artigo

REFLEXÕES SOBRE A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Ana Teresa de C. C. de Oliveira[1]
Mestre em Matemática pela PUC/RJ

Resumo
O presente texto apresenta reflexões sobre o ensino/aprendizado da álgebra. São analisadas as possíveis razões para os erros comuns observados no desempenho alunos. Discute-se, também, a necessidade de uma metodologia de ensino que favoreça a produção de significados para a álgebra. São apresentadas, ainda, sugestões de questões de álgebra com abordagens geométricas.

Palavras-chave: álgebra, equações, significados, variável, generalização.

Afinal, o que é álgebra?

Antes de refletirmos sobre as dificuldades do aprendizado da álgebra, é importante destacar o não-consenso sobre o significado de álgebra entre os estudiosos do assunto. Das diferentes formas de conceituar esse ramo da Matemática, encontramos freqüentemente "álgebra" entendida como "cálculo literal", ou como"uma generalização da aritmética".

Podemos dizer até que essas conceituações se referem a habilidades e competências de fato exigidas pela álgebra, mas estão longe de sugerir a abrangência de situações e de processos cognitivos envolvidos em seu aprendizado. Além disso, induzem a interpretações equivocadas como a de que em aritmética não lidamos, também, com generalizações.

Como conseqüência desta variedade de concepções sobre o que é álgebra, e das lacunas que cada uma apresenta, talvez os educadores matemáticos fiquem diante de dúvidas quanto à importância a ser atribuída aos diversos tópicos do ensino de álgebra. Talvez até ocorram dúvidas quanto a alguns tópicos de ensino serem ou não pertinentes a essa área da matemática, como: *gráficos são ou não parte da álgebra?(Lins, 1997, p. 89).*

O ensino de álgebra se concentra em conteúdos mais tradicionais como equações, cálculo com letras, expressões algébricas, etc, e pouco se avança em discussões que pretendam tratar das questões principais para orientarmos o ensino da álgebra. O que é álgebra? O que é atividade algébrica? Quais são os objetivos do ensino da álgebra nos diferentes níveis de escolaridade?

É necessário que a álgebra seja compreendida de forma ampla, pois fornece recursos para analisar e descrever relações em vários contextos, matemáticos e não – matemáticos, como sugere a conceituação Lins(1997, p. 137), que julgamos satisfatória:

> A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade.

Mas, na verdade, os alunos lidam com pouca variedade de aplicações. E desta forma, o ensino da álgebra tem sido limitador, na medida em que não favorece o processo de produção de significados para o que está sendo estudado. Esse processo ao qual nos referimos é fundamental e caracteriza o que entendemos por atividade algébrica.

Não é nosso objetivo neste texto, esgotar a discussão sobre concepções para *álgebra* e *atividade algébrica,* nem tratar das diferenciações e possíveis conseqüências para o seu ensino. Pretendemos discutir alguns erros mais comuns cometidos pelos alunos e considerar procedimentos metodológicos que acreditamos contribuir para o aprendizado da álgebra.

1 Professora de metodologia de matemática do curso normal superior do Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro. Professora de matemática do curso de formação de professores do departamento de Educação da Universidade Veiga de Almeida – RJ. Professora do curso de especialização em educação matemática da PUC-RJ.

A álgebra é difícil!

Essa área da matemática tem um lugar de importância nos currículos. Tal relevância pode ser observada pela ênfase expressiva colocada nos conteúdos algébricos nos programas escolares.

O momento em que a álgebra é apresentada aos alunos se torna um marco por duas razões principais: a culminância de vários anos de estudo de aritmética é o início de muitos outros anos de estudo abrangendo vários ramos da matemática.

Os alunos, quando falam de álgebra, dizem que sua compreensão é difícil. E, seja em que nível for, apesar de idades variadas e experiências diversas neste campo matemático, revelam, em diferentes nuances, erros básicos comuns que se repetem ao longo de sua formação.

Os procedimentos que fazem parte do cenário algébrico são complexos para muitos. Para resolver uma equação, fatorar uma expressão algébrica ou fazer simplificações para reduzi-la a uma expressão mais simples, os alunos precisam utilizar conhecimentos, técnicas e realizar manipulações algébricas às vezes sofisticadas, que só estão ao alcance de poucos. O uso de convenções algébricas, o conceito de variável, o conceito de incógnita, o recurso a determinado produto notável... são responsáveis por dificuldades em lidar com as situações propostas.

Tentar conhecer todas as possíveis razões das falhas conceituais e técnicas que constatamos quando ensinamos álgebra, nos remete a uma discussão muito ampla. Vamos abordar alguns aspectos dessa questão.

Possíveis razões

Observando as dificuldades mostradas pelos alunos, temos indicações de um processo de ensino e de aprendizagem que investe numa atuação mecânica, caracterizada por uma manipulação automática e cega de variáveis e operações.

Quando se deparam com letras não usuais para representar incógnitas, isto lhes causa estranhamento, como se as relações entre as quantidades estivessem comprometidas. Há uma escravização às letras x, y e z como as únicas possíveis de estarem presentes enquanto incógnitas de uma equação. Provavelmente, isto se deve, em parte, à pouca exploração de problemas em outros contextos, que exigem a solução de equações. Certamente, a variedade de aplicações contribui para evitar essa tendência, tornando o aluno flexível e contribuindo para a compreensão de que as relações entre raízes e os valores destas raízes estão preservados dentro de uma mesma equação, seja em *x*, *n*, etc.

Por falar no uso de *letras* em álgebra, a diversidade de situações que se referem a *variável* e *incógnita* indiferentemente comprometem, muitas vezes, a compreensão dos alunos. O conceito de *variável* é multifacetado.

Segundo Usiskin (1988, p.8), é importante estarmos atentos para as interpretações equivocadas a que o conceito de variável está sujeito. A partir destes equívocos, inclusive, conceitua-se freqüentemente álgebra como o *estudo de variáveis*, o que é inadequado, tanto pelo fato de não contemplar o que de fato entendemos como álgebra, como também pelo fato de nem sempre elementos representados por letras estarem associados à idéia de *variação*.

Se considerarmos algumas expressões usuais no estudo de matemática, podemos observar diferentes sentidos para o que, em geral, tratamos por *variável*:.

- Consideramos uma sentença do tipo $x^2 + 3x + 5 = 0$ como uma *equação*, sendo *x* uma quantidade que pode ser conhecida com a resolução da equação.
- Em trigonometria, temos uma famosa identidade, que relaciona o seno e o coseno de um mesmo arco expressa por $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, sendo *x o* o argumento de uma função.
- Podemos, também, destacar uma relação entre duas quantidades (uma função), que não é para ser resolvida, do tipo $y = kx$. Somente neste último caso, temos o sentido de variação realmente presente, pois conhecido o valor do parâmetro k, temos que *y* varia em função do valor de *x*.

Cabe lembrar que lidamos ainda com letras no contexto geométrico, em situações bastante diferentes das que acabamos de analisar. Representamos vértices de ângulos por letras maiúsculas, medidas de lados por letras minúsculas, etc. Ainda no contexto geométrico, quando em um triângulo ABC queremos caracterizar a condição de o triângulo ser isósceles, escrevemos que AB = BC, sem que AB e BC sejam variáveis ou incógnitas.

Algumas outras barreiras se configuram na álgebra pelo fato de os alunos trazerem para o contexto algébrico dificuldades remanescentes do trabalho no contexto aritmético, ou por estenderem à álgebra procedimentos aritméticos que não procedem.

Encontramos no trabalho de Booth elementos interessantes para esta discussão. Ele analisa algumas situações que relacionam álgebra e aritmética, tratando de algumas dificuldades comuns.

A álgebra não está separada da aritmética; na verdade, ela é, em muitos aspectos, 'aritmética generalizada'. E aí se encontra a fonte de outras dificuldades. Compreender a generalização de relações e procedimentos aritméticos exige que estas relações e procedimentos tenham sido apreendidos dentro do contexto aritmético. Se eles não são identificados, ou se os alunos têm falsas concepções a respeito deles, isto pode afetar muito a performance deles no estudo da álgebra(Booth, 1988, p. 29).

Vamos fazer algumas comparações entre o que ocorre no contexto aritmético e no contexto algébrico, em situações simples tanto no ensino da aritmética quanto da álgebra.

Não podemos observar as mesmas convenções nas duas áreas, o que impede de transpormos os procedimentos de um contexto para o outro.

No contexto aritmético, por exemplo, na operação 2 x 7 não se pode omitir o sinal indicativo da operação de multiplicação a ser realizada, e escrever 27 como uma representação possível para ela, ao passo que em álgebra, m X n indica uma operação de multiplicação que também pode ser representada por mn.

Uma outra situação, de natureza convencional em álgebra, é a apresentação de expressões como 3x, 4x,...com o coeficiente à esquerda e com a letra ou as letras, à direita. Em aritmética, tal convenção não ocorre.

Estes procedimentos aritméticos que não se aplicam ao contexto algébrico, são, sem dúvida, procedimentos adotados por extensão, por grande parte dos alunos introduzidos recentemente à álgebra ou que mostram dificuldades expressivas, ao lidarem com esta área do conhecimento matemático. Provavelmente, isto leva a dificuldades ligadas ao reconhecimento do que é um coeficiente numérico em um monômio.

Alguns encaminhamentos da prática podem, talvez, contribuir para reduzir as dificuldades dos alunos.

Repensando a prática

No tratamento de uma questão, muitas vezes encontram-se ao alcance dos alunos diferentes pontos de vista, que podem e devem ser apresentados juntos. A solução de um sistema determinado por duas equações do 1º grau e duas incógnitas, por exemplo, corresponde geometricamente a um ponto comum às duas retas. No contexto algébrico, cada equação representa uma reta e o par ordenado de números reais(solução do sistema) é a forma de se representar algebricamente o ponto de interseção das duas linhas. Este é um exemplo de situação de aprendizagem onde os dois contextos – algébrico e geométrico – podem ser explorados simultaneamente pelos alunos, pois se compatibilizam num mesmo momento da escolaridade.

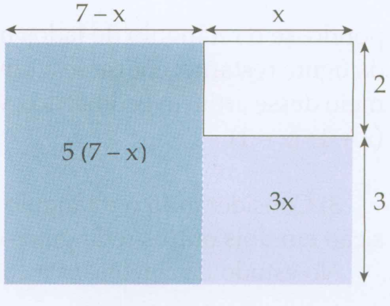
Em contrapartida, há determinadas situações em que a relação não parece simples - por razões de escolaridade, da natureza do assunto ou do conceito tratado. O significado da distância de um ponto P a linha r, com P $\notin$ r, por exemplo, está ao alcance de um aluno bem antes de ele ter condições de aprender o uso de uma fórmula algébrica para este conceito. Ulrich(1973, p.5) ilumina nossa discussão quando diz que"*um dado conceito matemático pode ser tratado algebricamente ou geometricamente; para alguns conceitos, álgebra precede a geometria, e para outros, a ordem é inversa*". Às vezes nos deparamos com o oposto. Muito cedo, uma criança se mostra capaz de entender que existem muitos de números que têm sua soma igual a 30, mas ainda precisa de bastante tempo para reconhecer que, estamos falando de um lugar geométrico: a reta definida por x + y = 30 e de sua infinitude.

Os exemplos a seguir exploram abordagens geométricas de questões algébricas que podem ser realizadas num mesmo momento do aprendizado.

Sugestões

1) Representar geometricamente a igualdade de expressões algébricas por meio da equivalência de áreas.

Por outro lado, pode-se en-

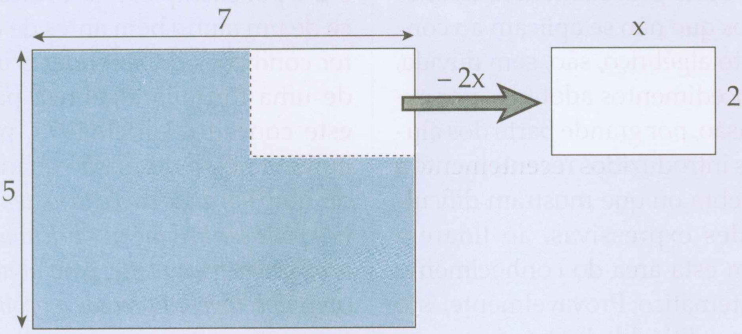


A área hachurada corresponde a expressão:

5 (7 – x) + 3x

tender a mesma situação desta forma:7 - 2x2

Do retângulo maior (5 x 7 = 35)



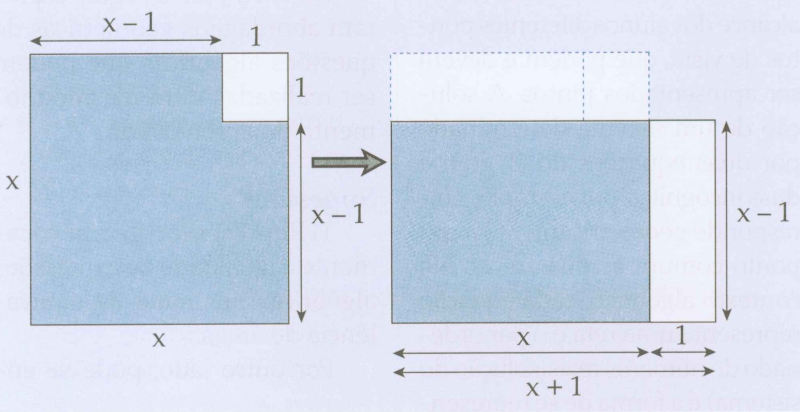
“retira-se“ o retângulo menor (- 2x), obtendo a expressão: 35 – 2x.

Das duas representações, chega-se a igualdade:

$$5\,(7 - x) + 3x = 35 - 2x$$

2) A partir do quadrado, transformar a região hachurada em um retângulo de área equivalente. Indicar a área da nova região com uma expressão representada pelas medidas de seus lados.

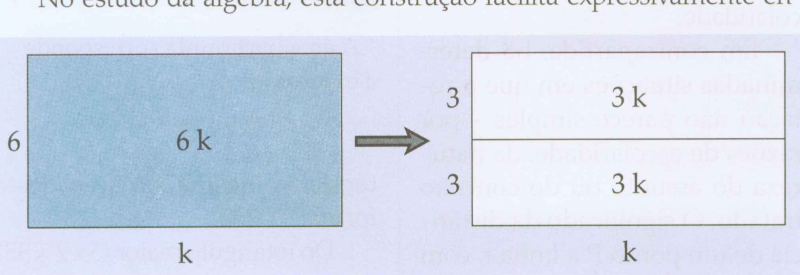
A região hachurada no quadrado tem área igual a $x^2 - 1$. Trans-



pondo-se o retângulo de lados medindo x – 1 e 1 para o lado direito da figura restante, chega-se a um retângulo de área (x – 1) (x + 1). Por meio desse artifício geométrico, verifica-se o produto notável $x^2 - 1 = (x + 1)\,(x - 1)$.

3) Considerando o retângulo de área 6k, realizar a sua decomposição em dois outros retângulos de áreas iguais.

No estudo da álgebra, esta construção facilita expressivamente en-



tender a soma de monômios, pois permite a compreender que é igual a 6k. Construção análoga pode ser proposta apresentando-se o retângulo com lados medindo x e 4x, pois nesta situação os alunos lidarão com soma e produto de monômios. É possível, também, considerar a partição em dois outros retângulos de lados 3 e K/2.

4) *Resolver inequações como | x – 2 | > | x – 6 |, usando o conceito de distância, favorecendo a análise e a discussão do que o gráfico revela.*

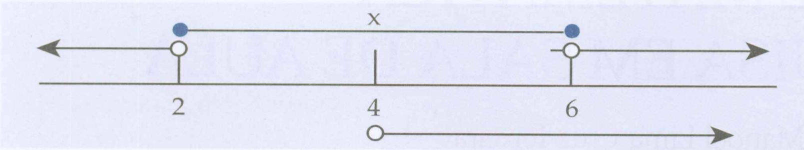
4.1 Uma das interpretações possíveis para | x – a | é *a distância de x à reta real;* abordagem abandonada pelas práticas escolares. Resolver inequações usando este significado amplia as reflexões dos alunos, gerando interpretações para as etapas que compõem o caminho normalmente utilizado, geralmente feito mecanicamente pela grande maioria dos alunos. Vejamos:

É de fácil percepção para os alunos, que temos três intervalos reais que podem conter o valor de x. Este valor pode estar:

- antes de 2, que significa estar em (– ∞, 2);
- de 2 a 6, isto é em [2, 6];
- e depois de 6, ou seja, em (6, + ∞).

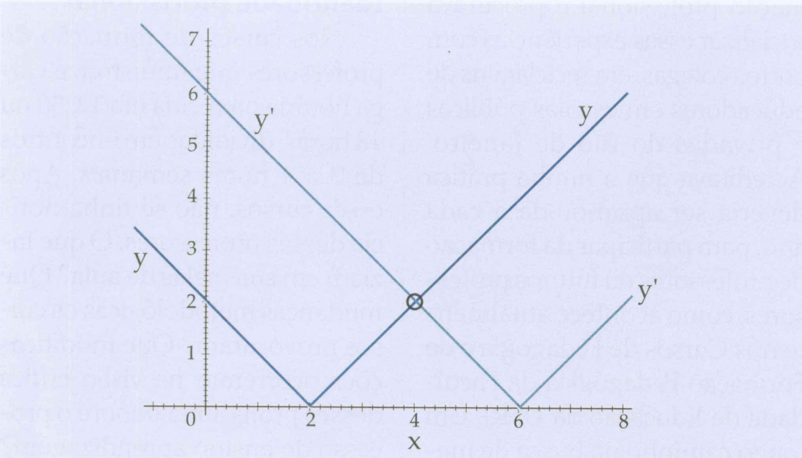
Queremos conhecer em que situação (ou situações), a distância de x a 2 é maior que a distância de x a 6. Considerando-se a primeira possibilidade a qual nos referimos, que é a de termos x antes de 2, ou seja, x < 2, nunca será possível satisfazermos a desigualdade, pois não teremos, neste caso, a distância de x a 2 maior do que a distância de x a 6. Isto é, não se verifica a desigualdade expressa por $|x - 2| > |x - 6|$.

Deslocando-se x para a direita na reta real e analisando o que se passa com seus valores no intervalo [2, 6], observamos que se x assumir valores até 4, a distância deste valor a 2 será sempre menor que a distância deste valor a 6. Em x = 4, as distâncias a 2 e 6 serão rigorosamente iguais, e para valores de x maiores que 4(o que inclui os valores maiores que 6), teremos sempre a distância de x a 2 maior que a distância de x a 6. Logo, $x \in (4, +\infty)$ é a solução da inequação proposta.



Um exemplo de valor de x nesse "intervalo solução":
Se $x = 5$, temos $|x - 2| = |5 - 2| = 3$, que é um resultado maior que $|x - 6| = |5 - 6| = 1$.

4.2 Pode-se explorar a representação geométrica das funções $y = | x - 2 |$ e $y' = | x - 6 |$, ambas compostas por um "par de semi-retas". Resolver a inequação proposta significa buscar as situações em que $y > y'$. Analisando-se o gráfico que apresenta essas funções, observa-se que há um ponto comum, interseção de $y = x - 2$ e $y' = -x + 6$, a partir do qual teremos sempre $y > y'$. Este ponto de interseção é $x = 4$. Podemos assim afirmar que $\{ x \in R \mid x > 4 \}$ é a solução da inequação proposta, ou seja, $x \in (4, +\infty)$.



Conclusões

Por intermédio das idéias relacionadas ao ensino e ao aprendizado da álgebra e das sugestões de abordagens para algumas questões algébricas apresentadas nesse texto, pretendemos enfatizar a importância de uma metodologia de ensino que permita aos alunos construírem significados para a álgebra, lidando com diferentes contextualizações para coeficientes, monômios, expressões, equações, etc.

Escolhemos a abordagem no contexto geométrico para as questões algébricas propostas, não por desconsiderarmos a importância de outras significações, inclusive não-matemáticas. Mas, por entendermos que a geometria possibilita expressivamente que se estabeleçam conexões em vários tópicos da matemática. É possível lermos e interpretarmos argumentos matemáticos nos valendo do raciocínio geométrico.

Referências bibliográficas

BOOTH, Lesley R. "Children's difficulties in beginning algebra". In: The ideas of álgebra, K - 12, p.20 - 32, Yearbook, NCTM, Michigan, Artur F. Coxford e Albert P. Shulte, 1988.

LINS, Romulo C., GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

ULRICH, James. "Disparities in viewing Geometry". In: Geometry in the curriculum, p. 3 - 7, NCTM, 1973.

USISKIN, Zalman. "Conceptions of school algebra and uses of variables". In: The ideas of algebra, K - 12, p. 8 - 19, Yearbook, NCTM, Michigan, Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte, 1988.