Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Mobilizando o raciocínio proporcional na resolução de problemas de percentual

Mobilizing proportional reasoning in solving percentage problems

Paulo Jorge Magalhães **TEIXEIRA**
Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, Brasil
paulojorge@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de mostrar resultados e análises de dados de uma avaliação que versou sobre aumentos ou decréscimos percentuais de valores ou quantias na resolução dos 3 primeiros problemas de um total de 6(seis), constantes de uma avaliação. O propósito que norteou o estudo foi o de descrever a natureza das soluções dos sujeitos, conforme o nível de raciocínio proporcional implicado, de modo a identificar e conhecer como se deu a aprendizagem ocorrente e a natureza das intervenções de ensino encaminhadas pelo professor. Os resultados da avaliação, aplicada a 12 dos 28 alunos da turma, em sala de aula de um colégio público, se deu na aula seguinte após o desenvolvimento e a exploração de conceitos associados com o exercício do raciocínio proporcional via conceitos presentes nas funções lineares durante reflexões para a resolução de problemas de Matemática Financeira ao longo de 4 aulas, duração de 40 minutos cada. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, na modalidade pesquisa-ação estratégica, segundo (FRANCO, 2005), segundo a qual a análise dos dados constituiu o mote para apontar indicações a respeito da apropriação do raciocínio proporcional durante a resolução de problemas dessa natureza. Os resultados mostraram que a metodologia e os procedimentos de resolução pouco atraíram os alunos para a resolução dos problemas propostos na avaliação.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Porcentagem; Raciocínio Proporcional

ABSTRACT

This work aims to show results and data analysis of an evaluation that dealt with percentage increases or decreases of values or amounts in solving the first 3 problems out of a total of 6 (six), as part of an evaluation. The purpose that guided the study was to describe the nature of the subjects' solutions, according to the level of proportional reasoning involved, in order to identify and understand how the learning occurred and the nature of the teaching interventions sent by the teacher. The results of the evaluation, applied to 12 of the 28 students in the class, in a public school classroom, took place in the next class after the development and exploration of concepts associated with the exercise of proportional reasoning via concepts present in linear functions during reflections for solving Financial Mathematics problems over 4 classes, duration of 40 minutes each.It is a qualitative research, in the form of strategic action-research, according to (FRANCO, 2005), according to which data analysis constituted the motto to point out indications regarding the appropriation of proportional reasoning during the resolution of problems of this nature. The results showed that the methodology and the resolution procedures did not attract the students to solve the problems proposed in the evaluation.

Keywords: Proportionality; Percentage; Proportional Reasoning

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é recorte de uma pesquisa ampla, a qual objetiva responder a seguinte questão principal: *"Que situações de aprendizagem um professor de matemática precisa selecionar, dirigir e propor a seus alunos de modo a identificar e conhecer como o raciocínio proporcional é exercitado pelos estudantes na resolução de problemas relacionados com a temática Educação Financeira Crítica, de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam e para ajudá-los a superar essas dificuldades?"*

O estudo objeto deste recorte teve os propósitos de identificar, conhecer e analisar como se deu a apropriação de competências associadas à resolução de problemas de percentagem pelo exercício do raciocínio proporcional via o modelo de funções lineares.

A intervenção realizada permitiu que os sujeitos conhecessem uma alternativa para a apropriação do conceito de proporcionalidade direta, segundo o particular significado de percentagem via o modelo das funções lineares. Tal conhecimento foi possível ser explorado por meio do exercício constante do raciocínio proporcional durante as reflexões e resoluções a um conjunto de 13(treze) problemas que foram propostos ao longo do estudo. Tal conjunto envolveu situações de percentagem presentes em problemas financeiros - particularmente, acerca de aumentos ou decréscimos percentuais de quantias ou valores. O modelo das funções lineares foi desenvolvido e, em seguida, apresentado como uma alternativa de resolução para todos os problemas. Durante a proposição, exploração, resolução, reflexão e discussões desse conjunto de 13 problemas os sujeitos do estudo foram instados a desenvolver, exercitar e aplicar o raciocínio proporcional durante a resolução de cada problema por meio do particular significado de proporcionalidade que ao conceito está associado, como uma alternativa para a obtenção da solução. Para permitir a análise dos dados produzidos com as avaliações que foram entregues pelos sujeitos do estudo, diferentes tipos de soluções para os problemas propostos na avaliação foram categorizadas segundo níveis de compreensão do conceito de proporcionalidade direta e o exercício do raciocínio proporcional aí implicado (ou não), por meio da descrição da natureza das soluções apresentadas pelos sujeitos do estudo. Tal análise levou em conta a investigação das trajetórias dos sujeitos do estudo segundo a identificação das dificuldades e os possíveis avanços alcançados. Neste recorte, a frequência de respostas corretas e incorretas segundo os níveis de compreensão, para os 3 (três) primeiros problemas constantes da avaliação e entregues pelos 12 sujeitos do estudo, serão apresentadas em uma tabela a seguir. Os resultados produzidos com a experiência do estudo e a análise de dados foram determinantes para as reflexões e considerações acerca do papel e relevância do estudo para o ensino da temática.

2 METODOLOGIA DO ESTUDO

No estudo foi adotada a metodologia "*Design Experiment in Educational Research"*, de Cobb; Confrey; DiSessa; Lehrer e Schauble (2003). A escolha da metodologia foi feita em função de ela ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto, considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo. Segundo a metodologia um desenho básico flexível, que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo, é preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da Matemática com vistas à obtenção de inovações. Salienta-se que o professor-pesquisador responsabilizou-se por identificar as adaptações que se fizeram necessárias implementar ao longo do estudo ao assumir o papel de orientador, intervindo durante o desenrolar das tarefas propostas somente em momentos críticos considerados por ele como de bloqueio. O estudo, previsto para ser desenvolvido ao longo de todo o trimestre letivo em curso, teve início com o propósito inicial do autor de analisar a produção dos alunos no tocante às resoluções e a comunicação de respostas referentes a um conjunto de problemas que seriam propostos ao final do desenvolvimento do estudo relativo aos conceitos próprios de funções lineares, e o particular significado de proporcionalidade por meio do exercício do raciocínio proporcional. Para atender a esse propósito um planejamento foi elaborado, tomando por base o objetivo de desenvolver o conceito de proporcionalidade segundo o significado de identificação das grandezas envolvidas em cada problema proposto e, no caso de identificar a existência de proporcionalidade, se ela era do tipo direta ou inversa de modo a mobilizar o conhecimento matemático necessário para encaminhar a resolução. Mas, antes mesmo que o propósito inicial tivesse sido encaminhado como previsto no desenho inicial o professor encaminhou o estudo no sentido de identificar e conhecer como os sujeitos mobilizariam os conhecimentos acerca do raciocínio proporcional na resolução de problemas de aumentos ou decréscimos percentuais. E, por conta da permissividade que a metodologia permite fazer, assim foi feito. Um novo propósito de trabalho foi então elaborado e proposto ser desenvolvido com a turma e, uma vez feita a seleção de 13 problemas que versavam sobre aumentos ou decréscimos percentuais, o trabalho foi desenvolvido por meio de reflexões e discussões acerca da mobilização de competências que dessem conta de resolver cada problema proposto, duração prevista de 4(quatro) aulas, cada aula com 40 minutos e ao final, sem aviso prévio, mais uma aula para a aplicação de uma ficha de avaliação com 6(seis) problemas. Com base na metodologia, o desenrolar do estudo seguiu segundo um processo que se configurou como iterativo, cíclico e flexível. Conforme apontam os autores da metodologia há algumas formas diferenciadas de sua aplicação mas no estudo em questão, nos momentos de desenvolvimento do estudo, contou com a participação variável de 28 sujeitos de uma turma do 1º Ano do Ensino Médio na qual o autor foi o professor efetivo de Matemática, no ano letivo de 2019, no lócus do estudo: a sala de aula de um colégio público pertencente à Rede Federal de Ensino Básico, localizado numa grande cidade, capital do estado. A investigação reuniu forte cunho descritivo, incluindo os diálogos havidos entre os sujeitos do estudo e entre eles e o pesquisador. O conjunto de dados que deu origem à análise objeto do estudo foi produzido pelas resoluções e respostas. A avaliação foi aplicada a um pequeno grupo de sujeitos: apenas 12 sujeitos que estavam presentes na sala de aula e entregaram a folha de avaliação, e teve o propósito de analisar as trajetórias mais amiúde. As produções constantes da resolução e respostas à avaliação, preparada para tal, foram objeto de análise mas, por conta do espaço limitado neste recorte, será feita apenas a apresentação da análise dos dados produzidos a partir das soluções apresentadas para os 3(três) primeiros problemas constantes da folha de avaliação. Em Teixeira (2021) será apresentada a análise dos dados das soluções para os 3(três) últimos problemas; se fará menção à análise dos dados feita aqui; serão apresentados os resultados obtidos para a totalidade da avaliação, as análises finais e as pertinentes considerações. Portanto, o estudo foi desenvolvido em um ambiente natural (sala de aula) para a coleta direta dos dados, onde o pesquisador exerceu papéis que o colocaram como instrumento central para tal. Os alunos foram distribuídos, segundo afinidades pessoais, em grupos menores contendo 3 ou 4 sujeitos. Nesse ambiente, o pesquisador não se valeu do propósito de recriar experimentalmente problemas de estudo que não as que foram propostos no início do trabalho investigativo, e sobre os quais se propôs a estudar, observar e coletar dados do estudo. O pesquisador procurou estar atento a todos os elementos presentes nas situações estudadas, sabendo de antemão que aspectos por vezes considerados triviais e aparentemente considerados sem importância podem se transformar em informações valiosas para compor o conjunto de dados do estudo. Ou seja, aspectos carregados de significados, que ajudam na compreensão dos fenômenos em questão. Considerando aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os presentes em Franco (2005), considerou-se que o estudo se caracterizou como uma investigação de natureza qualitativa.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Para a análise das resoluções e respostas aos problemas reportamo-nos à Tall e Vinner (1981), os quais definem imagem conceitual como a estrutura cognitiva total construída na mente de uma pessoa a respeito de determinado conceito matemático, abrangendo todas as ideias, imagens mentais, impressões, representações visuais e descrições verbais relativas às propriedades e processos que envolvem aquele conceito. Segundo Tall e Vinner (1981)

> (...) como resultado e por meio de experiência de todos os tipos que uma pessoa se vê envolvida ao longo do tempo a imagem de um conceito vai se constituindo e se transformando continuamente quando ela passa pelo enfrentamento de novos estímulos (Tall e Vinner, 1981, p. 2).

Também reportamo-nos à perspectiva de Fischbein (1994) segundo aspectos presentes na atividade matemática. O componente intuitivo (ou, simplesmente, compreensão intuitiva, cognição intuitiva, solução intuitiva) "diz respeito a uma compreensão que uma pessoa considera auto evidente", Fischbein (1994, p. 232). Essa compreensão é de tal maneira aceita pela pessoa, que ela é capaz de aceitar uma ideia ou um conhecimento sem sequer questionar de que é preciso que haja necessidade de encontrar um tipo de justificativa que venha a legitimá-la. Fischbein (1994) argumenta que

> (...) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação do componente formal, considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor (Fischbein, 1994, p. 232).

Segundo o autor, o conhecimento acerca dos componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas pois "*o domínio de técnicas e procedimentos isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão*", Fischbein (1994, p. 232).

4 CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Dizemos que y é função de x, e escreve-se y = f(x), quando se sabe que as grandezas x e y estão relacionadas de tal modo que a cada valor de x especificado corresponde um valor y bem determinado. É costume dizer que o par ordenado (x, y) está bem definido no sentido da relação de dependência entre as grandezas x e y (grandeza livre x em relação à grandeza dependente y).

Uma vez que y é função de x se diz que "*y é uma função crescente de x*" quando a cada 2(dois) valores distintos x_1 e x_2 (correspondentemente: $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$), se a desigualdade $x_1 < x_2$ implica sempre que $y_1 < y_2$.

Se diz, também, que "*a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x*" quando as 2(duas) primeiras condições especificadas a seguir, são satisfeitas: (i) y (ou f) é uma função crescente de x; (ii) se multiplicarmos x por um número racional positivo m o valor correspondente de y também fica multiplicado por m. Em linguagem matemática escreve-se assim: f(m.x) = m.f(x), para todo valor de x e todo número racional positivo m. Por conta dessa condição existe um número k, chamado de "*constante de proporcionalidade*" entre x e y, tal que f(x) = k.x, para todo valor de x. Mas atenção: na definição de grandezas diretamente proporcionais será preciso que as duas condições acima sejam atendidas. Uma só condição não garante proporcionalidade! Ressalte-se que a função f, como acima, é dita uma função linear, pois além da propriedade (ii) ser atendida, também a propriedade aditiva f(a + b) = k.(a + b) = k.a + k.b = f(a) + f(b) é satisfeita, para quaisquer valores das grandezas a e b. Assim, podemos estabelecer a seguinte relação: "*a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x*" se e somente se a função f(x) = y é função linear. Portanto, o modelo matemático associado às funções lineares é um modelo que atende satisfatoriamente à relação entre valores ou quantias e percentuais.

A partir do conhecimento teórico acerca do conceito de proporcionalidade, por meio de um modelo matemático que considera uma função linear, como mostrado acima, os livros didáticos da Educação Básica procuram explorar o conceito de proporcionalidade direta entre 2(duas) grandezas x e y de outra maneira. Talvez, porque essa diferente maneira seja apropriada para definir o conceito proporcionalidade para alunos do Ensino Fundamental, considerando que os alunos ainda não estudaram o necessário acerca de aspectos construtivos próprios às funções lineares e às hipérboles, como visto acima. Mas, considerando que os sujeitos desse estudo são alunos da 1ª série do Ensino Médio e o fato de eles já terem feito estudos acerca das funções do 1º grau no trimestre anterior o professor-pesquisador considerou oportuno que tal estudo fosse desenvolvido por meio do conceito de funções lineares, e os resultados dessa proposta de estudo fossem avaliados em prosseguimento. O modelo matemático funções lineares, como será visto em prosseguimento, é um modelo que atende às condições de proporcionalidade entre 2(duas) grandezas x e y. Considere pois que x_1, x_2 e x_3 são valores distintos assumidos pela grandeza x e, correspondentemente, y_1, y_2 e y_3 são valores distintos assumidos pela grandeza y, como mostrado na Figura 1, a seguir.

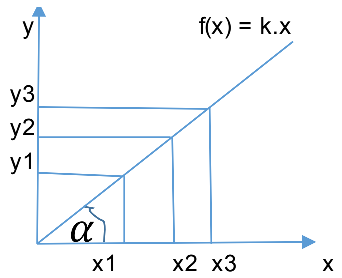

Figura 1: Gráfico da função linear f(x) = k.x
Fonte: Dados do estudo

De modo que y seja diretamente proporcional a x (proporcionalidade direta) é necessário e suficiente que $y_1 = f(x_1) = k.\ x_1$, $y_2 = f(x_2) = k.\ x_2$ e $y_3 = f(x_3) = k.\ x_3$. Tais igualdades implicam que k = $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$ = ... O gráfico da Figura 1, acima, mostra-nos que tg α = k.

Assim, tal e qual Lima(1991) defende, se diz *que 2(duas) grandezas y e x são diretamente proporcionais (que a proporcionalidade entre elas é direta) quando entre elas há uma correspondência de tal modo que ao se multiplicar a grandeza x por um número racional positivo, a quantidade correspondente de y também fica multiplicada por esse mesmo número.* O conceito de proporcionalidade é rico em significados. Está presente, por exemplo, na resolução de problemas multiplicativos; nas análises de tabelas ou gráficos; na semelhança de figuras; nos estudos de porcentagem; no Teorema de Talles; na Lei de Hooke e na Lei da Gravitação Universal, de Newton. Além do mais, são muitos os aspectos presentes no cotidiano dos cidadãos que podem ser modelados segundo considerações pertinentes às ideias de proporcionalidade entre grandezas. Por conta disso salientamos a importância de o raciocínio proporcional ser amplamente explorado na escola básica, uma vez que ele se mostra oportuno para fazer a interpretação de fenômenos que ocorrem no mundo real em diferentes situações. O raciocínio proporcional exercitado em problemas com proporções, por exemplo, requer do sujeito que está encaminhando a resolução do problema um olhar diferenciado por conta de a abordagem, sob vários pontos de vista, exigir anterior avaliação, mormente para identificar as situações em que o que está em questão é a presença da não-proporcionalidade entre 2(duas) grandezas. Por exemplo, a grandeza "*área de um círculo"* não é diretamente proporcional ao aumento ou diminuição da grandeza "*medida do raio do mesmo círculo*". O ensino de proporcionalidade, no sentido mais amplo da sua abrangência, e em problemas escolares, não é uma tarefa de fácil compreensão e de apropriação simples, a menos que se proponha exercícios nos quais já de antemão se afirme haver presença da proporcionalidade e se peça que exercitem procedimentos mecanizados de cálculos para obter uma ou outra grandeza desconhecida. Nesses casos, passa a ser um simples exercício de resolução de equações algébricas.

O mais difícil em um problema é identificar se o conceito da proporcionalidade está presente ou não em relação às grandezas envolvidas de modo a estabelecer o modelo matemático adequado à situação. Assim, o conceito de proporcionalidade tanto é um conteúdo difícil para o professor que vai ensinar quanto para o aluno que precisa aprender.

Para ambos, é preciso que se tenha clareza quanto à identificação do conceito ao estabelecer um modelo matemático que retrate com fidelidade o que está ocorrendo em relação às informações veiculadas e as que podem ser obtidas a partir daí - mesmo que seja preciso estabelecer uma ou outra restrição em relação às tais grandezas envolvidas. Também, e não menos importante, é preciso que se considere todos os procedimentos a serem aplicáveis ao modelo matemático que foi estabelecido. Ademais, uma vez tendo concebido um modelo matemático que atenda ao problema, e analisá-lo em uma situação concreta, será preciso compreender que em certas situações um modelo atende à situação sob certas condições e que há limites que precisam ser impostos às grandezas envolvidas. Ou seja, uma vez que o modelo obtido atenda à condição de uma grandeza ser proporcional (direta ou inversamente) a outra grandeza, será preciso considerar que tal validez talvez se dê dentro de certos limites de variação, para as 2(duas) grandezas.

Uma das aplicações da noção de proporcionalidade é a conhecida "*Regra de Três*". Na "*Regra de Três*" se tem uma grandeza y (direta ou inversamente) proporcional a x, isto é: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. O problema consiste em encontrar um dos 4(quatro) valores x_1, x_2, y_1 ou y_2, conhecendo-se os outros 3 valores. Portanto: "Se *y é diretamente proporcional a x*, então *a "Regra de Três" é dita direta*", e "Se *y é inversamente proporcional a x*, então *a "Regra de Três" é dita inversa*". Ressalte-se que, primeiramente, será preciso garantir *ser y diretamente proporcional a x*, para que a "Regra de Três" seja resolvida, pois a partir daí é que se tem que: $y_1 = f(x_1) = k.\ x_1 \longrightarrow k = \frac{y1}{x1}$ (1) e $y_2 = f(x_2) = k.\ x_2 \longrightarrow k = \frac{y2}{x2}$ (2)

De (1) e (2): $\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} \longrightarrow y_2 = \frac{y1\,.\,x2}{x1}$ ou $y_1 = \frac{y1\,.x2}{x1}$. Também é preciso que se garanta ser y inversamente proporcional a x para que a "Regra de Três" seja resolvida, pois a partir daí se tem que: $y_1 = f(x_1) = \frac{k}{x1} \longrightarrow k = x_1.\, y_1$ (3) e $y_2 = f(x_2) = \frac{k}{x2} \longrightarrow k = x_2\,.y_2$ (4) De (3) e (4): $x_1.y_1 = x_2\,.y_2 \longrightarrow y_2 = \frac{y1\,.\,x1}{x2}$ ou $y_1 = \frac{y2\,.\,x2}{x1}$ ou $x_2 = \frac{y1\,.\,x1}{y2}$ ou $x_1 = \frac{y2\,.\,x2}{y1}$. É importante notar, nos dois casos, que é possível encontrar o valor de y_2 sem que seja preciso ser conhecido o valor de k. Além do mais, cabe também esclarecer que quaisquer conclusões obtidas a partir da noção de proporcionalidade pressupõe admitir, como hipótese adjacente, a de que o modelo matemático adotado se aplica à situação que está sendo considerada, uma vez que nem sempre o modelo de proporcionalidade é o mais adequado.

5 CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO

Uma vez que o professor de Matemática já sabe de antemão que o conceito de proporcionalidade está presente em uma particular aplicação ele precisa ter amplo domínio acerca do conceito e de seus diferentes significados, conforme seja a aplicação que está em estudo. Algumas aplicações podem ser exploradas com alunos do Ensino Fundamental, e outras com alunos do Ensino Médio. O domínio do conteúdo permite ao professor sentir-se em condições de fazer a transposição didática para cada um dos significados do conceito proporcionalidade conforme o universo de alunos em que a temática está sendo desenvolvida. Não é uma tarefa simples, pois o professor precisa ter compreensão plena acerca das ferramentas que devem ser mobilizadas para caracterizar o modelo matemático que atende a situação que está sendo explorada. É o que Shulman (1986, p.2) chama de "*conhecimento pedagógico do conteúdo*" (tradução nossa). Neste particular contexto, tal conhecimento deve ser mobilizado pelo professor de modo que mostre compreensão plena acerca dos significados de proporcionalidade que precisam ser apropriados pelos alunos quando da apresentação e desenvolvimento da temática independentemente do conteúdo explorado, e para qual universo de alunos da escola básica tenha o propósito de atender.

Neste particular estudo o pesquisador avaliou a priori, e durante o desenrolar das aulas, que os sujeitos de estudo reuniam condições para se apropriarem de conhecimentos próprios ao conceito e os significados de percentagem que seriam desenvolvidos por meio da proporcionalidade em prosseguimento. O objetivo matemático do estudo foi o de propor, refletir, discutir e resolver atividades que permitissem o exercício do raciocínio proporcional

- explorando ideias básicas em um contexto da matemática financeira -, após o conteúdo funções do 1º grau ter sido desenvolvido. Também porque os problemas relacionados com esse conteúdo, e presentes no livro didático, já tinham sido resolvidos pelos alunos. Ao iniciar o estudo, o professor esperava estimular a exploração de conceitos matemáticos associados ao pensamento multiplicativo e o raciocínio proporcional, por meio da proposição de problemas envolvendo acréscimos ou descontos percentuais, considerando que os cálculos de valores ou quantias têm sido amplamente utilizados no cotidiano das famílias, de modo geral. O professor considerou que, mesmo de maneira indireta, alguns alunos (ou todos) já tinham ouvido falar ou teriam informações a respeito de juro e porcentagem por conta das mídias, mas talvez não dominassem suficiente conhecimentos matemáticos a respeito de um ou outro significado considerado importante ser apropriado para resolver diferenciados problemas de matemática financeira elementar. Trata-se de um conteúdo da Matemática que precisa ser apresentado, explorado, discutido e fundamentado desde os anos iniciais do ensino fundamental, uma vez que tal possibilidade permite promover a inserção dos alunos em problemas financeiras presentes no cotidiano de suas famílias, desde então, a partir de conceitos da própria Matemática. Por estas razões, consideramos que o conhecimento e a apropriação de conceitos da matemática financeira pelos alunos se mostram importantes ser desenvolvidos já na escola.

Também consideramos que tal estudo se mostra pertinente pelas seguintes razões: diferentes problemas associados com a educação financeira contribuem para despertar o interesse dos alunos e de suas famílias; o estudo em questão promove a aprendizagem de significados da proporcionalidade associados com problemas financeiros, bem como favorecem a construção de um conhecimento crítico acerca de problemas presentes na temática. Essas foram as razões pelos quais foi feita a opção por apresentar, refletir e discutir tais problemas financeiros simples de modo a apresentar uma aplicação do conceito proporcionalidade via o conceito de funções lineares, durante a resolução de tais problemas. Segundo Freire (2013, p. 83), “O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, *é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada*, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que *professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos*” (grifos do autor).

Um total de 13(treze) problemas foram propostos, refletidos, discutidos e resolvidos pelos sujeitos do estudo em processo dialógico e mediação do professor, em sala de aula, mas por conta da limitação de espaço apenas 1(um) problema é apresentado em seguida: Problema 1: (a) Qual valor equivale a 3% de R$80,00? (b) 2,4% de 200 é igual a quanto?

Para o item (a), e com o uso de uma calculadora, basta fazer os produtos 80 x 3% (ou 80,00 x 3%) que o resultado mostrado no visor: 2,4 corresponde ao respectivo percentual, embora não do modo desejado: em reais, com 2 casas decimais. Por outro lado, se produto fosse feito como indicado 3% x 80,00, a calculadora não toma conhecimento do símbolo % e efetua o produto de 3 por 80, resultando em 240. Para o item (b), como 200 não é valor em reais, a primeira situação 200 x 2,4%não preocupa mas, igualmente, a segunda sim. E quando o sujeito não faz uso de uma calculadora? O propósito foi o de explorar o cálculo do valor correspondente ao percentual de certo valor (também, o cálculo do porcentual de uma grandeza) via exercício do raciocínio proporcional, bem como utilizar o modelo da função linear como alternativas de cálculos. A Figura 2 a seguir, à esquerda, mostra como o cálculo de 3% de 80 pode ser feito por meio de um procedimento direto que mobiliza o exercício do raciocínio proporcional.

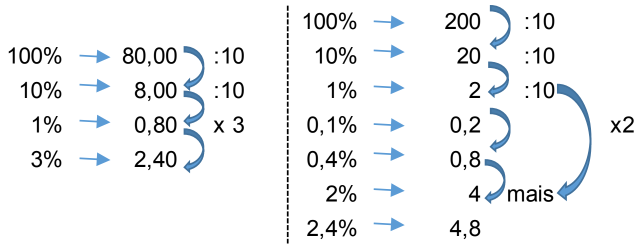

Figura 2: Cálculo de 3% de 80 e cálculo de 2,4% de 200, via exercício do raciocínio proporcional

Fonte: Dados do estudo

Uma vez adotado de início o modelo de proporcionalidade via função linear, tem-se que 100% está em consonância (em proporcionalidade direta) com 80, assim: f(x) = $\frac{100\%}{80}.x$; f(80) = 100%; 100% → 80. Se multiplicarmos por $\frac{1}{10}$ (o mesmo que dividir por 10) os 2(dois) valores a proporcionalidade direta se mantém. Lembre-se que esse procedimento é equivalente a f(m.x) = m.f(x), para todo valor de x e todo número racional positivo m, desse modo: f(80) = 100% → f($\frac{1}{10}$.80) = $\frac{1}{10}$.f(80) = $\frac{1}{10}$.100% = 10%. Logo: 10% → 8. É importante compreender que a manutenção da proporcionalidade direta é uma garantia assegurada pelo modelo matemático função linear. Assim, tal produto por $\frac{1}{10}$ resulta em 10% → 8. Mais uma vez, se multiplicarmos os dois valores por $\frac{1}{10}$ a proporcionalidade direta se mantém, resultando em 1% → 0,8. Agora, se multiplicamos os dois valores por 3 tem-se: 3% → 2,4. Portanto, 3% de R$ 80,00 corresponde ao valor R$ 2,40.

Em relação ao cálculo: 2,4% de 200, como mostrado na Figura 2, acima, à direita, tem-se que 100% está em consonância (em proporcionalidade direta) com 200, assim: f(x)

= $\frac{100\%}{200}.x$; f(200) = 100%; 100% → 200. Neste caso, lembre-se que esse procedimento é equivalente a f(x + y) = f(x) + f(y), para todo valor de x e todo valor de y, uma vez que a função f é linear. Assim: f(200) = 100% ; f(4) = 2% e f(0,8) = 0,4%. Logo: f(4,8%) = f(4 + 0,8) = f(4) + f(0,8) = 2% + 0,4% = 2,4%, isto é: 2,4% → 4,8. Portanto, 2,4% de 200 corresponde ao valor 4,8. A Figura 2, acima, à direita, mostra como o cálculo de 2,4% de 200 pode ser feito por meio de um procedimento mais direto, naturalmente equivalente ao procedimento acima, como deve ser. Importante estar ciente que o procedimento direto utilizado é consequência do uso do modelo de funções lineares cujas propriedades foram provadas.

Voltamos à observação anterior no sentido de chamar à atenção do leitor acerca dos procedimentos que foram feitos acima - consequência natural da mobilização do raciocínio proporcional – o qual, por sua vez, deriva diretamente do modelo funções lineares. Tais procedimentos por vezes são negligenciados pelo professor durante o ensino do presente conteúdo - principalmente quando é feito com alunos do ensino fundamental. É claro que não se pode fazer menção ao fato de o modelo matemático estar associado às propriedades de uma função linear para esse universo de alunos. Em contrapartida, o professor desse segmento tem a oportunidade de "*fazer referência ao conceito de frações equivalentes (classes de equivalência)*" que, em certo sentido, está presente no procedimento feito acima e, muitas vezes, é esquecido. Fica aqui uma recomendação similar de o professor que está desenvolvendo o conteúdo de frações de utilizar o conceito de frações equivalentes para o cálculo de valores ou quantias percentuais, como feito acima. Por conta disso, os exemplos objeto da Figura 2, acima, também podem ser escritos como: $\frac{100\%}{R\$80,00} = \frac{10\%}{R\$8,00} = \frac{1\%}{R\$0,80} = \frac{3\%}{R\$2,40}$ e $\frac{100\%}{200} = \frac{10\%}{20} = \frac{1\%}{2} = \frac{0,1\%}{0,2} = \frac{0,4\%}{0,8} = \frac{2\%}{4} = \frac{2,4\%}{4,8}$.

Mas, a questão não é tão simples assim. O interesse epistemológico nos leva a compreender o que está por detrás dos procedimentos que são feitos, como acima, principalmente no que refere ao cálculo de 2,4% de 200. Começamos por distinguir fração de razão, assim: Dá-se o nome de ***razão*** a qualquer relação entre 2(duas) variáveis ***a*** e ***b***, com **b** diferente de zero. Assim, a razão entre as variáveis ***a*** e ***b*** (se diz também que ***a*** está relacionada com ***b***) é escrita como ***a*** : ***b*** ou $\frac{a}{b}$. Assim, nos exemplos acima estamos diante de razões e não de frações (em um dos significados de fração, considera-se tratar-se de uma "*relação entre parte e todo*"). Em relação ao lado direito da Figura 2, fica subtendido a seguinte situação: $\frac{100\%}{200} = \frac{10\%}{20} = \frac{1\%}{2} = \frac{0,1\%}{0,2} = \frac{0,4\%}{0,8}$ e $\frac{10\%}{20} = \frac{1\%}{2} = \frac{2\%}{4} = \frac{2,4\%}{4,8} = \frac{5.(0,4\%)}{5.(0,8)}$. Daí: $\frac{0,4\%}{0,8} + \frac{2\%}{4} = \frac{0,4\%}{0,8} + \frac{5.(0,4\%)}{5.(0,8)} = 6. \frac{0,4\%}{0,8} = \frac{2,4\%}{4,8}$. Tal justificativa faz-se necessário ser feita com o propósito de justificar a aplicação da propriedade aditiva da função linear, como foi feito acima. Ademais, tal também poderia ser feito por meio de uma diferença, assim: $\frac{0,1\%}{0,2} = \frac{0,6\%}{1,2}$ e $\frac{3\%}{6} = \frac{5.(0,6\%)}{5.(1,2)}$, daí: $\frac{3\%}{6}$ - $\frac{0,6\%}{1,2} = 4.[\frac{0,6\%}{1,2}]$ = $\frac{2,4\%}{4,8}$. Finalizando: adição e diferença de frações equivalentes como acima, sim, é possível fazer, mas produto e divisão jamais se pode fazer assim, uma vez que se f é função linear, f(a.b) ≠ f(a).f(b).

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA OS 3 (TRÊS) PRIMEIROS PROBLEMAS PROPOSTOS

O propósito que norteou o estudo foi o de descrever a natureza das soluções dos alunos para os 6(seis) problemas propostos na avaliação. Os problemas versaram sobre aumento ou decréscimo percentual de valores ou quantias, conforme o nível de raciocínio proporcional ali implicado. Também teve o objetivo de identificar e conhecer acerca da aprendizagem ocorrente e a natureza das intervenções de ensino encaminhadas pelo professor. Em prosseguimento, apresentamos os 6 seis) problemas que foram propostas na Ficha de Avaliação, lembrando que apenas os 3 primeiros são objeto de análise aqui.

Problema 1: Se a quantidade de produtos à venda em uma loja cresceu de 40 para 240, de quanto foi o porcentual de aumento na quantidade de produtos?

Problema 2: Se um par de sapatos custa R$30,00 na compra via cartão de crédito, e um desconto de 8% é concedido se o pagamento é feito à dinheiro, qual o valor a pagar com o uso de dinheiro?

Problema 3: Se uma bermuda custa R$40,00 na compra via cartão de crédito e o preço passa a ser R$34,00 se o pagamento é feito à dinheiro, qual percentual de desconto é concedido quando a bermuda é paga em dinheiro?

Problema 4: Se, hoje, uma bermuda custa R$40,00 e para o próximo mês haverá um acréscimo de 11% sobre este valor, qual será o valor a pagar no próximo mês?

Problema 5: Se um par de tênis custa R$50,00, hoje, e para o próximo mês ele vai custar R$56,00, qual será o percentual de aumento sobre o preço de hoje do par de tênis?

Problema 6: Dividir o valor original R$ 30,00 de um produto por 1,25 aponta para um aumento ou um decréscimo? Em percentual, de quanto é o aumento ou o decréscimo?

Com o objetivo de estabelecer níveis de compreensão do conceito proporcionalidade direta (PD) e o exercício do raciocínio proporcional (RP), presente ou não nas resoluções para os problemas propostos, o autor estabeleceu 7(sete) níveis de solução, conforme a seguir:

- *Nível 0*: Em branco;
- *Nível 1*: Resposta obtida por meio de cálculos, sem indício do Raciocínio Proporcional (RP);
- *Nível 2*: Resposta obtida por meio de cálculos, com indício de Proporcionalidade Direta (PD) via aplicação da Regra de Três;
- *Nível 3*: Primeiras aproximações à solução, por meio de Raciocínio Proporcional (RP);
- *Nível 4*: Resposta com obtenção de alguma noção de exercício do Raciocínio Proporcional (RP);
- *Nível 5*: Resolução com parte via o Raciocínio Proporcional (RP), acompanhada de cálculo(s) com multiplicação ou adição ou subtração, para a obtenção da resposta;
- *Nível 6*: Raciocínio Proporcional (RP) integralmente exercitado até a obtenção da resposta final.

A Tabela 1, a seguir, mostra a frequência de respostas correta (C) ou com resposta errada (E), para os 3(três) primeiros problemas propostos, seguido da análise dos dados.

Tabela 1: Quantitativos de respostas corretas(C) e erradas(E), por nível, para os Problemas 1, 2 e 3.

Nível / Questão	N 0	N 1 C	N 1 E	N 2 C	N 2 E	N 3 C	N 3 E	N 4 C	N 4 E	N 5 C	N 5 E	N 6 C	N 6 E
1		2		7	1		1	1					
2	1	2	1	6	1			1					
3	1	2	1	6	1							1	

Fonte: Dados do estudo

A Figura 3, a seguir, mostra uma resolução correta do Problema 1 pelo aluno A8.

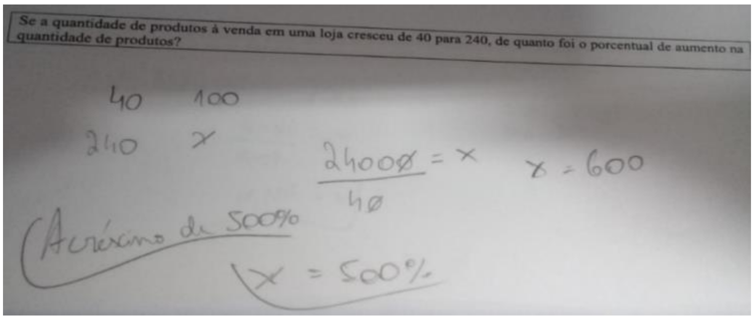

Figura 3 – Resolução correta, nível 2 de solução, aluno A8, para o Problema 1
Fonte: Dados do estudo

Na resolução mostrada na Figura 3, acima, identifica-se o indício de proporcionalidade via o uso de uma *“Regra de Três”* e o respectivo cálculo. Destaque-se que o aluno não apresentou uma justificativa contextualizada para a resposta por ele considerada, igual a 500%. Considerou-se uma resolução procedimental e burocrática, que não levou em conta o significado conceitual da função linear, por exemplo. Sendo assim, a resolução e resposta foram classificadas como solução de nível 2 (correta).

De todas os problemas propostos, o problema 1 foi o único que apresentou o maior quantitativo de resoluções nível 2 de solução: um quantitativo de acertos em 10, dentre os 12 alunos. A multiplicidade direta de 6 vezes 40 (40 para 240) apresentada no enunciado pode ter contribuído para o pequeno número de problemas com resposta errada: apenas 2 alunos (A9 e A6), embora os erros cometidos por esses dois sujeitos de estudo não tivessem sido causados pela não identificação de proporcionalidade direta. O aluno A9 apresentou a indicação 200 - 50 e 2(duas) divisões: 50 por 3 e 200 por 40, chamando atenção para o quociente dessa última divisão: 500%, como se estivesse fazendo a comunicação da resposta. O aluno A6 apresentou a *“Regra de Três”:* 240 - 100% e 200 - ?, e a divisão 2000 por 24, chamando atenção para o quociente 83,3%, como se estivesse fazendo a comunicação da resposta. Os problemas 1, 5 e 6 foram os únicos em que não houve sequer um aluno que não tenha deixado de tentá-los resolver (só p problema 1 é objeto de análise neste recorte). Isto é, não houve aluno que tenha deixado em branco os espaços para as resoluções dos respectivos problemas. A Figura 4, a seguir, mostra uma resolução correta para o problema 2, feita pelo aluno A3.

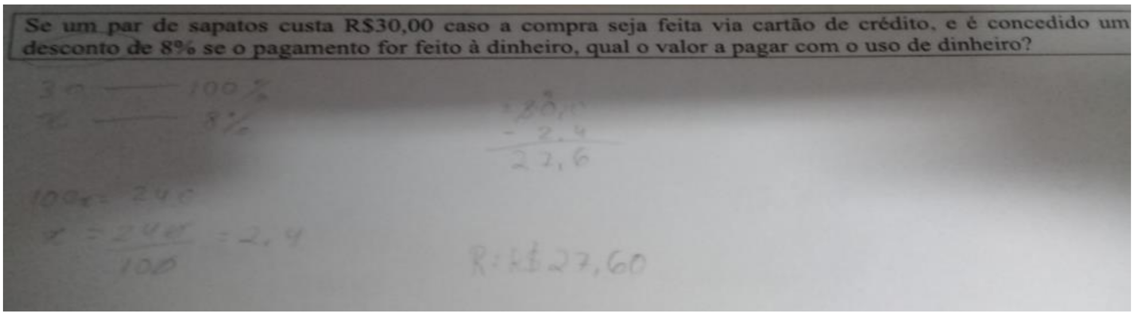

Figura 4 – Resolução correta, nível 2 de solução, aluno A3, para o problema 2
Fonte: Dados do estudo

Na resolução acima identifica-se o indício de proporcionalidade via o uso de uma *“Regra de Três”* e cálculos, com destaque a não justificativa contextualizada para o valor de R$2,40 e a resposta igual a R$27,60. Uma resolução procedimental e burocrática, que não levou em conta o significado conceitual da função linear, por exemplo.

Esse problema 2 apresentou o quantitativo de resoluções nível 2 de solução em 7 dos 12 alunos, sendo que uma das resoluções estava incorreta. Um total de 9 alunos acertaram; 1 aluno o deixou em branco, e 2 resoluções estavam incorretas. Apenas o aluno A9 apresentou sua resolução mostrando saber mobilizar alguma noção do exercício do raciocínio proporcional (resolução nível 4 de solução), ao determinar 1% de 30; depois 5% de 30; depois 3% de 30; a soma de 5% e 3% e a diferença entre 30 e o valor 2,4. Não a consideramos resolução nível 6 de solução, pois para este nível estabelecemos que seria preciso que acrescentasse 100% - 8% = 92% e, correspondentemente, R$30,00 – R$2,40 = R$27,60. Ou seja, o raciocínio proporcional sendo exercitado na íntegra, até a obtenção da resposta. A Figura 5, mostra a resolução correta feita pelo aluno A1 para o problema 3.

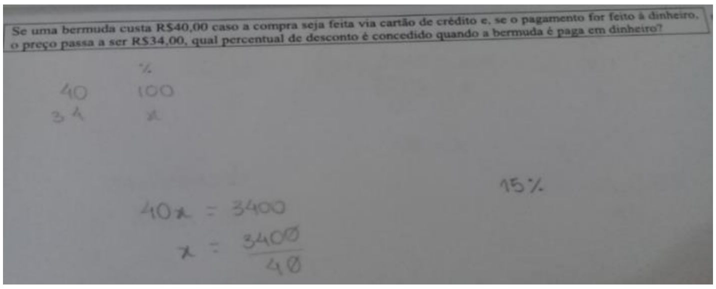

Figura 5 – Resolução correta, nível 2 de solução, aluno A1, para o problema 3
Fonte: Dados do estudo

Na resolução acima identifica-se o indício de proporcionalidade via uso de uma *"Regra de Três"* e cálculos, destaque para a não justificativa contextualizada para o valor x igual a 85% (não escrito) e a resposta igual a 15%. Uma resolução procedimental. Esse problema apresentou quantitativo de resoluções nível 2 de solução para 7 dos 12 alunos, sendo uma delas incorreta. Um total de 9 alunos acertaram; 1 aluno o deixou em branco, e 2 resoluções estavam incorretas. Apenas o aluno A9 apresentou sua resolução mostrando mobilizar o raciocínio proporcional (resolução nível 6 de solução) ao determinar 10% de 40; depois 5% de 40; depois a indicação 6 como soma de 4 com 2 e, correspondentemente, a soma de 10% com 5%, encontrando a resposta 15%. Nas resoluções para os 3 primeiros problemas identificou-se o que (FISCHBEIN, 1994, p. 232) salienta em relação ao componente intuitivo, no sentido de que tal componente "*diz respeito a uma compreensão que uma pessoa considera auto evidente*". Assim, a maioria dos sujeitos fez uso de um procedimento conhecido por eles, de experiências anteriores, sem estabelecer relações com a temática desenvolvida, de tal modo que essa compreensão é de tal maneira aceita pela sujeito do estudo que ele é capaz de aceitar uma ideia ou um conhecimento sem sequer questionar de que talvez fosse preciso haver necessidade de encontrar um tipo de justificativa que venha legitimá-la por conta de estar fora do escopo.

Os resultados mostraram que embora o professor-pesquisador tivesse o propósito de mostrar alternativas de resolução para diferentes tipos de problemas associados à resolução de problemas simples envolvendo proporcionalidade e cálculos percentuais via o modelo de função linear, as resoluções apresentadas para os 3 primeiros problemas da avaliação estão distantes do que (Fischbein, 1994) considera importante fazer, ou seja, que

> (...) é indispensável que se ofereça aos alunos um processo educativo que valorize a apropriação do componente formal, considerando que compreender o que seja rigor e coerência em Matemática não é uma tarefa que o aluno adquira de maneira espontânea sem prescindir do professor (Fischbein, 1994, p. 232).

Ademais, Fischbein (1994) também argumenta que o conhecimento acerca dos componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas, pois "o domínio de técnicas e procedimentos isento do conhecimento de argumentos que justificam a utilização dessas técnicas pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão". A Tabela 2, a seguir, mostra o desempenho no tocante ao nível de solução empreendido, para os 3 primeiros problemas propostos. Assim, para cada problema é possível identificar o nível de resolução que foi encaminhado por cada aluno e se a resolução resultou em resposta correta (C) ou errada (E).

Tabela 2: Desempenho dos 12 alunos para os três primeiros problemas, por níveis de solução obtida, respostas corretas(C) e respostas erradas(E)

Questão / Aluno	Questão 1	Questão 2	Questão 3
A1	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 C
A2	Nível 1 C	Nível 1 C	Nível 1 C
A3	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 C
A4	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 C
A5	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 C
A6	Nível 2 E	Nível 1 E	Nível 1 E
A7	Nível 4 C	Nível 0	Nível 0
A8	Nível 2 C	Nível 2 E	Nível 2 C
A9	Nível 3 C	Nível 4 C	Nível 6 C
A10	Nível 1 C	Nível 1 C	Nível 1 C
A11	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 E
A12	Nível 2 C	Nível 2 C	Nível 2 C

Fonte: Dados do estudo

Na Tabela 2, acima, destacamos que apenas o aluno A9 resolveu uma questão por meio do exercício do raciocínio proporcional, na íntegra (indicação na cor vermelho, na tabela). Importante notar que nos problemas 1 e 2 não houve qualquer menção ou indício de proporcionalidade, por todos os alunos, nas resoluções apresentadas. Ou seja, para os 2(dois) primeiros problemas em nenhuma das resoluções foi mobilizado o raciocínio proporcional, com prevalência para cálculos diretos ou via aplicação da “Regra de Três”. Tais fatos chamam atenção para a pouca ou nenhuma apropriação do conceito de proporcionalidade direta na resolução de problemas de aumentos ou decréscimos percentuais, pelos sujeitos do estudo, uma vez que apenas um dos alunos procurou fazer uso do conceito de proporcionalidade: exercitando o raciocínio proporcional, com o propósito de encontrar a resposta. Também frisar que este procedimento ocorreu em até 4(quatro) dos 6 problemas propostos, e por poucos alunos. Muito pouco para o estudo. Ademais, também chamou atenção o fato de o aluno A7 ter deixado em branco os problemas 2, 3 e 4. Talvez, um sinal de desconhecimento dos conceitos envolvidos ou razão não identificada, uma vez que nas problemas 5 e 6 o seu rendimento foi muito bom.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao explorarem, refletirem e discutirem sobre os 13 problemas - tanto alunos entre si quanto o professor e o grupo como um todo - importante mencionar que no seio dos grupos menores cabia a cada aluno decidir acerca da escolha da estratégia de resolução. Assim, foi possível ao professor-pesquisador identificar certa rejeição às considerações e procedimentos que foram feitos (ou análogos a estes) para cada um dos problemas, conforme mostrado para o Problema 1, acima.

Por muitas vezes, os sujeitos do estudo se manifestaram unicamente a favor do uso da “Regra de Três” para encaminhar a resolução de grande parte dos problemas (a exemplo de alguns problemas objeto da avaliação) por considerá-la “*de uso imediato” e “mais simples*”, nas palavras deles, embora tais procedimentos se mantivessem sendo apresentados.

Ao analisar os saberes conceituais e procedimentais dos alunos do estudo, foi possível identificar que não foi percebida a presença de variabilidade de maneiras próprias de resolução para os problemas. Ou seja, muito similares entre si no tocante ao modo como os alunos as organizaram, encaminharam e se expressarem no tocante à comunicação das respostas. Até certo ponto, foram posturas autônomas, as quais os alunos se permitiram conduzir durante todo o estudo, e não só em relação às resoluções dos problemas propostos mas também em relação a não aceitação quanto à maneira como a temática em si foi desenvolvida e o porquê de ela estar sendo desenvolvida naquele momento. Um assunto já visto em anos anteriores, segundo os sujeitos, quando argumentavam que o livro didático da 1ª série não faz menção quanto à resolução de problemas de percentagem no capítulo destinado às funções do 1º grau. Foram poucos os alunos que tiveram um olhar diferenciado em relação ao estudo que estava sendo desenvolvido, qual seja: a proposta de identificar uma aplicação do conceito de proporcionalidade direta por meio do conceito de função linear. A maioria procurou resolver os problemas com os conhecimentos que já tinham se apropriado em anos anteriores. Além do mais, ressalte-se que o conceito de proporcionalidade por meio do modelo de uma função linear não foi utilizado por nenhum dos sujeitos do estudo na resolução dos problemas propostos na folha de avaliação.

Concernentes ao conteúdo procedimental e o desenvolvimento, reflexão e discussão dos saberes conceituais da Matemática envolvidos no estudo, notadamente o exercício do raciocínio proporcional e as competências procedimentais necessárias, consideramos que o tempo de 4 aulas de 40 minutos cada, talvez não tenha sido suficiente. Também refletimos que o modo como o estudo foi desenvolvido possivelmente não tenha despertado o interesse dos alunos, por conta de os problemas propostos para ser resolvidos permitir que eles os resolvessem sem que fosse preciso exercitar o raciocínio proporcional, bem como a garantia do direito de encaminhar as resoluções com segurança segundo conhecimentos anteriores, e à maneira como eles conheciam e gostariam de fazer. Tais reflexões e constatações também podem ser justificadas se levarmos em conta os resultados obtidos pelos sujeitos do estudo, uma vez que eles mostraram desempenho que poderia ter sido bem melhor do que o foi, mas foi apenas mediano, considerando o grau de dificuldade não alto que foi exigido. Talvez os sujeitos do estudo tenham relaxado um pouco devido ao excesso de confiança em relação à pouca exigência conceitual para a resolução dos problemas, e como consequência muitos erros ocorreram.

Mesmo considerando o envolvimento dos alunos no estudo durante as aulas que antecederam a avaliação - por meio das discussões feitas no seio dos grupos menores e no grupo maior como um todo -, não houve manifestação explícita de aprovação e aceitação para a proposta do estudo por parte considerável dos 12 sujeitos que entregaram a folha de avaliação. Ou seja, as manifestações de aceitação e aprovação não foram unânimes (facilmente identificadas nas resoluções apresentadas para os problemas avaliativos), embora não esperássemos tal unanimidade.

Identificou-se que parte considerável dos 12 sujeitos ainda é reticente a mudanças bruscas, pois é muito forte o desejo de não se arriscarem em resolver um ou outro problema de maneira diferente daquela que estão acostumados fazer e sobre os quais os conhecimentos apropriados, e já consolidados, atendem às suas necessidades de momento.

Se estas novas ideias e conceitos desenvolvidos no estudo irão repercutir de fato e de alguma forma na vida pessoal e profissional de cada um no presente e no futuro, só a continuidade dos estudos poderá indicar, talvez por meio de projetos de investigação mais abrangentes que o que foi apresentado neste estudo, e assim se possa obter respostas mais concretas acerca das hipóteses lançadas.

Cabe salientar - e seria bom que tal ficasse claro - que não estamos justificando o baixo desempenho dos alunos no estudo e o inexpressivo exercício do raciocínio proporcional na resolução dos problemas propostos por conta dessas considerações, mesmo porque o universo de alunos avaliados é pequeno.

REFERÊNCIAS

Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer, R. e Schauble, L. (2003). *Design Experiments in Educational Research*. American Educational Research Association. vol. 32. No. 1. pp. 9-13. jan/fev.

Franco, M.A.S. (2005). *Pedagogia da Pesquisa-ação*. Revista Educação e Pesquisa. V.31.n.3. set/dez. 483-502. São Paulo. SP. Recuperado de http://www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf

Fischbein, E. (1994). *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freire, P. (2013). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Coleção Leitura. São Paulo: Paz e Terra.

Lima, E.L. (1991). *Grandezas Proporcionais*. In: Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro. RJ: IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada. VITAE Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social.

Teixeira, P.J.M. (2021). *O raciocínio proporcional na resolução de problemas percentuais via funções lineares*. Revista da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática - REAMEC. No prelo.

Shulman, L.S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Educational Researcher. v.15, n.2, p.4-14.

Tall, D. & vinner, S. (1981) *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. *Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169*.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Mobilizando o Raciocínio Proporcional na resolução de problemas de percentual

Paulo Jorge Magalhães Teixeira
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal Fluminense (UFF), Departamento de Análise - Instituto de Matemática, Niterói, Brasil.
paulojorge@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Dona Claudina, 361 – Casa 1, CEP 20725-060 - Méier - Rio de Janeiro - RJ

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: P.J.M. Teixeira
Coleta de dados: P.J.M. Teixeira
Análise de dados: P.J.M. Teixeira
Discussão dos resultados: P.J.M. Teixeira
Revisão e aprovação: P.J.M. Teixeira

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 15-07-2020 – Aprovado em: 18-08-2020