

Equação Polinomial do Primeiro Grau: Uma Análise Praxeológica em Três Livros didáticos do 7º do Ensino Fundamental

Polynomial Equation of the First Degree: a Praxeological Analysis in Three Textbooks of the 7th Elementary School

EDELWEIS JOSE TAVARES BARBOSA ¹
ANNA PAULA AVELAR BRITO LIMA ²

Resumo

Esse artigo apresenta os resultados de parte uma pesquisa de doutorado cujo objetivo foi analisar comparativamente as praxeologias matemáticas e didáticas sobre o conceito de equações polinomiais do primeiro grau em três livros didáticos. A realização deste estudo está fundamentada na ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD). A metodologia se constituiu em uma abordagem qualitativa. Os resultados indicam que as praxeologias nesses três livros não esclarecem as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas trabalhadas, bem como as potencialidades das técnicas organizadas ou sistematizadas.

Palavras-chave: Livro Didático de Matemática, Equação do Primeiro Grau, Teoria Antropológica do Didática.

Abstract

This article presents the results of part of a doctoral research whose objective was to analyze comparatively the mathematical and didactic praxeologies on the concept of polynomial equations of the first degree in three didactic collections. This study is based on the view of the Anthropological Theory of Teaching (ATD). The methodology was a qualitative approach. The results indicate that the praxeologies in these three books do not clarify the differences between the subtypes of tasks worked, as well as the potentialities of organized or systematized techniques.

Keywords: Didactic Book of Mathematics, Equation of the First Degree, Anthropological Theory of Teaching

¹ Doutor: Universidade Federal de Pernambuco- UFPE- (CAA); Núcleo de Formação Docente- edelweisb@yahoo.com.br

² Doutora: Universidade Federal de Rural de Pernambuco- UFRPE, Departamento de Educação- apbrito@gmail.com

Introdução

Esse trabalho é parte de uma tese de doutorado que discutiu a problemática do ensino da álgebra escolar, cuja finalidade consistiu em caracterizar o ensino de álgebra sobre a resolução de equações polinomiais do primeiro grau em três livros didáticos à luz da Teoria Antropológica do Didático.

As pesquisas relacionadas à Didática da Matemática propõem, dentre outros aspectos, investigar o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos da matemática. Particularmente, propõem explicar os fenômenos didáticos relativos às relações entre o ensino e a aprendizagem da matemática. Os pesquisadores entendem que, ao explicarem e buscarem novas maneiras de ensinar (GÁLVEZ, 1996).

A visão clássica do ensino da álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, geralmente letras, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Como consequência, a álgebra escolar tem servido para ensinar, apenas, um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos nem com o mundo real (KAPUT, 2005).

Nessa situação, a álgebra escolar não se restringe ao ensino e à aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os estudantes generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (KIERAN, 2007). Para o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) os estudantes necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, adequadamente, a simbologia para registrar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

A construção do conhecimento matemático é mediada, em sala de aula, pelo professor, que se apoia no *texto de saber* (CHEVALLARD, 1991), o qual aparece no livro didático, fruto de um processo de transposição didática³. Ainda segundo Chevallard (1999), o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a ser desenvolvido na sala de aula. Acreditamos, então, que o livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois, no contexto brasileiro, ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente.

³ Transposição didática diz respeito à trajetória cumprida por um determinado saber, desde a comunidade científica até a transformação em objeto de ensino de escolar.

Desse modo, apresentamos o artigo em duas seções. A primeira seção é referente à fundamentação teórica, modelização⁴ a priori, seleção e caracterização das obras analisadas. A segunda seção discute os principais resultados e algumas considerações.

Teoria Antropológica Do Didático (TAD)

Essa teoria foi desenvolvida por Chevallard (1992) e inscrita na extensão da transposição didática a partir da problemática ecológica. Nessa abordagem, os objetos matemáticos não existem em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que ocorrem em uma dada instituição.

Segundo Bosch e Chevallard (1999), a *problemática ecológica* ampliou o campo de análise da Didática da Matemática e permitiu a discussão sobre as condições instituídas entre os diferentes objetos do saber a ser ensinado.

Esses autores avaliam ainda que a transposição didática posiciona o saber matemático no interior de um plano de análise epistemológica do regime didático do saber. No entanto, o primeiro modelo proposto para analisar os componentes do saber matemático permaneceu de forma muito resumida. Esse modelo é enunciado em termos do objeto do saber, o qual se divide simplesmente em objetos *matemáticos* (instrumentos úteis para estudo de outros objetos matemáticos, transformando-se em objetos de estudos em si mesmo), *paramatemáticos* (ferramentas utilizadas para descrever outros objetos matemáticos) e *protomatemáticos* (que não tem *status* de objeto de estudo, nem mesmo de ferramenta explícita). Essa divisão se dá em face de um paradigma de análise dos elementos que ainda possuem algumas limitações.

Para esses autores, a Teoria Antropológica do Didático (adiante, TAD), em especial a noção de praxeologia, é resultado da ampliação do campo de investigação procedente da transposição didática, ao consentir a interpelação e restrições que se instituem entre os diferentes objetos de saberes a ensinar no interior de determinada instituição.

Chevallard (1999) caracterizou essa teoria em forma de axiomas. Inicialmente, esse autor apoiou-se em três conceitos primitivos – *objetos*, *pessoas* e *instituições* – assim como nos conceitos de *relações pessoais* de um indivíduo com um objeto e de *relações institucionais* de uma instituição com um objeto.

⁴ Modelo de praxeologias matemáticas referentes ao tipo de tarefa “ resolver equações polinomiais do primeiro grau”, adotadas para o estudo em tela.

Uma parte da teorização da TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica ou praxeologia que, de acordo com Chevallard, acrescenta as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais em geral e, em particular, as atividades Matemáticas. Portanto, “ele parte do primeiro postulado que toda prática institucional pode ser analisada, de diferentes pontos de vista e de diferentes formas, por um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas” (CHEVALLARD, 1999, p. 81).

Desse modo, a noção de praxeologia é a realização de certos *tipos de tarefa* (T) que se exprimem por um verbo pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t, por meio de uma *técnica* (τ) que, por sua vez, é explicada e legitimada por uma tecnologia (θ) justificada e esclarecida por uma teoria (Θ). Assim, a praxeologia, constituída por estes componentes [T, τ , θ , Θ], está ligada a um primeiro bloco prático-técnico [T, τ], denominado o *saber-fazer*, e o segundo bloco tecnológico-teórico [θ , Θ] revela-se na associação entre certo tipo de tarefa e uma técnica, designado o *saber*, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

Para Chevallard (1998), a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está associada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia referente a essa técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja omitida.

Praxeologias Matemáticas

As *praxeologias matemáticas* referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula, permitindo que os alunos atuem na resolução de problemas de forma adequada e, ao mesmo tempo, entendam o que é feito de maneira racional. Para Chevallard (1998), em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus artefatos teóricos e tecnológicos perdem sua credibilidade. No entanto, em uma determinada instituição I aparecem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em determinada instituição.

Esse autor observa que o primeiro trabalho de um docente consiste em determinar e caracterizar as praxeologias matemáticas a serem estudadas a partir das análises de documentos oficiais existentes, tais como os programas e livros didáticos. Para isso,

deverá delinear e analisar, de maneira precisa, os conteúdos matemáticos, os tipos de tarefas matemáticas que eles contêm e o grau de desenvolvimento atribuído aos demais elementos: a técnica, a tecnologia e a teoria.

Para Fonseca (2004), a descrição das organizações matemáticas em níveis (prático, técnico, tecnológico, teórico) é suficiente (inicialmente) para modelar a atividade matemática institucional, é um dos postulados da TAD que deve ser testado empiricamente.

Desse modo, a TAD postula que toda a atividade matemática institucional pode ser modelada por meio da noção da praxeologia (ou organização) matemática, ou seja, que toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente. Assim, explicamos de forma resumida o que se entende por “complexidade crescente” de uma OM (CHEVALLARD, 1999).

Após essa breve discussão sobre as praxeologias matemáticas, passamos a descrever, no próximo subtópico, as praxeologias didáticas.

Praxeologias Didáticas

As Praxeologias Didáticas são as respostas (a rigor) a questões do tipo: *como realizar o estudo de determinado assunto?* Referem-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo de um tema, como *encontrar a raiz de uma equação do primeiro grau* com uma incógnita. No entanto, estudar esse tipo de questionamento nos remete à seguinte indagação: como realizar o ensino da resolução de equação do primeiro grau?

A praxeologia didática tem como finalidade permitir a existência de uma praxeologia matemática compatível a certo saber, isto é, ela permite a (re)construção ou a transposição de uma determinada praxeologia matemática. Portanto, ela estrutura-se também em torno de (sub)tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias e de teorias. Todavia, como descrever tal organização? Quaisquer que sejam as escolhas adotadas no curso dos trabalhos de estudo de dada Organização Matemática, algumas situações são necessariamente presentes, mesmo que estas se apresentem de formas variadas, tanto quantitativa como qualitativamente.

Chevallard (1998) caracteriza em seis os momentos didáticos que possibilitam estabelecer uma grade de análise das praxeologias didáticas.

O *primeiro momento* é o primeiro encontro com a organização matemática (OM) estudada que está sendo posta em jogo no cenário didático. Esse primeiro encontro (ou reencontro) pode ocorrer de diversas maneiras, porém uma dessas maneiras decorrerá de pelo menos um tipo de tarefa T que organiza a OM proposta. Esse primeiro encontro com o tipo de T poderá incidir, diversas vezes, no valor dos contornos matemáticos e didáticos constituídos. Para Chevallard (1998), é possível reconhecer um tipo de tarefa da mesma maneira que se pode lembrar de uma pessoa que se acreditava conhecer.

O *segundo momento* é o da exploração do tipo de tarefas T e de elaboração de uma técnica, relativa a esse tipo de tarefas. Segundo Chevallard (1999), estudar problemas é um meio que permite criar e usar uma técnica relativa a problemas do mesmo tipo, ou seja, a elaboração das técnicas é um meio para resolver de maneira quase rotineira esses problemas.

O *terceiro momento* é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. Esse momento não está desconexo dos outros dois anteriores, visto que, ao egermos uma determinada técnica, esta estará diretamente vinculada ao bloco tecnológico-teórico, para que possa ser explicada e justificada. Para alguns professores ou autores dos livros didáticos, dependendo de suas concepções, esse momento pode se tornar a primeira etapa de estudo de uma determinada OM. Assim, a constituição do espaço tecnológico-teórico e dos tipos de problemas surgem como um encadeamento de aplicações do bloco teórico.

O *quarto momento* é o do trabalho da técnica, que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. Outra finalidade desse momento incide em aperfeiçoar a técnica trabalhada, para ser mais rápida e eficiente.

O *quinto momento* é o da institucionalização, que mostra o que realmente é a Organização Matemática constituída, apontando os elementos que permanecerão definitivamente na Organização Matemática e os que serão dispensados.

O *sexto momento* é considerado sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, que se

articulam com o momento da institucionalização, permitindo relançar o estudo, demandar a retomada de alguns dos momentos e, eventualmente, do conjunto do trajeto didático.

O momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquela na qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos.

Analisando as coleções

A metodologia seguida para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas e didáticas existentes sobre o ensino de equações polinomiais do primeiro grau em três livros didáticos do 7º do ensino fundamental: TEMPO DE MATEMÁTICA; MATEMÁTICA e PRATICANDO MATEMÁTICA e. Para isso, fizemos a modelização a priori, das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno da resolução de equações polinomiais do primeiro grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos.

Modelização a priori

Chevallard (1984) classifica os procedimentos de resoluções de equações do primeiro grau em duas categorias: (1) equações do tipo $ax + b = c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos e (2) equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e com $a_1 \neq 0$.

No entanto, nem sempre as equações polinomiais do primeiro grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Frequentemente, numa atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dentre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x) = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$, em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais, na variável x , que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax + b$, e $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mas que podem ser reduzidas a essa forma por processo de desenvolvimento e redução.

Portanto, para esse estudo, classificamos e caracterizamos a priori os seguintes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita, no campo do \mathbb{R} , em quatro categorias: (1) resolver uma equação do tipo $ax + b = c$ (T₁), como por exemplo, $2x + 4 = 12$; (2) resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma (T₂), por exemplo,

$2(x+2)+x=10$; (3) resolver uma equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ (T_3), por exemplo, $2x-5=x+8$; (4) resolver uma equação do tipo $A_1(x)=A_2(x)$, sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$, expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica (T_4), por exemplo, $2(x-2)+x=x-9$.

Para resolver tais subtipos de tarefas foram identificadas e categorizadas a priori as seguintes técnicas (τ): a) *Testar a igualdade* (τ_{TI}), por tentativas e erros; b) *Transportar termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), invertendo as operações; c) *Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade; d) *Reagrupar os termos semelhantes* (τ_{RTS}), invertendo o sinal dos termos transpostos.

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas τ_2 e τ_4 , temos também a seguinte técnica: e) *Desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), eliminando parênteses e/ou agrupando termos semelhantes. Enfim, dependendo das variáveis mobilizadas na construção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem às técnicas mistas.

Para justificar as técnicas caracterizadas acima para resolver equações polinomiais do grau com uma incógnita, foram identificadas e caracterizadas a priori as seguintes tecnologias: a) *Princípios de equivalência entre equações*: equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}); b) *Princípio aditivo*: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; c) *Princípio multiplicativo*: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; d) *Propriedades das operações inversas em \mathbb{R}* (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ_{POI}): 1) Se a, b, c são números reais tais que $a+b=c$, então $a=c-b$; 2) Se a, b, c são números reais tais que $a \cdot b=c$, então $a=c \div b$, $b \neq 0$; 3) Propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei do cancelamento: 1) Se $a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$; 2) Se $a \cdot b=a \cdot c \Leftrightarrow b=c$ com $a \neq 0$; 3) Propriedades distributivas (θ_{PDM}): Se k, a, b, c e d são números reais, então $k(a+b)=ka+kb$ e $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

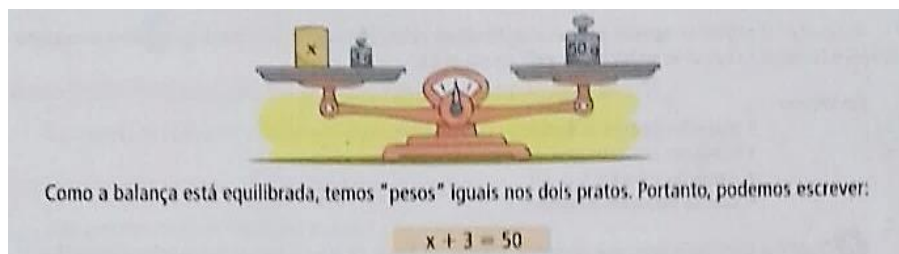
Principais resultados

Nesse tópic, apresentamos os principais resultados comparativo em relação as praxeologias matemáticas e as praxeologias didáticas a serem ensinadas em três livros didáticos do sétimo ano do ensino fundamental referente a equação polinomial do primeiro com uma incógnita, em termos de subtipos de tarefas, técnicas (saber fazer) e tecnologias (Saber).

O livro *Tempo de Matemática*

No que dizer respeito as praxeologias, descrevemos a seguir às organizações matemáticas pontuais relativas à resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Esse livro didático tem um total de 192 páginas em que são distribuídos os 26 capítulos. A seção que contempla os conceitos ou procedimentos ligados à temática da pesquisa está localizada no capítulo 15, *Equações polinomiais do primeiro grau*, com um total de 11 páginas, e no capítulo 16, *Problemas do 1º grau com uma incógnita*, que tem 8 páginas. Ou seja, o autor destinou cerca de 10% do livro para o conteúdo das equações do primeiro grau, fazendo uso da metáfora da balança de dois pratos, conforme podemos ver na figura 1.

Figura 1: Introdução de equação polinomial do primeiro grau



Fonte: Name, 2010, p.93

O uso da balança para introdução das equações, quando é trabalhada a noção de equilíbrio de uma igualdade, é pouco explorado pelo autor do livro, pois aparece apenas em alguns exercícios. A Pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa “resolver equações do primeiro grau” é um recurso (ferramenta) em si no capítulo 15. No capítulo 16, passa ser utilizado como uma ferramenta para resolver problemas.

Figura 2: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau

A noção de equação é introduzida com a ideia de equilíbrio. Para tanto, é proposta a atividade de resolução de equação com balança.

São dados problemas de resolução de equação, visando a passagem da linguagem da língua materna para a linguagem algébrica.

Fonte: Name, 2010, p.15

As atividades referentes as resoluções das equações do primeiro grau são exploradas e contemplam os diferentes subtipos de tarefas (T_1 , T_2 , T_3 , T_4). No total foram identificados 55 exercícios propostos por meio de equações, dos quais 52 eram as equações e apenas três problemas no capítulo 15; já no capítulo 16 concentraram-se 76 problemas. Desse modo, os dois capítulos somam 131 atividades. Conforme, as tarefas registradas no quadro.

Quadro 1: Subtipos de tarefas do livro *Tempo de Matemática*

Subtipos de Tarefas	T_1	T_2	T_3	T_4	%
τ_{TTC}	52	-	-	-	38
τ_{DRE_TTC}	-	12	-	-	9
τ_{NTC}	-	-	09	-	6
τ_{DRE_NTC}	-	-	-	65	47

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo T_1 representam 38% e a tarefa T_4 , 47%. Essas são as tarefas mais propostas pelo autor para o trabalho na sala de aula. Os Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, *gramática*, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, ela é utilizada como se fosse conhecida pelos estudantes.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes:

τ_{NTC} : *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}); τ_{TTC} : *transportar termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}).

A partir dessas duas técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas: τ_{DRE_NTC} : *desenvolver ou reduzir termos/neutralizar termos ou coeficientes*.

No que concerne a organização didática, se realizam em apenas dois momentos didáticos. O primeiro, caracterizado pela elaboração e sistematização das técnicas nomeadas para resolução das equações (subtipos de tarefas) que constituem e justificam os elementos tecnológicos e o segundo momento referente ao trabalho das técnicas por meio dos exercícios.

Concluimos que a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que, quando os autores afirmam que os processos (técnicas) principais podem ser agrupados para resolver equações, eles não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos, utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos, efetuando-se a mesma operação nos dois membros da equação.

A distribuição das equações polinomiais do primeiro grau e de suas atividades é voltada para o ensino da repetição e memorização, não explorando as diversas situações didáticas, tais como o uso de jogos na sala de aula e a resolução de problemas, entre outras. Dessa forma, esse livro é pautado na definição do conteúdo, exemplos e exercícios repetitivos para auxiliar a memorização dos estudantes.

O livro *Matemática*

Esse livro didático do 7º ano dispõe de 13 capítulos, dentre os quais dois destinam-se ao conceito de equação polinomial do primeiro grau: o capítulo 10, denominado de “Usando letras na matemática”, e o 11º capítulo, “Equações”. Ao todo, o livro didático do estudante tem 328 páginas, de forma que o capítulo “Equações” apresenta 36 páginas, o que representa 11% do livro. Além disso, há um caderno de atividades, “Atividades para aprender e estudar”, com 224 páginas. Essas atividades são voltadas para leituras complementares, são atividades complementares.

O autor propôs o estudo das equações polinomiais do primeiro grau no capítulo 10 (IMENES; LELLIS, 2010, p.213), denominado “Usando letras na matemática” e os objetivos desse estudo são: 1) observar padrões e expressar generalizações verbalmente; 2) expressar generalizações, usando variáveis e outros símbolos da linguagem matemática; 3) efetuar cálculos simples, envolvendo números e variáveis.

Figura 3: Introdução à noção de equação polinomial do primeiro grau

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. At the top, there is a sequence of operations: a box containing a question mark, followed by an arrow with $\times 7$ above it, another box with a question mark, an arrow with $+15$ above it, and a final box containing the number 71. Below this sequence, there are three calculations: a subtraction $71 - 15 = 56$, a division $56 \div 7 = 8$, and a handwritten note in Portuguese: "O número desconhecido é 8."

Fonte: Imenes; Lellis, 2010, p.229

Os procedimentos para desenvolver ou reduzir expressões algébricas se apoiam em propriedades aritméticas, tais como propriedades distributivas da multiplicação (ou divisão) em relação à adição (ou subtração). Desse modo, a álgebra é introduzida como uma extensão da aritmética. A pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa “resolver equações do primeiro grau” é um recurso (ferramenta) a ser utilizado para resolver problemas.

Figura 4: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau

Abordam-se a resolução de equações de 1º grau e a “montagem” de equações para resolver problemas.

Fonte: Imenes; Lellis, 2010, p.239

A razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau é explicitamente demarcada nesse livro didático em termos de aplicações, procedimentos técnicos e na interligação dos temas para resolução de problemas das equações e seu domínio na álgebra e funções. No total, foram identificados 34 exercícios propostos por meio de equações, dentre os quais oito eram as equações formadas, o que corresponde a 24%, e 26 problemas, que representam 76% de todo o capítulo. Destacamos, ainda, que esses exercícios referentes às equações formadas para serem resolvidas (por exemplo, questão 1: resolva as equações da letra a ($x + 3 = 15$) letra b, c, d...) Somaram 38 equações no capítulo 11. Dentre essas equações, tomamos como parâmetro as tarefas e técnicas que autores propuseram na sequência de estudo do capítulo. No entanto, essas tarefas e técnicas podem ser resolvidas com o apoio de outras tarefas e técnicas.

Quadro 2: Subtipos de Tarefas livro Matemática

Subtipos de Tarefas	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	%
τ_{TTC}	12	-	-	-	32
τ_{DRE_TTC}	-	04	-	-	10
τ_{NTC}	-	-	6	-	16
τ_{DRE_NTC}	-	-	-	16	42

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo T₁ representam 32% e as tarefas do grupo T₄, 42%, ou seja, foram as mais propostas pelos autores para o trabalho na sala de aula. Os Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, gramática, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, mas utilizada como se fosse conhecida pelos estudantes. A noção de *equação* é mais ou menos oficializada como sendo *igualdades* que contêm números desconhecidos, representados por *incógnitas*.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes técnicas: τ_{TTC} : *transpor termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}); τ_{NTC} : *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}); τ_{RTS} : reagrupar termos semelhantes, invertendo as operações (sinais) dos termos transpostos.; A partir dessas três técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas: τ_{DRE_TTC} : *desenvolver ou reduzir termos/ transpor termos ou coeficientes*; τ_{DRE_NTC} : *desenvolver ou reduzir termos/ neutralizar termos ou coeficientes*.

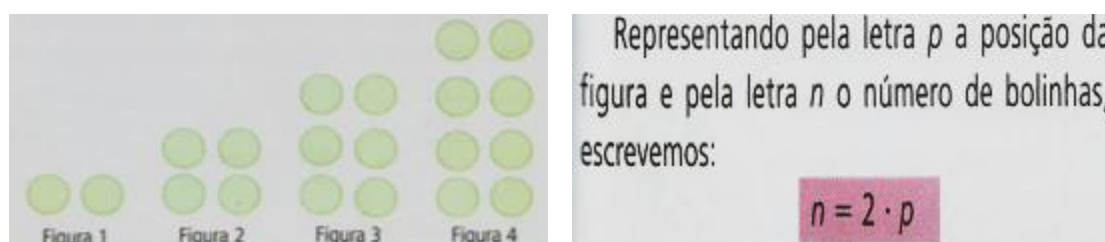
No que concerne a organização didática, se realizam em três momentos didáticos. O primeiro, caracterizado pela elaboração e sistematização das técnicas nomeadas para resolução das equações (subtipos de tarefas) que constituem e justificam os elementos tecnológicos, o segundo momento referente ao trabalho das técnicas por meio dos exercícios e o terceiro momento referente a avaliação dos elementos tecnológicos (apresentação de questionamentos que permitem aos estudantes refletirem sobre o conceito). A transposição das praxeologias matemáticas existentes em volta dos subtipos

de tarefas referentes às resoluções de equações polinomiais do primeiro grau. Concluímos que a passagem dos procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que os autores afirmam que há dois processos (técnicas) principais que podem ser agrupados para resolver equações, mas eles não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos, utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos, efetuando-se a mesma operação nos dois membros da equação. Por fim, avaliamos o terceiro livro didático.

Livro *Praticando Matemática*

Nesse livro, os temas matemáticos são organizados em capítulos identificados por títulos que expressam as temáticas trabalhadas em 11 capítulos, as quais, por sua vez, são subdivididas em várias seções, que contemplam conceitos ou procedimentos ligados à temática maior. O conteúdo referente ao conceito de equação polinomial do primeiro grau está no capítulo 9, denominado de “Equações”. Ao todo, o livro do estudante tem 288 páginas, e o capítulo das “Equações” apresenta 21 páginas, o que representa 8% do livro. O estudo da Álgebra é introduzido no capítulo 9 intitulado *Equações*, a partir de um problema relativo ao cálculo por meio de sequência de figuras em quadro, visando elaborar e sistematizar técnicas que consistem em *desenvolver expressões algébricas*, ou seja, generalizar e simplificar expressões algébricas conforme figura 5.

Figura 5: Exercício para introduzir a noção de expressões algébricas



Fonte: Andrini, 2012, p.197

Podemos observar que esse é o momento do primeiro encontro do estudante com o estudo de expressões algébricas. A partir desse problema é que o autor trabalha o significado das letras nas expressões matemáticas, apresentando uma definição do que seja uma expressão algébrica. A pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa resolver equações do primeiro grau é um recurso (ferramenta) a ser utilizado para resolver problemas.

Figura 6: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau

neste volume, é mostrar as equações como ferramenta útil na representação e resolução de problemas, sem ofuscar as habilidades de cálculo mental, as resoluções por tentativas e por meio da Aritmética.

Fonte: Andrini, 2012, p.11

A razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau é demarcada nesse livro didático em termos de aplicações para resolução de problemas das equações. Os exercícios propostos sobre resolução de equações do primeiro grau contemplam os diferentes subtipos de tarefas (T₁, T₂, T₃, T₄). No total foram identificados 94 exercícios propostos por meio de equações, dos quais 25 eram as equações formadas e 69 problemas. Destacamos ainda que nesses exercícios referentes às equações formadas para serem resolvidas (por exemplo: questão 1 – resolva as equações: letra a, b, c, d, e, f) somaram 108 equações no capítulo. Assim, identificamos as tarefas elencadas no quadro 3.

Quadro 3: Subtipos de tarefas do livro *Praticando Matemática*

Subtipos de Tarefas	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	%
τ_{TTC}	47	-	-	-	43
τ_{DRE_TTC}	-	22	-	-	21
τ_{NTC}	-	-	10	-	9
$\tau_{ED_DRE_NTC}$	-	-	-	29	27

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo T₁ representam 43% e as tarefas do grupo T₄, 27%, ou seja, essas são as tarefas mais propostas pelos autores para o trabalho na sala de aula. Os Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, gramática, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, mas utilizada como se fosse conhecida pelos estudantes. A noção de *equação* é mais ou menos oficializada como sendo *igualdades* que contêm números desconhecidos, representados por *incógnitas*.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes:

τ_{TTC} : *transportar termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}); τ_{NTC} : *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

A partir destas duas técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas: $\tau_{ED_DRE_TTC}$: *desenvolver ou reduzir termos/*

transpor termos ou coeficientes; τ_{DRE_NTC} : *desenvolver ou reduzir termos/ neutralizar termos ou coeficientes*.

No que concerne a organização didática, se realizam em apenas dois momentos didáticos. O primeiro, caracterizado pela elaboração e sistematização das técnicas nomeadas para resolução das equações (subtipos de tarefas) que constituem e justificam os elementos tecnológicos e o segundo momento referente ao trabalho das técnicas por meio dos exercícios.

Organização matemática

A análise das coleções, à luz das praxeologias matemáticas relativas à resolução de equações polinomiais do primeiro grau, nos permitiu identificar as seguintes organizações matemáticas pontuais relativas ao:

- (a) **subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax + b = c$)**. Os resultados mostram que, nos livros *Matemática* e *Praticando Matemática*, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefa foram inicialmente propostos para serem resolvidos por meio de técnica justificada por meio das propriedades das operações inversas (θ_{POI}). Já o livro *Tempo de Matemática* faz o inverso: apresenta primeiro as propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).
- (b) **subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $A(x) = c$)**. Os resultados mostram que, no livro *Matemática* e no livro *Tempo de matemática*, os autores não apresentaram essa tarefa de forma explícita, já no livro *Praticando Matemática* foi apresentada a tarefa t_2 . Assim, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da técnica mista τ_{DRE_TTC} , oficializada por meio de exemplos. Nos livros essa técnica mista implica desenvolver e reduzir a expressão $A(x)$ à forma, por meio da técnica τ_{DRE} . Essa técnica auxiliar τ_{DRE} é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}).
- (c) **subtipo de tarefa t_3 (resolver equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$)**. Os resultados indicam que, nas coleções, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da técnica τ_{NTC} , cuja sistematização é organizada em regras que se apoiam nas propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

(d) **subtipo de tarefa t4 (resolver equações do tipo $A_1(x) = A_2(x)$)**. Os resultados mostram que, no livro *Matemática*, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da mobilização da técnica mista τ_{DRE_NTC} , sistematizada por meio de exemplos. A técnica auxiliar é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}) e a técnica τ_{NTC} e por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

No quadro abaixo, apresentamos uma síntese da comparação feita nos itens acima.

Quadro 4: Comparativo das técnicas e tecnologia nos três livros

Subtipo de tarefas	<i>Matemática</i>		<i>Tempo de Matemática</i>		<i>Praticando Matemática</i>	
	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia
T₁: $ax + b = c$	τ_{TTC}	θ_{POI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{TTC}	θ_{POI}
			τ_{TTC}	θ_{POI}		
T₂: $A(x) = c$	Não explícita		Não explícita		τ_{DRE_TTC}	θ_{PDM}
T₃: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}
T₄: $A_1(x) = A_2(x)$	τ_{DRE_NTC}	$\theta_{PDM_}\theta_{PGI}$	τ_{DRE_NTC}	$\theta_{PDM_}\theta_{PGI}$	$\tau_{ED_DRE_}\tau_{TTC}$	$\theta_{PDM_}\theta_{PGI}$

Fonte: a pesquisa

Percebemos que os três livros apresentam propostas diferentes para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau em relação à tarefa t_1 ($2x + 8 = 17$). Quanto à técnica de transpor termos e coeficientes, nos livros *Matemática* e *Praticando Matemática*, os autores adotam a mesma sequência para essa tarefa, no entanto, no livro *Tempo de Matemática*, o autor propõe trabalhar com as técnicas de neutralizar termos e coeficientes e transpor termos e coeficientes (método prático).

Em relação à tarefa t_2 ($x + 2(x + 3) = 60$), apenas o livro *Praticando Matemática* fez a explicitação dessa tarefa e de uma técnica mista: desenvolver ou reduzir expressões para transformar em seguida, transpor termos e coeficientes.

Já em relação à tarefa t_3 ($5x - 8 = 2x + 6$), os três livros apresentam a mesma sequência e as mesmas técnicas das propriedades gerais da igualdade.

No que concerne à tarefa t_4 $2(2x - 1) = 2(x + 1)$, os livros *Matemática* e *Tempo de Matemática* apresentam a mesma sequência de tarefa, enquanto o livro *Praticando Matemática* trabalhou com denominadores para apresentar essa tarefa. Em relação às técnicas (propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade), elas são iguais nos três livros.

Tendo em vista essas considerações, concordamos com Chevallard (1999) para quem o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula e a maneira como fazê-lo, já que o aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber. Acreditamos que o livro didático é um meio que exerce grande influência na atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente.

Considerações finais

Quanto aos três livros didáticos pesquisados apresentam propostas diferentes para a introdução das equações polinomiais do primeiro grau e a sequência do capítulo do livro. Um ponto comum aos três livros é o uso da metáfora da balança de dois pratos para construir a ideia de equivalência entre as equações. Quanto as tarefas (t_1 $(x + 3 = 5)$), destacamos que: a técnica de transpor termos e coeficientes são iguais nos livros (*Matemática* e *Tempo de matemática*), já o livro *tempo de matemática* inicia o capítulo com a técnica de neutralizar termos e coeficientes.

Em relação à tarefa t_2 $(x + 2(x + 3) = 60)$, verificamos que apenas o livro *Praticando Matemática* explicitou essa tarefa e uma técnica mista: desenvolver ou reduzir expressões para transformar e, em seguida, transpor termos e coeficientes. No entanto, os outros livros os autores sugerem nos exercícios o trabalho dessa tarefa.

Já quanto à tarefa t_3 $(5x - 8 = 2x + 6)$, vimos que os três livros apresentam a mesma sequência e as mesmas técnicas das propriedades gerais da igualdade.

Relativamente à tarefa t_4 $2(2x - 1) = 2(x + 1)$, os livros *Matemática* e *Tempo de Matemática* apresentam a mesma sequência de tarefa, quanto ao livro *Praticando Matemática* trabalhou com denominadores para apresentar essa tarefa.

No tocante às técnicas (propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade), verificamos que os três livros se assemelham.

Todavia, esses livros não justificam a existência dessas diferentes técnicas. Os livros analisados desenvolvem sequências diferentes para o trabalho de elaboração e sistematização de diferentes técnicas para realizar os diferentes subtipos de tarefas claro os limites ou potencialidades de cada técnica, além de não esclarecerem a distinção entre procedimentos aritméticos e algébricos (CHEVALLARD, 1984).

Em relação as tarefas mais frequentes nos três livros didáticos, percebemos que, nos livros *Tempo de Matemática* e *Matemática*, os autores concentraram-se nas tarefas do tipo T_4 (quase 50% de tarefas sugeridas para o trabalho docente em sala de aula), ou seja, priorizaram o trabalho com os procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético. Já o livro *Praticando Matemática* tem como modelo dominante as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax + b = c$), com 44% de proposições referentes às equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos para o trabalho em sala.

Referências

- ARAUJO, A. J. de, **O ensino de Álgebra no Brasil e na França: um estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. Tese de doutorado, UFPE, 2009.
- ANDRINI, A. **Praticando Matemática, 7** / Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. 3ª Ed. Renovada- São Paulo: Editora do Brasil, 2012 (Coleção Praticando Matemática)
- BARBOSA, E. J.T, **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. Tese de doutorado, UFRPE. 2017.
- CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique. In : Petit X n° 5, IREM, Grenoble, 1984.
- _____. Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de didactique des mathématiques et de L'informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble. (1991)
- _____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. Actes de l'U.E. de la Rochelle, 1998.
- _____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, n° 2, pp. 221-266, 1999.
- FONSECA, C. (2004), *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo.

GALVEZ, G.. **A Didática da Matemática / In. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas** Cecília Parra, Irma Saiz...[et. al.]; trad. Juan Acuña Liorens. Porto Alegre: Arte Medicas, 1996.

IMENES, L. M. **Matemática**. Imenes & Lellis. Obra em 4 v. para alunos de 6º ao 9º ano. São Paulo: Moderna, 1ª ed. 2010.

KAPUT, J. (2005) **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Documento retirado de <http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf> em 22 de Janeiro de 2014.

KIERAN, C. *The learning and teaching of algebra*. Montreal: Université du Québec à Montréal, 1992.

_____. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K. Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.

NAME, M. A. *Tempo de Matemática, 7: ensino fundamental*, 2 ed.- São Paulo: Editora do Brasil, 2010

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Texto recebido: 06/03/2017
Texto aprovado: 20/10/2017