A HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

Nielce M. Lobo da Costa

Neste artigo nosso interesse é analisar a gênese e o desenvolvimento da trigonometria, o aparecimento do conceito de função trigonométrica e, em particular, o das funções seno e cosseno[1]. Nossa motivação para escrevê-lo está na crença da importância que tem para quem ensina Matemática do conhecimento sobre como e o porquê do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofridas. Além disso, acreditamos que o estudo histórico do surgimento de um conceito é importante, pois evidencia os obstáculos epistemológicos[2] do processo de construção do saber matemático. A análise desses obstáculos vividos pelos matemáticos no passado nos ajuda a compreender as dificuldades dos alunos de hoje e, por outro lado, o nosso entendimento da própria História e evolução da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes. (Arsac, 1987; Sierpinska, 1985; Vergnaud, 1994).

Para considerar a gênese, devemos discutir qual o significado que daremos ao termo *Trigonometria*. Se o tomarmos como a ciência analítica estudada atualmente, teremos a origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas, se o considerarmos para significar a geometria acoplada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se o considerarmos, ainda, para significar literalmente "medidas do triângulo", a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Limitaremos este nosso trabalho ao desenvolvimento da idéia de funções trigonométricas em R dando, porém, um esboço das raízes desta ciência, desde as tabelas de sombras (século XV a.C.) até a expansão das funções trigonométricas em séries (século XVIII).

Estudar a história da trigonometria também permite observar o surgimento e o progresso da Análise e da Álgebra, campos da Matemática nela contidos de forma embrionária. A trigonometria, mais que qualquer ramo da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação.

Dividiremos esse artigo em sete partes: As raízes da Trigonometria; A Trigonometria na Grécia; A contribuição dos Hindus; A Trigonometria dos Árabes e dos Persas; A Influência do Conhecimento Árabe sobre os Europeus; A Trigonometria na Europa a partir do século XIV e A Trigonometria Incorporada pela Análise Matemática.

1. As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram, tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes,** conhecido como Papiro **Rhind**[3], que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.

Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV** .

Exemplo:

Seja $OV = 40$ e $OM = 80$,

então o $seqt = \frac{80}{40}$,

isto é: $seqt = 2$

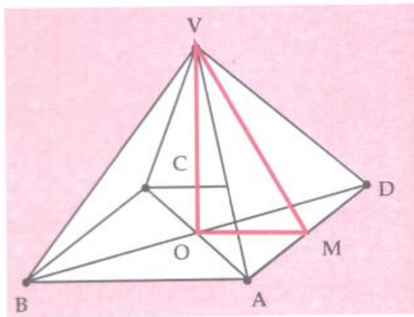


Figura 1 - O Seqt Egípcio

1. As observações aqui apresentadas são parte de um estudo feito para nossa dissertação de mestrado (1997), na PUC/SP.
2. O termo obstáculo está sendo usado aqui como um conhecimento que funciona bem em um certo contexto mas, em outro, produz respostas falsas. Para maiores detalhes indicamos Brousseau (1983) e o capítulo III de nossa dissertação mencionada na bibliografia.
3. O Papiro Ahmes é o mais extenso documento egípcio em matemática que chegou aos nossos dias. Ele é uma cópia de um antigo papiro do sec XIX a.C. que esteve em poder do escriba Ahmes. Foi adquirido no Egito por H. Rhind e por isso é usualmente conhecido como Papiro Rhind (Chace, 1986).

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a idéia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a seqüências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas idéias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das **funções** tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.

Como já mencionamos, os primeiros vestígios de trigonometria surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. É impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medidas e uma escala.

Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C, uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (Smith, 1958).

Parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador 1. Também é plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da trigonometria primitiva egípcia.

Um importante conceito no desenvolvimento da Trigonometria é o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida, uma vez que ele é fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos agudos do triângulo e não da particular medida dos lados). Existem evidências de tentativas de medi-los, em datas muito remotas, pois chegaram até nossos dias fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados com propósito de medições (Smith, 1958).

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram freqüentemente usados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo mas, infelizmente não temos registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

Na literatura chinesa encontramos uma certa passagem que podemos traduzir por: *"O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon"*, o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C..

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

2. A trigonometria na Grécia

Segundo o historiador **Heródoto** (490 - 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C..

O mais antigo gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim (Eves, 1995). Ele evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos, uma vez que a documentação relativa a esse período é praticamente inexistente.

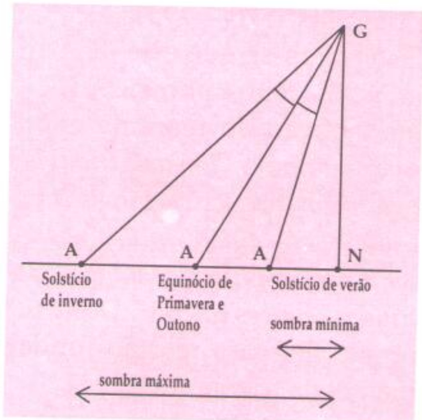


Figura 2 : O Gnômon

O gnômon era uma vareta (GN na figura 2) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90°, e o comprimento de sua sombra (AN) era observado, num horário determinado: meio dia. Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano e o movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia.

Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de **AN** ao meio dia variava com o ângulo **A**. Para nós isto significa uma colocação de **AN**, ou $\frac{AN}{GN}$ como uma "função" do ângulo **A**, nos dias de hoje denominada cotangente. Porém, não temos nenhum vestígio do nome no período.

Sabemos que os diversos ramos da Matemática não se formaram nem evoluíram da mesma maneira e ao mesmo tempo, mas sim gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste campo, a Grécia produziu grandes sábios; entre eles **Thales** (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo **Pitágoras** (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"*. Deste teorema deriva a relação fundamental da trigonometria.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., foi responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Essa lei relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas. Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para se estudar o som (Bell, 1945).

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando **Hipsícles**, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa idéia foi posteriormente generalizada por **Hiparco** para qualquer círculo (Eves, 1995).

Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra. Foi **Eratóstenes de Cirene** (276 -196 a.C.), contemporâneo de **Arquimedes** (287-212 a. C.) e **Aristarco** (310-230 a. C.) que produziu a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. Salientamos que, para tornar possível o trabalho de **Eratóstenes**, foi determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e de como medi-lo. O tratado *"Sobre a medida da Terra"* resume as conclusões a que ele chegou mas, infelizmente, esses escritos se perderam e tudo o que conhecemos sobre o assunto chegou até nós pelos relatos de **Ptolomeu** e **Heron**.

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles

Concluímos que na Grécia, durante os dois séculos e meio compreendidos entre Hipócrates e Eratóstenes, a trigonometria esteve "engatinhando", o que nos leva a concordar com a afirmativa de Boyer (1974), *"de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia mas disso não resultou uma trigonometria sistemática"* (pág. 118).

Surgiu então, na segunda metade do século dois a.C., um marco na história da trigonometria: **Hiparco de Nicéia** (180-125 a.C.). Fortemente influenciado pela matemática da Babilônia, ele acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1° em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto. Sua trigonometria baseava-se em uma única **"função"**, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda.

Hiparco construiu o que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°, em cuja montagem utilizou interpolação linear. Ele observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0°. Resolveu então associar a cada corda de um arco o angulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia e por isso ele recebeu o título de **"Pai da Trigonometria"**.

Em linguagem moderna, esse resultado seria:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e o grande **Cláudio Ptolomeu**, (Klaudius Ptolemaios) autor da mais importante obra da trigonometria da Antiguidade, surgida no século dois de nossa era, em Alexandria, a *"Syntaxis Mathemática"*, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como **Almagesto**, que significa em árabe "A maior" = Al magest, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época, em Astronomia. *"As obras de Autolico, Euclides, Ipsicle e Aristóteles em Astronomia, juntas formavam a Coleção Menor de Astronomia"*. A obra de Ptolomeu era a Coleção Maior: "μ ε γ ι σ τ η", e as duas eram indispensáveis para se entender o legado astronômico da Antiguidade grega (Loria,1982, pág. 85).

O Almagesto é um marco, um modelo de Astronomia que perdurou até **Copérnico**, no século XVI. Ptolomeu, na verdade, sistematizou e compilou no Almagesto uma série de conhecimentos bastante difundidos em sua época e a maior parte da obra é baseada no trabalho do astrônomo e matemático grego Hiparco, cujos livros se perderam. Isto aparece num comentário sobre trabalhos mais antigos, de **Teon de Alexandria**, que viveu dois séculos após e foi um dos matemáticos que pesquisaram as descobertas anteriores dos gregos. Ele menciona que Hiparco escreveu doze livros sobre cálculo de cordas, incluindo uma tábua de cordas.

O Almagesto sobreviveu e, por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos métodos usados nas construções, o que é de grande importância para nós, visto que tanto daquela época se perdeu. Como disse Kennedy (1992): *"Para os matemáticos o Almagesto tem interesse devido às identidades trigonométricas que Ptolomeu divisou para auxiliá-lo a reunir dados para sua tabela de cordas"* (pág.28).

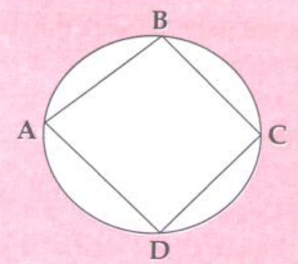
Dos treze livros que compõem o Almagesto, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tábua de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia.

Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos dez e onze do primeiro livro do **Almagesto**. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como tal tabela pôde ser calculada. Na verdade, não existe no **Almagesto** nenhuma tabela contendo as "funções" seno e cosseno, mas sim a função corda do arco x, ou **crd x**, embora naturalmente estes termos não apareçam.

A "função" corda do arco **x** era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de **x** graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de crd x correspondente a um acréscimo de um minuto em x. Esta coluna era usada para interpolações, isto é, para achar o valor de crd x se x estivesse entre duas entradas na coluna de arcos.

No **Almagesto** temos: (a) uma tabela mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180°; (b) o uso da base 60, com a circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagesimais, não só para expressar ângulos mas para qualquer tipo de cálculo, com exceção dos de medida de tempo.

(c) o resultado que passou a ser conhecido como Teorema de Ptolomeu: Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.



$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Figura 3: Teorema de Ptolomeu

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é sen(a+b) e sen(a-b). Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica.

(d) o uso, também baseado nas cordas, do seno do arco metade:

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi)$$

Em nosso entender, a mais importante contribuição do **Almagesto** foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais pela Matemática, já que ele desenvolveu, como muito bem escreveu Aaboe (1984).

"...não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria.(pág. 128). Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a idéia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável" (pág. 129).

Como o centro de nossas atenções é a trigonometria, propomo-nos a investigar aqui apenas a gênese das funções trigonométricas. Isso significa que o desenvolvimento do conceito de função será mencionado rapidamente. Um estudo histórico mais detalhado de funções pode ser encontrado nos trabalhos de Mendes (1994), Schwarz (1995) e Oliveira (1997).

Na Grécia Antiga o conceito de função propriamente dito não foi desenvolvido, mas nos estudos de Aristóteles aparecem idéias sobre quantidades variáveis e nos trabalhos de cônicas de Arquimedes e Apolônio é introduzido o "Symptom" de uma curva, definido por eles como a condição para que um ponto pertencesse à cônica, isto é, uma espécie de dependência funcional (Kennedy,1994).

A Matemática da Antiguidade Clássica não estabeleceu a noção geral de quantidade variá vel ou de função e concluímos com Youschkevtch (1981) que os métodos quantitativos de pesquisa, usados em Astronomia, tinham como objetivo representar, em tabelas, relações entre conjuntos discretos de quantidades dadas, mas sem a preocupação de generalização.

3. A contribuição dos hindus

No século IV da nossa era, a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros germânicos e com a queda do Império Romano. O centro da cultura começou a se deslocar para a Índia, que revolucionou a trigonometria com um conjunto de textos denominados **Siddhanta**, que significa sistemas de Astronomia.

O que chegou até nós foi o **Surya Siddhanta**, que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico, de aproximadamente 400 d.C, escrito em versos e em sânscrito. Os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol. Esta obra contém poucas explicações e nenhuma prova pois, afinal, tendo sido escrita por um Deus, seria muita pretensão exigir provas. (Boyer, 1974).

A importância do **Surya** para nós é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da "função" corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de **jiva**. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, como na Figura 4.

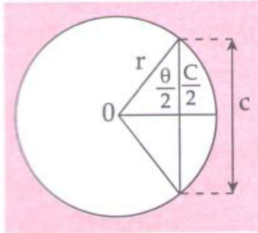


Figura 4: O "Jiva" Hindu

$$\text{jiva}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r}\cdot \text{crd}\,\theta$$

Definiam o **jiva** como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco).

Com os hindus, as principais "funções" trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, particularmente os de interpolação quadrática e linear.

Por volta de 500 d.C., o matemático hindu **Aryabhata** já calculava semi cordas e usava também o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C. Ao surgirem, os numerais hindus continham nove símbolos e não havia símbolo para o zero.

Quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, demostraram algumas identidades, de modo que encontramos em **Varahamihira**, no ano 505 d.C., o equivalente verbal de

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

Após os hindus, foram os árabes e os persas a dar sua contribuição à trigonometria.

4. A Trigonometria dos Árabes e Persas

O Império Muçulmano ou Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e da ciência do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, à difusão da língua árabe, que substituiu o grego na condição de língua internacional. O emprego do árabe permitiu a fixação e a preservação de obras antigas, que foram traduzidas e assim difundidas entre os intelectuais muçulmanos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como **AL Battani** (aproximadamente 850 a 929 d.C.), ou **Albategnius**, nas traduções latinas, chamado o **Ptolomeu de Bagdad.**

Os estudos de **AL Battani** ficaram entre o Almagesto e Siddhanta e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua genial idéia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão **jiva** é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa.

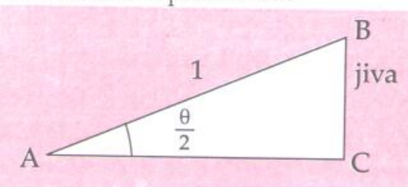


Figura 5: A Idéia do Raio 1 de AL Battani

$$\text{jiva} = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{BC}{1}$$

$$\text{Sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1}$$

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, podemos afirmar que:

$\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$

No ΔABC temos sen $\frac{\theta}{2} = \frac{\text{jiva}}{1}$

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\text{jiva}}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$$

$$\text{logo sen}\ \frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{\text{jiva}}{1}$$

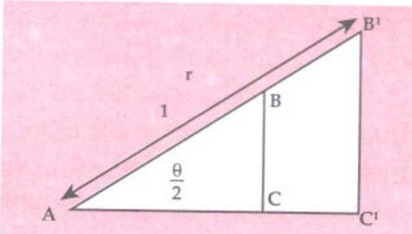


Figura 6: Fórmula Usada para Construir a Tabela de Al Battani

Com esta fórmula pôde-se construir uma tábua, de _ a 90 graus, variando de _ em _ de graus, ou seja, uma tabela de senos, apesar deste nome não ter sido usado para designá-la. Al-Battani estava interessado em calcular a altitude do sol, para o que foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas mais precisas que as existentes na época.

Depois de Al-Battani, digno de nota entre os matemáticos árabes foi **Abû'l Wêfa** que, em 980, iniciou uma organização, uma sistematização de provas e teoremas de trigonometria.

Destacamos também o astrônomo persa **Nasîr ed-dên al-Tûsî** autor, em 1250, do primeiro trabalho no qual a trigonometria plana apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da Astronomia. Isto seria retomado na Europa, no século XV, quando Regiomontanus estabeleceu a trigonometria como um ramo da Matemática.

Quando a Escola de Bagdad entrou em declínio, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, para a Península Ibérica, e com ele o estudo da trigonometria, particularmente nos triângulos esféricos necessários aos estudos astronômicos. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro da cultura a partir de 1085, quando foi libertada pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela afluíram os estudiosos ocidentais, visando a adquirir o saber muçulmano. O século XII na História da Matemática foi, então, um século de tradutores dos quais citamos Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester . Com isso, a Europa teve acesso à matemática árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles. (Struik, 1992).

5. A Influência do Conhecimento Árabe sobre os Europeus

Diversos dos astrônomos árabes se deslocaram para a Espanha para trabalhar e passaram a difundir o saber. Os mais importantes escritores foram os astrônomos Ibrâhîm ibn Yahyâ al Naqqâsh (conhecido como Abû Ishâq ou Ibn al-Zarqâla ou, nas traduções latinas como **Arzachel,** e que viveu em Córdoba), autor de um conjunto de tábuas trigonométricas em 1050, e Jabir ibn Aflah (conhecido como Jeber ibn

Aphla, tendo vivido em Sevilha), cujos estudos astronômicos de 1145 se mostraram tão interessantes que, séculos mais tarde (1543), foram publicados em Nuremberg.

O matemático europeu mais habilidoso do século XIII foi **Fibonacci** (1170-1250). Ele estudou no norte da África e depois viajou pelo Oriente como mercador, com isso sofrendo grande influência dos árabes. Sua obra *"Practica Geometriae"*, de 1220, é uma aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura.

O rei Alfonso X de Castela ordenou, no ano 1250, a estudiosos (cristãos, mouros e judeus) de Toledo que traduzissem os livros de Astronomia e modernizassem as tábuas trigonométricas árabes. Em 1254 foram concluídas as *Tábuas Afonsinas*, que junto com *Os Libros del Saber de Astronomia*, foram considerados de grande valia, uma vez que "a cultura astronômica preservada na Península Ibérica foi o esteio da arte portuguesa de navegar, no século XV" (Serrão, pág. 49,1971).

6. A Trigonometria na Europa a partir do século XIV

Na Europa do século XIV alguns importantes passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática. Pela primeira vez as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chega-se à conclusão de que *a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais.* Com o início do estudo da velocidade instantânea ou pontual e a atenção especial dada ao movimento, tornou-se necessário desenvolver um suporte matemático para ele.

Paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, que já vinha ocorrendo na Europa desde o século XI com a retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das funções. Neste campo surgiu Nicole Oresme (1323 -1382) com seu *"Treatise on the configuration of Qualities and Motions"*, no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis (no caso velocidade por tempo). Seu trabalho influenciou Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650) nos séculos XVI e XVII. Com os estudos de Oresme começou a se consolidar o conceito de função.

No século XIV, Purbach, na Inglaterra, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus. Purbach foi o mestre de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

Regiomontanus escreveu um *"Tratado sobre triângulos"*, em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. No *"Tratado"* ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de Purbach, e introduziu na trigonometria européia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na trigonometria plana e esférica.

Copérnico (1473-1543) também contribuiu ao completar, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu *"De Lateribus et Angulis Triangulorum"*, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus em 1542.

Com o advento da imprensa a cultura se difunde e, a partir daí, nenhum grupo nacional conserva a liderança. Na Antiguidade foi a Grécia a sobrepujar os outros povos do Ocidente, na Idade Média o Mundo Árabe, mas, do século XV em diante, com o desenvolvimento do Racionalismo, a atividade matemática desloca-se repetidamente para diversos países.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria provavelmente foi a *"Tabula Directionum"* de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data desse ano, em Veneza.

As seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo em vez de funções do arco e subentendidas como razões, pela primeira vez, no *"Canon DoctrinaeTtriangulorum"* de Joachim Rhaeticus em Leipzig, em 1551, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante, exceto *perpendiculum, basis e hypotenusa.*

Rhaeticus (1514-1576) retomou, um século depois, as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante, e de dez em dez segundos para o arco de 1°. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45° e completando a tabela com o uso da igualdade sen x = cos (π/2-x). Deve-se também a Rhaeticus a introdução das secantes na trigonometria européia e os cálculos do sen n θ em termos de sen θ, retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli, em 1702.

Neste relato histórico não poderíamos deixar de mencionar Viète (1540-1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria, em 1580. Foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, o que representou grande progresso no campo da Álgebra. Também construiu tábuas trigonométricas e calculou o sen 1′ com treze casas decimais.

Viète iniciou o desenvolvimento sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, aproximados até minutos, e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Além disso, foi ele quem introduziu métodos gerais de resolução em matemática. É dele a idéia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Isto está em sua obra *"Canon Mathematicus"*. No livro *"Variorum de rebus mathematicis"* aparece um equivalente da nossa lei das tangentes:

$$\frac{\text{tg}\,(A+B)}{\text{tg}\,(A-B)} = \frac{a+b}{a+b} \text{ com A e B}$$

ângulos e **a** e **b** os arcos respectivos. Na verdade, esta relação só foi publicada pelo matemático dinamarquês Thomas Fincke, no seu *"Geometria Rotundi"*, em Basel 1583, apesar de ser devida a Viète.

A próxima figura notável na trigonometria foi Pitiscus que publicou um tratado, em 1595, no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus e modernizou o tratamento do assunto. A palavra **trigonometria** aparece pela primeira vez, como título de um livro seu.

Depois de Pitiscus destacamos o britânico Napier, que estabeleceu regras para triângulos esféricos, amplamente aceitas, enquanto sua maior contribuição, os logaritmos, ainda estavam sendo analisados e não eram reconhecidos como válidos por todos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas postumamente no *"Napier Analogies"*, do *"Constructio"* no ano de 1619, em Edinburgh.

Outro grande expoente em trigonometria foi Oughtred. Em seu trabalho de 1657 preocupou-se em desenvolvê-la do ponto de vista simbólico. No entanto, como o simbolismo algébrico estava pouco avançado para tornar isto possível, a idéia não foi aceita até que Euler exercesse sua influência neste sentido no século XVIII.

John Newton (1622-1678) publicou, em 1658, o tratado *"Trigonometria Britannica"* que, embora baseado nos trabalhos de Gellibrand e outros escritores, era o mais completo livro do tipo que havia surgido em seu tempo. Newton e Gellibrand anteciparam a tendência atual de introduzir divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas.

O próximo importante passo em trigonometria foi dado por John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções e por trabalhar com séries infinitas.

Sir Isaac Newton (1642-1727) também deu sua contribuição à trigonometria pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido arcsen x em séries e, por reversão, deduzido a série para sen x. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para sen (nx) e cos(nx) tendo, com isso, aberto a perspectiva para o sen x e o cos x surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Finalizando, vale mencionar que Thomas-Fanten de Lagny foi o primeiro matemático a evidenciar a **periodicidade** das funções trigonométricas, em 1710, e a usar a palavra *"goniometry"*, em 1724, embora mais num sentido etimológico do que como medida de ângulo, como agora é o caso.

7. A Trigonometria Incorporada pela Análise Matemática

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Uma idéia genial de Euler foi criar a função E, que denominaremos função de Euler. Ela associa a cada número um ponto de um círculo C_1 unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto $\Re$[4] e o contra domínio é C_1 A função $E: \Re \rightarrow C_1$ associa a cada $x \in E$ de modo que, um ponto $P \in C_1$, $P = (a, b)$ pertence a C_1 se e somente se $a^2+b^2=1$.

Como essa função faz a correspondência entre cada número x e os pontos do círculo C_1, ao número zero corresponde o ponto $A = (1,0)$ e, dado $x \in \Re$, $x > 0$, mede-se, a partir desse ponto A, um arco de comprimento x, no sentido anti - horário. A extremidade do arco é um ponto $P = E(x)$. Se $x<0$, mede-se, a partir de A, um arco de comprimento x, no sentido horário, e se obtem o ponto $P = E(x)$ correspondente. A função $E: \Re \rightarrow C_1$ consiste em envolver a reta como se fosse um fio inextensível sobre o círculo C_1 que, por sua vez, é imaginado como um carretel.

Definindo-se as funções:

$$h_1:C_1 \rightarrow \Re \text{ por } h_1(P(a,b))=a$$

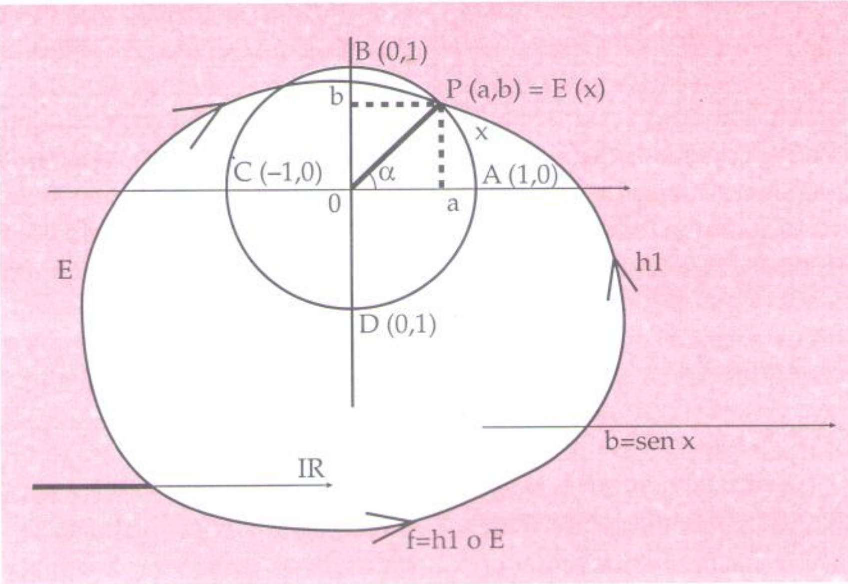
e

$$h_2:C_1 \rightarrow \Re \text{ por } h_2(P(a,b))=b,$$

e tomando-se as compostas: $f = h_1 \text{ o } E$ e $g = h_2 \text{ o } E$, podem-se definir as funções seno e cosseno de um número real x e não mais de um **ângulo**, como era anteriormente necessário.

Dado $x \in \Re$, a ele se associa um ponto P, do círculo, sendo: $P=E(x)=(a,b)$. Considerando $\mathbf{a = \cos x}$ e $\mathbf{b = sen\, x}$ definimos: f: $\Re$ Æ $\Re$ e g: $\Re$ Æ $\Re$., sendo cosx a abscissa e senx a ordenada de $P = E(x)$.

Vide figura abaixo.



Como muito bem assinale Lima (1991): *"A função de Euler E: R→ C_1 que possibilita encontrar senx e cosx, como função de uma variável real x, abriu para a trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas"* (pág. 35).

O tratamento analítico das funções trigonométricas está no livro *"Introductio in Analysin Infinitorum"*, de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série:

$$\text{senx}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

E mostrou-se que:

$$\text{sen } x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

onde i é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.

Enfim a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e por fim transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos sem necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Foi um longo caminho da Humanidade para chegar até a trigonometria que hoje ensinamos aos nossos alunos. Nesse texto não tratamos da evolução do conceito de ângulo que é subjacente e essencial ao desenvolvimento da trigonometria, nem da construção das tábuas trigonométricas ou da trigonometria esférica, indispensável na Astronomia. Nos propusemos apenas a descortinar parte dessa trajetória. Fica a nossa mensagem ao professor para que, ao ensinar trigonometria, de alguma forma se discutam com os alunos questões que os levem a perceber que o conhecimento matemático não "caiu do céu" ou surgiu pronto e acabado e que talvez a evolução possa ser acompanhada e alguma parte do caminho feita com eles.

4.Na época o conjunto dos números reais não estava ainda bem definido (isto só ocorreu no século XIX) porém, neste texto, estamos dando uma interpretação moderna do trabalho de Euler; para tanto tomamos por base o artigo de Lima, 1991.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **"Episódios da História Antiga da Matemática"**Trad. de J.B. Pitombeira de Carvalho, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ARSAC,G."L'Origine de la Demonstration: Essai d'Epistémologie Didactique", **Recherche en Didactique des Mathématiques** (RDM), vol 8, nº **3**, pp 267-312, 1987.

BELL, E.T.- **"The Development of Mathematics"**, 2ª edition. NewYork: McGraw-Hill Book Company, 1945.

BOYER, C. **"História da Matemática"** - Trad. de Elza Gomide, São Paulo: Ed. Edgard Blücher,1974.

BROUSSEAU, G. **"Les Obstacles Épistémologiques et les Problèmes en Mathématiques"**, Recherche in Didadique des Mathematiques, vol. 4, nº **2**, 1983.

CHACE, A. B. **"The Rhind Mathematical Papyrus"**- v. 8 - Classics in Mathematics Education of The National Council of Teachers of Mathematics, 1986.

EVES, H. **"Introdução à História da Matemática"**- trad de Hygino H. Domingues, Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

HEATH, T. L. **"The Thirteen Books of Euclid's Elements"** Traduzido para o inglês, do texto de Heiberg, Volume I , NewYork: Dover Publications, 1956.

KENNEDY, E. S. **"Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula"**, volume 5: Trigonometria, Trad. de Hygino H. Domingues - São Paulo: Atual, 1994.

KLINE, M. **"Mathemathics in Western Culture"**, NewYork, Oxford University Press, 1953.

LIMA, E. L. **"Meu Professor de Matemática e outras histórias"** - I.M.P.A., Vitae, Rio de Janeiro; IMPA/Vital, 1991.

LOBO DA COSTA, N.M.–**"Funções Seno e Cosseno: Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do 'Mundo Experimental' e do Computador"**– Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 1997.

LORIA, G. **"Storia delle Matematiche dall' Alba della Civiltà al Tramonto del Secolo XIX"**, Milano: Ulrico Hoelpi, Milano, 1982.

MENDES, M. H. - **"O Conceito de Função: Aspectos Históricos e Dificuldades Apresentadas por Alunos na Transição do 2º para o 3º Grau"**- Dissertação de Mestrado - PUC/ Rio, 1994.

OLIVEIRA, N. - **"Conceito de Função: uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem"**- Dissertação de Mestrado - PUC /São Paulo, 1997.

SCHWARZ, Osmar - **"Sobre as Concepções de Função dos Alunos ao Término do 2º Grau"** - Dissertação de Mestrado - PUC / São Paulo, 1995.

SERRÃO, J. - **"Dicionário de História de Portugal"**, Porto: Iniciativas Editoriais,1971.

SIERPINSKA, A. **"Obstacles Épistémologiques Relatifs a la Notion de Limite"**- Recherche in Didadique des Mathematiques, vol. 6, **n. 1**, pp 5-67, 1985.

SMITH, D.E. **"History of Mathematics"**, v. I, NewYork: Dover Publications, 1958.

STRUIK, D.J. **"História Concisa Das Matemáticas"** - Trad. de J.C. Santos Guerreiro, Lisboa: Gradiva, 1992.

VERGNAUD, G. **"Epistemology and Psicology in Mathematics Education"** in Nesher, P. e Kilpatrick, J., "Mathematics and Cognition", Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

WATANABE, R. G.**"Seno de 30 é um meio ?"**- Revista do Professor de Matemática, - n. 30, 1996.

YOUSCHKEVTCH - "Le Concept de Fonction Jusqu'au Milieu du XIXᵉ siècle", **Fragments d' Histoire des Mathématiques**, Brochure A.P.M.E.P. n. **41**, Trad: Jean- Marc Bellemin, pp 7- 67, 1981.