanto, é possível que ele não concluísse rapidamente o que acontece com os outros pares.

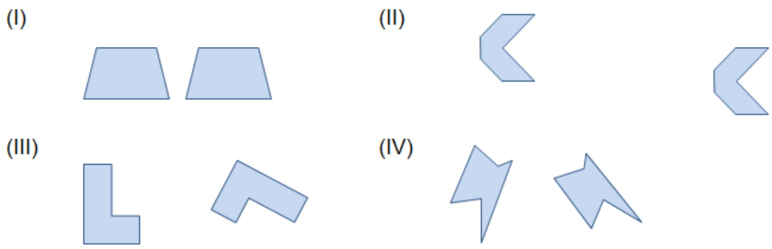


Figura 2: Pares de polígonos congruentes
Fonte: Arquivo dos autores

Ainda observando a Figura 2, considera-se que reconhecer (II) como par de polígonos congruentes parece exigir não apenas a percepção imediata, mas a formação de duas imagens mentais da figura para movimentá-las por translação e, assim, sobrepô-las ou então inspecionar as características comuns – lados e ângulos correspondentes. A manipulação das imagens mentais, agora acrescentando movimentos de rotação, também seria uma ação requisitada para concluir a congruência dos pares (II) e (IV); neste último par, parece que a inspeção requereria maior esforço para manter a imagem, evitando que ela esvanecesse – conforme a teoria de Kosslyn (1995).

Na aplicação da atividade em sala de aula, não foram oferecidos pares em separado: os alunos já foram solicitados a identificar, em um conjunto composto por 32 polígonos (Figura 3(a)), os pares congruentes. Os alunos deveriam classificar os pares de polígonos inicialmente chamados de “iguais”; já aqueles com algumas características comuns foram chamados de pares de polígonos “parecidos”. Os pares deveriam ser indicados na Ficha de registro, mostrada na Figura 3(b).

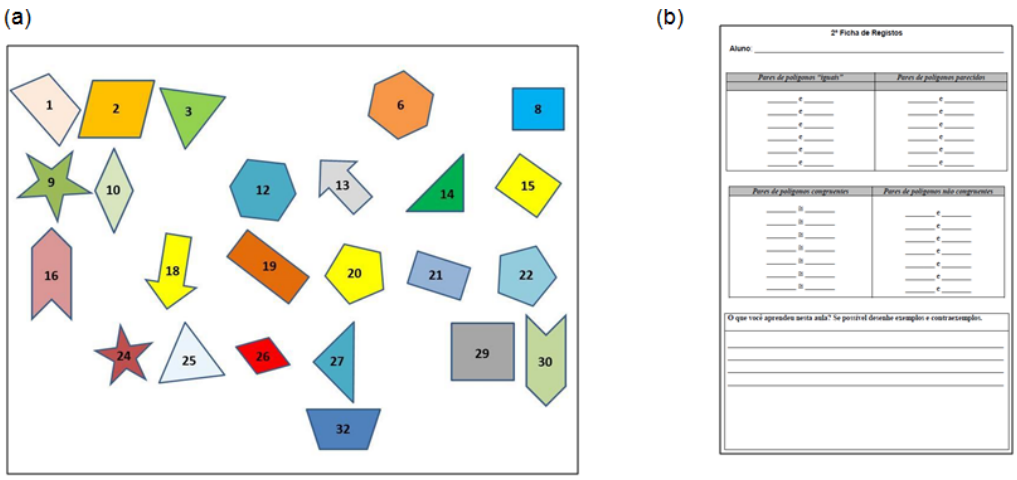


Figura 3: (a) Slide e (b) Ficha de registros
Fonte: Arquivo dos autores

A atividade exigiu a identificação, mas supõe-se que as ações de perceber e reconhecer tenham sido desencadeadas como requisitos para a solução da tarefa. O Diálogo 1 mostrado no Quadro 2 ilustra alguns processos relatados pelos próprios alunos.

Quadro 2: Diálogo 1 entre professor e alunos

Aluno A: Já achei um par igual! O polígono 1 é igual ao 32! *Aluno B: O polígono 2 é igual ao 29, porém o polígono 2 só está inclinado.* *Aluno A: Mas pra ser igual tem que ser igual mesmo! Não pode estar inclinado!* *Aluno B: Mas e o polígono de número 2? Parece que não tem nenhum igual... Professor, todos têm um par igual?* *Professor: Nem todos. No quadro polígonos "iguais" vocês devem observar e registrar apenas os números correspondentes aos pares de polígonos que acreditam serem iguaizinhos mesmo! Deixem pra preencher os "parecidos" depois de encontrarem os iguais.*

Fonte: Arquivo dos autores

Foi possível observar, por meio de gestos com as mãos e cabeça e também pelos relatos dos alunos, que alguns tentaram sobrepor mentalmente os pares de figuras que intuitivamente consideravam congruentes, realizando rotações – o que caracterizava o primeiro nível de pensamento geométrico de Van Hiele (1986) e a habilidade visual definida por Hoffer (1981). Observando o Diálogo 1 do Quadro 2, nota-se que outros estudantes analisavam também propriedades ou componentes das figuras, como a posição dos vértices e a congruência com relação aos lados e ângulos correspondentes ("o polígono 2 é igual ao 29, porém o polígono 2 só está inclinado") – o que exigia avanço na escala hierárquica de formação conceitual para o Nível 2.

Após preenchimento da ficha, como forma de correção e síntese, o professor distribuiu polígonos recortados de papel-cartão (Figura 4(c)) para que fossem manipulados; também utilizou slides com animação para simular os mesmos movimentos feitos com a mão (Figura 4(a)). Os dois recursos pretendiam mostrar perceptualmente as mesmas imagens mentais formadas, inspecionadas e movimentadas de maneira que os alunos pudessem reconhecer tanto a congruência com relação aos lados quanto aos ângulos correspondentes. Um momento da aplicação da atividade é mostrado na Figura 4(b).

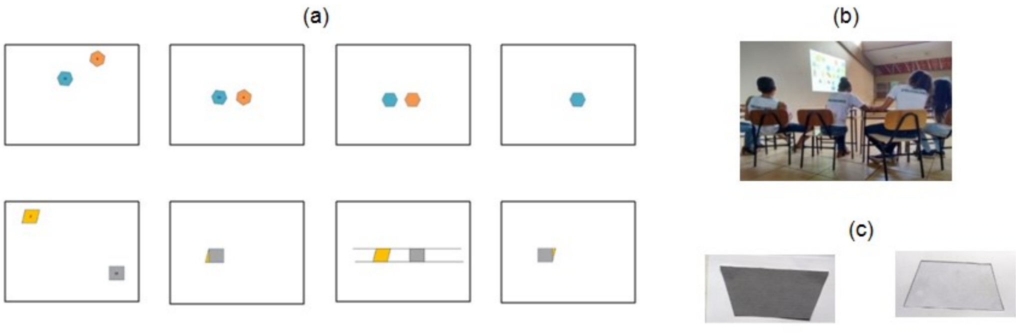


Figura 4: (a) Slides; (b) Momento da aula e (c) Polígonos de papel-cartão
Fonte: Arquivo dos autores

A apresentação dos slides deve ter contribuído para a realização da atividade que ainda solicitava que os alunos classificassem o conjunto de polígonos em dois grupos: os "iguais" e os "parecidos"; isto exigia dos alunos o reconhecimento da congruência, em algumas situações somente entre lados, em outras somente entre ângulos e, finalmente, entre lados e ângulos correspondentes. Tal ação envolve o estabelecimento de relações entre propriedades de figuras, características do terceiro nível de Van Hiele (1986), indispensável para o encadeamento lógico das duas condições necessárias para a congruência de polígonos – o que implica que uma delas apenas não seria suficiente. As frases sublinhadas no Diálogo 3 do Quadro 3 ilustram a interferência do professor para que os alunos justificassem a classificação realizada, o que evidenciaria alcance do novo nível de raciocínio.

Quadro 3: Diálogo 2 entre professor e alunos

Professor: Vamos observar agora alguns dos polígonos deste slide. O polígono número 6 é "igual" ou "parecido" com o polígono número 12? *Alunos: Igual!* *Professor: Como assim? Se eu tentar sobrepô-los irá ficar certinho?* *Alunos: Sim! Os dois estão apenas virados!* *Professor: Então vamos verificar! Observem os slides animados e vejamos... Muito bem! Os polígonos 6 e 12 são realmente iguaizinhos pois houve sobreposição entre eles. Observem que os lados correspondentes nos dois polígonos são congruentes, isto é, têm a mesma medida. Esta é uma condição necessária para que os polígonos também sejam iguais. Nós vamos chamar agora os polígonos iguais de polígonos congruentes! Mas vejam: será que só isto basta? O que vocês colocaram com relação aos polígonos 2 e 29?* *Aluno A: Eu registrei que eles são iguais.* *Aluno B: Não são! Um é mais inclinado que o outro e se formos sobrepô-los irá ficar passando!* *Professor: Vamos verificar por meio dos slides, então, se os polígonos 2 e 29 são congruentes. Vejamos que o polígono 2 e o polígono 29 possuem lados correspondentes congruentes, da mesma maneira que os polígonos 6 e 12. Entretanto, podemos observar que os lados do polígono 29 formam, dois a dois, ângulos de 90 graus. Já os lados correspondentes no polígono 2 não formam ângulos de 90 graus dois a dois. Vejam!* *Alunos: Ah sim... Então quer dizer que os polígonos 2 e 29 não são iguais?* *Professor: Observem que, conforme havíamos observado, a congruência com relação aos lados correspondentes é uma condição necessária para que dois polígonos sejam congruentes. Entretanto, observando os polígonos 2 e 29 podemos concluir que não é uma condição suficiente. Vejamos que ainda "dependemos" das medidas dos ângulos correspondentes. Estes devem ser congruentes, não é mesmo?* *Alunos: Sim!*

Fonte: Arquivo dos autores

É possível notar, no Diálogo 2, a interferência do professor para que, a partir de alguns pares que serviram como exemplo e de outros como contraexemplos ("vamos verificar por meio dos slides, então, se os polígonos 2 e 29 são congruentes"), os alunos entendessem o que era condição necessária mas não suficiente para a congruência. A capacidade de tirar conclusões gerais a partir de observações específicas define o raciocínio indutivo, conforme Sternberg (2000). No contexto de figuras geométricas, Hoffer

(1981) indica a necessidade de que sejam reconhecidos e analisados argumentos válidos e não válidos para o desenvolvimento da habilidade lógica no Nível 3.

Dar definições matematicamente corretas é também uma característica do Nível 3 da hierarquia de Van Hiele (1986), em que o aluno pode compreender os passos sucessivos individuais de um raciocínio lógico formal; apesar disso, não compreendem a necessidade de um encadeamento desses passos nem a estrutura de uma demonstração. Note-se, na Figura 5, a dificuldade em definir polígonos congruentes e em destacar condições não atendidas naqueles pares de polígonos "parecidos" – não congruentes, portanto " ... é quando um ângulo é maior que o outro ou o lado é maior que o outro". Desenhos de polígonos com a demarcação de medidas foram também utilizados nas explicações.

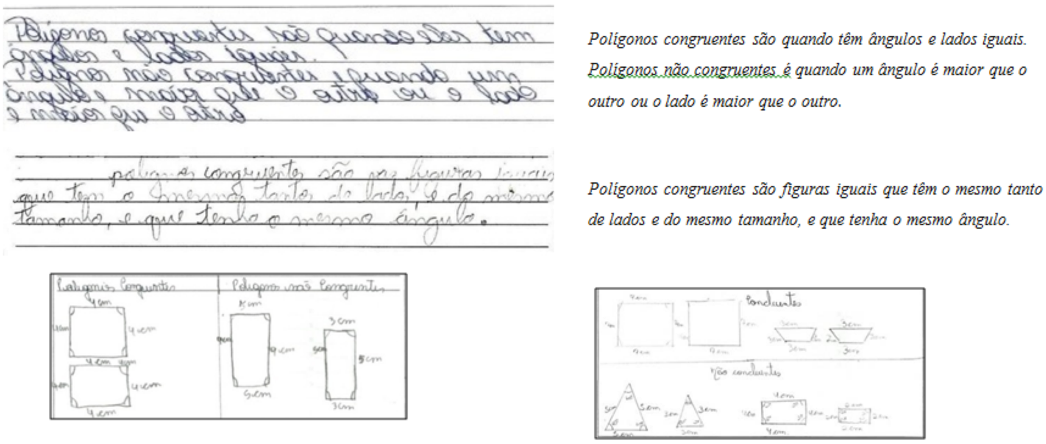


Figura 5: Registros produzidos pelos alunos para polígonos congruentes
Fonte: Arquivo dos autores

A continuidade da sequência deu-se no laboratório de informática. Convém esclarecer que os alunos já tinham algum domínio do GeoGebra. Com a utilização de vários comandos do software, os alunos foram orientados a construir, a cada aula, um par de triângulos, conforme mostra o Quadro 4.

Quadro 4: Construções no GeoGebra

1a construção: Construir um Δ ABC com os lados AB, BC e CD de medidas quaisquer . Construir um Δ A'B'C' transportando as medidas dos lados do triângulo anterior. 2a construção: Construir um Δ ABC com o lado AB de medida qualquer e com os dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ com medidas quaisquer. Construir um Δ A'B'C' transportando as medidas do lado e dos ângulos do triângulo anterior. 3a construção: Construir um Δ ABC com os lados AB e BC de medidas quaisquer e com o ângulo $\hat{A}$ de medida qualquer. Construir um Δ A'B'C' transportando as medidas dos lados e do ângulo do triângulo anterior. 4a construção: Construir um Δ ABC com os lados AB e BC de medidas quaisquer e com o ângulo $\hat{C}$ de medida qualquer. Construir um Δ A'B'C' transportando as medidas dos lados e do ângulo do triângulo anterior.

Fonte: Arquivo dos autores

Quando os alunos terminaram a primeira construção, o professor solicitou que medissem os lados e ângulos, e alterassem (aumentando ou diminuindo) os lados de um dos triângulos, percebendo que os ângulos correspondentes dos dois triângulos também se alteravam, formando outras representações de pares de triângulos congruentes.

Ao final de cada construção, o professor retomava os procedimentos realizados e levantava questionamentos. O Diálogo 3, referente à discussão promovida após a primeira construção, é mostrado no Quadro 5.

Quadro 5. Diálogo 3 entre professor e alunos

Professor: A medida do lado AB no triângulo ∆ABC é a mesma medida de qual lado no triângulo ∆A'B'C'?

Alunos: Igual à medida do lado A'B'.

Professor: Então podemos dizer que os segmentos AB e A'B' são congruentes?

Alunos: Sim!

Professor: Por que será que os segmentos AC e BC, lados do triângulo ∆ABC também são congruentes a A'C' e B'C' ? Sendo estes lados correspondentes à AC e BC no triângulo ∆A'B'C'? como conseguimos construir lados correspondentes congruentes? Vocês se lembram?

Alunos: É por que utilizamos a ferramenta compasso?

Professor: Exatamente! Os lados correspondentes dos dois triângulos são congruentes por construção, ou seja, da forma que utilizamos a ferramenta compasso na reta auxiliar, realizando medições no primeiro triângulo, fizemos com que os lados correspondentes fossem congruentes, ou seja, de mesma medida. Entenderam?

Alunos: Agora sim, professor!

Professor: Vocês se lembram o que fizemos na segunda atividade? Aquela em que falávamos das condições necessárias para que dois polígonos fossem congruentes... Lembram-se?

Aluno: Sim! Para que dois polígonos fossem congruentes bastava os lados serem iguais.

Professor: É isso mesmo pessoal? Vocês lembram que fizemos alguns casos em que os lados correspondentes eram congruentes, porém os polígonos não se sobrepunham, ou seja, não eram congruentes? O que havíamos concluído então? Tem algo a ver com ângulos...

Alunos: Ah sim, os ângulos também tinham que ter mesma medida!

Professor: Isso mesmo! Então, para que dois polígonos sejam congruentes, uma condição necessária, mas não suficiente, é que os lados correspondentes sejam congruentes?

Alunos: Sim!

Professor: Pois bem, aqui nesses dois triângulos que construímos pudemos verificar que os lados correspondentes são congruentes conforme construímos, mas só isso já basta para que eles sejam congruentes?

Alunos: Parece que sim, professor!

Professor: Será que nos triângulos, se os lados correspondentes são congruentes os ângulos correspondentes também são? Será que há necessidade de checar?

Alunos: Visualmente parece que os ângulos possuem mesma medida!

Professor: Na nossa construção, construímos algum ângulo correspondente congruente? Como foi isso?

Alunos: Não, somente os lados correspondentes congruentes.

Professor: Então vamos verificar os ângulos, mas sabendo que, em nossa construção reproduzimos, no segundo triângulo, somente os lados correspondentes congruentes, ok?

Alunos: Ok! Então podemos medir os ângulos nos dois triângulos para verificar?

Professor: Sim!

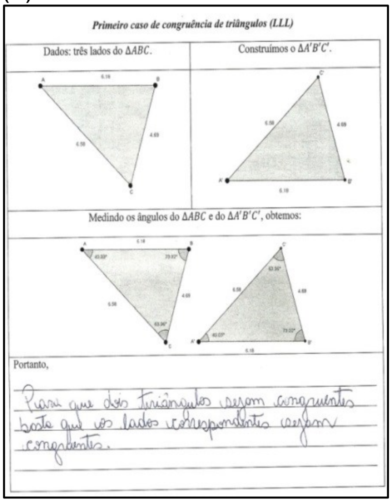
Solicitou-se então que os alunos, por meio da ferramenta "Ângulo", obtivessem as medidas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ *do triângulo ∆ABC e também dos ângulos* $\widehat{(A')}$, $\widehat{(B')}$ *e* $\widehat{(C')}$ *do triângulo ∆A'B'C'.*

Fonte: Arquivo dos autores

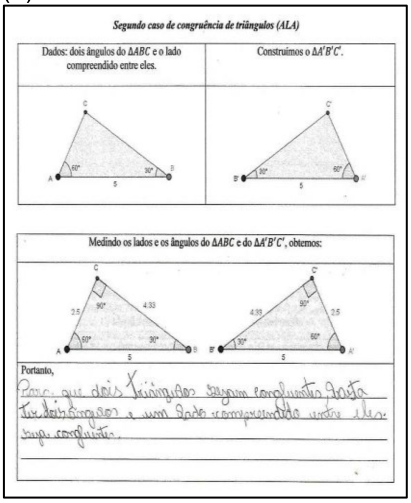
Nota-se, por meio das frases destacadas no Diálogo 3, do Quadro 5, a tentativa do professor de provocar os alunos ("por que será?") para que apresentassem argumentos acerca da veracidade de certas afirmações (“para que dois polígonos fossem congruentes bastava os lados serem iguais”). Para entender o caso LLL (“... Entenderam?”; “agora sim, professor!”), os alunos deveriam concluir que, se para os polígonos em geral, “não bastava” ter lados correspondentes congruentes, isto “bastaria” para a congruência de triângulos.

Ao final da atividade, o professor formalizou o primeiro caso de congruência de triângulos denominando-o de LLL e solicitou que os alunos preenchessem a ficha correspondente, descrevendo o que haviam entendido sobre o caso estudado. Este procedimento foi realizado ao final de cada construção. Nas Figuras 6(a) e 6(b) são mostrados dois exemplos de ficha preenchida para os casos LLL e ALA e em 8(c) algumas descrições de outros casos de congruência.

(a)



(b)



(c)

“Para dois triângulos serem congruentes basta que sejam iguais, do mesmo tamanho os lados”.

“Se dois ângulos e o lado entre eles é congruente em dois triângulos, os triângulos também são congruentes”.

“Se em dois triângulos dois lados e o ângulo entre eles for congruente os triângulos também são”.

“Dois triângulos serão congruentes quando um lado e os dois ângulos formados nos vértices desse lado forem congruentes”.

Figura 6: (a) Registros produzidos para o caso LLL; (b) para o caso ALA e (c) outras definições dos alunos
Fonte: Arquivo dos autores

Esses registros dos alunos mostram, como características do Nível 3 de ordenação, que as palavras e os símbolos são utilizados de maneira precisa e concisa, e as sentenças são formuladas de modo a mostrar relações entre as propriedades das figuras. Os alunos parecem compreender o papel das definições e dos requisitos de uma definição correta, mas não utilizam os símbolos específicos da geometria para nomear os vértices, lados e ângulos dos triângulos.

Ainda é possível identificar, nesse nível de pensamento, os elementos explícitos e implícitos, conforme descrição feita por Jaime e Gutiérrez (1990): as implicações entre as propriedades aparecem nas conclusões dos alunos, o que demonstra que no Nível 3 os objetos de estudo são as afirmações que relacionam propriedades. Porém, somente no

Nível 4 os teoremas poderiam ser explicitados com base nestas afirmações: a consciência sobre a necessidade lógica da prova formal parece não ter sido alcançada pelos estudantes, na situação vivenciada até aquele momento.

5 CONCLUSÃO E ALGUMAS IMPLICAÇÕES

Apesar de mostrar apenas um fragmento do trabalho realizado em sala de aula durante o ano letivo – que incluiu atividades direcionadas para aprendizagem de outros conteúdos e procedimentos em geometria – este texto buscou analisar como acontece certo progresso no nível de pensamento geométrico dos alunos a partir das habilidades visual e lógica manifestadas nos diálogos e nos registros dos alunos.

A proposta didática aplicada em sala de aula era formada por uma sequência de atividades de modo a ampliar e organizar a rede de relações entre os conceitos envolvidos, utilizando linguagem adequada a cada nível de raciocínio. Assim, de certa forma, este texto acabou por avaliar algumas contribuições desta proposta. As atividades analisadas promoveram formação, inspeção e manipulação de imagens mentais, permitindo interpretar e deduzir informações a partir de figuras, o que parece ter contribuído para o desenvolvimento da habilidade visual dos alunos – importante na aprendizagem da geometria, conforme indicam os estudos citados.

Da mesma forma, a sequência de atividades e a forma de condução dos diálogos parecem ter contribuído para o entendimento das relações entre as propriedades das figuras, evitando falhas ocasionadas por erros de compreensão ou por inadequação da linha processual do raciocínio, conforme apontado por Eysenk e Keane (2000) e Sternberg (2000). Além disso, verificou-se certo avanço no domínio da linguagem dos alunos quando analisavam afirmações verdadeiras e falsas e chegavam a conclusões a partir de princípios e evidências, assim como quando deram definições matematicamente corretas – o que evidenciou manifestação da habilidade lógica no campo da geometria.

No entanto, concorda-se com Leung et al. (2014) quando ponderam acerca da dificuldade em ensinar os alunos a utilizarem a dedução lógica para justificar proposições geométricas. Nesse sentido, lembrando que o entendimento dos casos de congruência de triângulos constitui elemento importante para o avanço no próximo nível de pensamento geométrico, considerou-se que talvez tenha faltado ao professor explorar todas as composições de atributos necessários e suficientes. Ou seja, não foi explicitado que para dois triângulos ABC e A'B'C' serem congruentes são necessárias seis condições:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, $\hat{A} = \widehat{A}'$, $\hat{B} = \widehat{B}' = \widehat{B'}$ e $\hat{C} = \widehat{C}'$

A partir disso, seria interessante questionar os alunos:

- Um componente idêntico em dois triângulos pode ser suficiente para a congruência?
- Dois componentes respectivamente iguais em dois triângulos podem ser uma condição suficiente para congruência? e três componentes?
- Concluindo-se que são três componentes, todas as combinações formariam condições suficientes? Por exemplo, AAA (ter ângulos correspondentes congruentes) constituiria uma condição suficiente?

A busca de resposta a estas situações – que se configuram como contraexemplos importantes na argumentação lógica, conforme Leung et al. (2014) e Patkin e Plaksin (2011),– além de exigir elementos pertinentes ao Nível 3 de formação conceitual, poderia ajudar o aluno a estabelecer relações com outros conceitos; por exemplo, explorar a situação AAA (que é um caso de semelhança de triângulos) ampliaria a rede de relações necessária para as demonstrações de Nível 4.

Outra ponderação que merece ser feita diz respeito à utilização do GeoGebra. Apesar do consenso acerca da contribuição do software nas construções geométricas e na exploração e experimentação com vistas a generalizações, concorda-se com Gravina (2001) quando adverte que a disponibilidade de transformações visuais e a obtenção de alto grau de precisão nas figuras podem priorizar as validações empíricas – e o raciocínio indutivo – em detrimento das validações hipotético-dedutivas, características do raciocínio lógico dedutivo. Se não forem retomadas as conclusões obtidas pelos alunos em outros contextos na forma de exercícios e problemas, talvez não se possa afirmar a respeito da real contribuição desse tipo de recurso no desenvolvimento do raciocínio lógico requerido para o tema. Acrescenta-se que o processo de avaliação da aprendizagem daqueles alunos que participaram da proposta didática não esteve no escopo deste texto, mas uma análise futura, com os dados obtidos ao final da aplicação da sequência, poderá trazer maior compreensão sobre o assunto.

Finalmente, concorda-se com Usiskin (1994) sobre a importância de se ter clareza a respeito do papel da geometria no currículo escolar. Considerando que nos anos finais do ensino fundamental as atividades de sala de aula não deveriam ficar limitadas à aplicação do conhecimento em outras áreas nem à verificação empírica como fonte de validação, espera-se que as análises aqui realizadas possam ser refeitas e ampliadas em outros contextos, de modo a avançar no entendimento do desenvolvimento do raciocínio lógico no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. A partir deste entendimento, é possível sugerir outras metodologias que atendam aos objetivos da disciplina.

REFERÊNCIAS

Bishop, A. L. (1990). Spatial abilities and mathematics achievement – A review. *Educational Studies in Mathematics,* V.7, 23-40. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/264174659_Spatial_Ability_and_Mathematical_Achievement_of_Elementary_School_Students

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Conselho Nacional de Secretaria de Educação. Brasília: Distrito Federal. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf

Carneiro, V. C. (2008). Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. *Bolema,* Rio Claro (SP), Ano 21, n. 29, 199-222. Recuperado de: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/mar172008revisadoVeraClotilde.pdf

Cyrino; M. C. C. C.; Baldini, L. A. F. (2012). O Software GeoGebra na Formação de Professores de Matemática – Uma Visão a Partir de Dissertações e Teses. Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, Pr, v. 1, n. 1, 42 – 62. Recuperado de http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/870/pdf_76

Eysenk, M. W. & Keane M. (1994). *Psicologia Cognitiva:* um manual introdutório. Tradução de Maria Helena F Gesser e Wagner Gesser. Porto Alegre: Artes Médicas.

Gravina, M. A. (2001). Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. (Doutorado em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul). Recuperado de http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher.* V.74, 11-18.

Hohenwarter, M.; Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27, (3),126-131, 2007. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/b65e/a30ab2c756dad8da2e83f07f0ae2028596a3.pdf

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. In: S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática.* Colección Ciencias de la Educación, Sevilla, España: Alfar. 4, 295-384.

Kosslyn, S. M. (1995). *Image and Brain:* The Resolution of the Imagery Debate. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Lean, G.; Clements, M. T. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics,* V.12, 267- 299.

Leivas, J. P. L.; Fogaça, L. S. (2017). Registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruência de figuras geométricas planas. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa, v. 10, n. 3, 81-100. Recuperado de https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/3999

Leung, K. C. I.; Ding, L.; Leung, A. Y. L.; Wong, N. Y. (2014). Prospective Teachers' Competency in Teaching how to Compare Geometric Figures: The Concept of Congruent Triangles as an Example. *Korean Society of Mathematical Education*. V.18, n. 3, 171-185. Recuperado de http://koreascience.or.kr/article/ArticleFullRecord.jsp?cn=SHGHEN_2014_v18n3_171

Lovis, K. A.; Franco, V. S. (2013). Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. *Informática na Educação: teoria e prática*. Porto Alegre, v. 16, n. 1, 149-160. Recuperado de http://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/26104

Patkin, D.; Plaksin, O. (2011). Congruent Triangles Sufficient and Insufficient Conditions Suggested Milestones for Inquiry and Discussion. *Korean Society of Mathematical Education*, v.15, n. 4, 327-340. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/268871350_Congruent_Triangles_Sufficient_conditions_and_insufficient_conditions_Suggested_milestones_for_inquiry_and_discussion

Primi, R.; Almeida, L. S. (2000). Estudo de validação da Bateria de Provas de Raciocínio (BPR-5). *Psicologia: Teoria e Pesquisa.* V.16. N.2, 165-173. Recuperado de http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-37722000000200009&script=sci_abstract&tlng=pt

Primi, R.; Santos, A. A.; Vendramini, C.M.; Taxa, F.; Muller, F. A. Ukjanenko, M. F.; Sampaio, I.S. (2001). Competências e Habilidades Cognitivas: Diferentes Definições dos Mesmos Construtos. *Psicologia: Teoria e Pesquisa,* Vol. 17 n. 2, 151-159. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/%0D/ptp/v17n2/7875.pdf

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva.* Tradução de Maria Regina Borges Osório- Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Usiskin, Z. (1994). Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: Lindquist, M. M.; Shulte, A. P.(orgs). *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. de Hygino H.Domingues. São Paulo: Atual.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight* − a theory of mathematics education. Orlando: Academic Press.

Viana, O. A. (2005). *O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à matemática e à geometria.* Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

Villiers, M. (2010). Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele. *Revista Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 12, n. 3, 400-431. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/5167/3696

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Raciocínio geométrico e aprendizagem de congruência de triângulos

Odalea Aparecida Viana
Doutorado em Educação
Professora aposentada e voluntária da Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Uberlândia, MG, Brasill
odaleaviana@gmail.com
http://orcid.org/0000-0003-4782-6718

Lucas Rafael Pereira Silva
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática
Professor da Rede Pública do Estado de Minas Gerais, Ituiutaba, MG, Brasil
lucasfacip@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1825-0097

Endereço de correspondência do principal autor
Rua B, n º p10, Vila Silvia, CEP 12460-000, Campos do Jordão, SP, Brasil

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Iniciais dos primeiros nomes acrescidas com o último Sobrenome, conforme exemplo.

Concepção e elaboração do manuscrito: O. A. Viana
Coleta de dados: L. R. P. Silva
Análise de dados: O.A. Viana; L.R. P. Silva
Discussão dos resultados: O.A. Viana; L.R. P. Silva
Revisão e aprovação: O.A.Viana

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO
Recebido em: 17-09-2019 – Aprovado em: 09-04-2020.