EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p269-293

Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito

Mathematics for teaching of the proportionality concept from a concept study

ROBERTA D'ANGELA MENDUNI-BORTOLOTI[1]

JONEI CERQUEIRA BARBOSA[2]

Resumo

Neste artigo, apresentamos a construção de um modelo da *matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade com um grupo de professores da educação básica. Inspirados em Brent Davis, recorremos ao Estudo do Conceito como dispositivo investigativo para identificação de diferentes formas dos professores comunicarem o conceito de proporcionalidade. A apropriação que fizemos desse dispositivo entrelaçado às definições teóricas dos trabalhos desenvolvidos pela pesquisadora Anna Sfard, se constituiu em uma estratégia para a produção e a análise do modelo. Os resultados da pesquisa, de natureza qualitativa, mostraram uma diversidade de realizações do conceito de proporcionalidade, as quais foram agrupadas em três cenários: como razão, como igualdade entre razões e como função.*

Palavras-Chave: Matemática para o ensino; Estudo do conceito; Proporcionalidade.

Abstract

In this article, we present the construction of a mathematical model for teaching of the proportionality concept from a group with basic education teachers. Inspired by Brent Davis, we use the concept of study as an investigative device to identify different ways teachers communicate the proportionality concept. The appropriation we made this interlaced device to theoretical definitions of the work developed by researcher Anna Sfard, constituted in a strategy for the production and analysis of the model. The results of the research, qualitative, showed diversity in the realizations of the proportionality concept, which were grouped into three landscapes: as a reason, such as equality between reasons and as a function.

Keywords: *Mathematics for Teaching; Concept Study; Proportionality.*

[1] Doutora em Educação pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora do curso de Licenciatura em Matemática (UESB), e-mail: robertamenduni@yahoo.com.br

[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo (UNESP). Professor do curso de Licenciatura em Matemática e da pós-graduação em Educação (UFBA), e-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

1 Introdução

É possível identificar, na literatura, pesquisas que apontam uma especificidade no trabalho do professor de matemática, ou seja, no ofício de ensinar matemática, diferenciando esse profissional dos demais, inclusive do próprio matemático (BALL; BASS, 2002; BALL; THAMES; PHELPS, 2008; MOREIRA, 2012; DAVIS; RENERT, 2014; COUTINHO 2015; RANGEL 2015).

Segundo Moreira (2012), existe uma matemática própria do professor da escola básica, e essa tem sido chamada de matemática do professor, matemática escolar ou matemática para o ensino. Também pode ser conhecida como conhecimento matemático para o ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) ou conhecimento de matemática para o ensino (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015).

O conhecimento matemático para o ensino pode ser visto como um conjunto de conhecimentos a respeito dos conteúdos matemático e pedagógico, e foi proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), a partir de uma análise do que é requerido no ensino, com base no que o professor precisa saber para ensinar matemática. Entretanto, a matemática do professor não é simplesmente a junção de conteúdo matemático (aprendido na formação inicial) e ensino (desenvolvido na atuação profissional), e sim, uma construção histórica, mobilizada na e para a ação que o professor desenvolve à medida que exerce sua profissão, em especial na sala de aula, na relação entre professor e alunos (MOREIRA, 2012). Tendo por objetivo articular a matemática aprendida na formação inicial e a matemática ensinada na educação básica, Rangel, Giraldo e Maculan (2015, p. 54) explicitaram o conhecimento de matemática para o ensino como "[...] um conjunto de conhecimentos sobre o conteúdo, que capacita o professor para o ensino".

Algumas pesquisas têm apontado o trabalho com e entre os professores como o meio de caracterizar uma matemática específica da ação do professor (TOWERS; MARTIN, 2009; DAVIS; RENERT, 2014; COUTINHO, 2015; RANGEL, 2015). Não há um formador ou pesquisador que direcione o trabalho, mas um grupo que, pautado pela compreensão coletiva e pelo compartilhamento das ideias, se engaja para investigar a matemática que se usa e pode ser usada para o ensino.

A matemática específica da ação do professor, ou mobilizada na sua tarefa de *como* ensinar, pode ser compreendida como matemática para o ensino (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2014).

Neste artigo, definimos *matemática para o ensino* como um modelo teórico que captura uma diversidade de modos de ensinar um conceito matemático, o qual pode ser reapresentado por meio de uma estrutura teórica que organiza suas formas de ocorrência.

Dentre os diversos conceitos ensinados na educação básica, escolhemos o de proporcionalidade, pois além de perpassar todos os anos dos ensinos fundamental e médio, ele tem o potencial de se relacionar com outros conteúdos da matemática (SILVA, 2008; COSTA JUNIOR, 2010), bem como com outras áreas do conhecimento (OLIVEIRA, 2009), o que possibilitou ampliar a diversidade referida acima.

Inspirados em Sfard (2008), entendemos *conceito* como aquilo que a palavra ou o nome comunica, e *realizações* como formas de comunicar um conceito. A comunicação ocorre por meio da fala, escrita, símbolos, ícones, gestos ou objetos concretos (SFARD, 2008), e as realizações de um conceito ou as formas de comunicá-lo podem ser identificadas, por exemplo, em livros didáticos, documentos oficiais, no ato de ensinar do professor ou em um grupo de professores trabalhando juntos.

Neste artigo, focalizamos as realizações do conceito de proporcionalidade comunicadas pela fala e pela escrita de um grupo de professores da educação básica, porque consideramos o professor um dos principais responsáveis pela comunicação de conceitos matemáticos legitimados.

Apropriamo-nos do EC (DAVIS; RENERT, 2013; 2014) como uma estratégia metodológica para a produção e análise dos dados, bem como para a modelagem teórica de uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, aqui definida como um modelo teórico que retrata diferentes realizações desse conceito na educação básica. Sendo assim, tivemos por objetivo *construir uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade com um grupo de professores da educação básica*.

Apresentamos contribuições à área de Educação Matemática enquanto campo científico, uma vez que o trabalho é capaz de subsidiar investigações sobre formação de professores em relação ao aprimoramento do modelo desse e de outros conceitos matemáticos. Já no campo profissional, poderá fomentar o debate sobre formação de professores de matemática a partir da geração do modelo aqui proposto, assistindo à formação inicial e/ou continuada de professores de matemática na ampliação de possibilidades de correlacionar diferentes realizações para proporcionalidade. Essa contribuição pode repercutir também em disciplinas introdutórias dos cursos de licenciatura em matemática e/ou em disciplinas como estágio e prática de ensino, que apoiam futuros professores no ensino do referido conceito.

A seguir, apresentaremos as definições teóricas de Sfard (2008), utilizadas neste artigo para caracterizar realizações, e a apropriação que fizemos do EC para construir um modelo teórico do conceito em questão.

2 Caracterizando realizações do conceito de proporcionalidade no estudo do Conceito

As realizações podem ser caracterizadas como narrativas, pois são declarações faladas ou escritas, validadas ou rejeitadas por um grupo que participa da comunicação (SFARD, 2008). Segundo Sfard (2008), as *rotinas* são formas de produzir narrativas sobre realizações consideradas válidas, de acordo com as regras acordadas entre participantes da comunicação. Sendo a comunicação específica, como ocorre no caso da matemática, as realizações matemáticas caracterizam-se pela presença de vocabulário (palavras usadas na e para a comunicação matemática), mediadores visuais (diferentemente de palavras, são recursos que mediam a comunicação por meio da visualização como, por exemplo, gráficos, tabelas, desenhos, símbolos algébricos, ícones), narrativas (validadas de acordo com regras aceitas, oriundas de outras narrativas, legitimadas anteriormente) e rotinas (SFARD, 2008).

As rotinas são um conjunto de *metarregras*, que, por sua vez, consistem em *ações discursivas* utilizadas pelo participante da comunicação no desenvolvimento de determinada realização. As rotinas são fundamentadas nas *regras de realização* do conceito, que dão validade às ações discursivas, pois as regras de realização constituem narrativas que definem o conceito, como teoremas, definições, axiomas. Metarregras, substanciadas em regras de realização, produzem uma rotina cuja realização provavelmente será considerada válida.

Como ilustração do que foi exposto, consideremos uma situação hipotética, em que se queira encontrar a altura de um poste, com dados já conhecidos, como o comprimento da sombra que ele projeta no chão, a altura de um prédio e o comprimento da sombra projetada pelo prédio. Uma das formas de resolver a situação é a partir da regra de três, em que três números são conhecidos e pede-se o quarto (LIMA et al., 2006b). Vale dizer que ela é considerada uma metarregra, pois é a ação discursiva utilizada pelo participante da comunicação que descreve a rotina por ele empregada.

Entretanto, para que essa forma de realizar o conceito de proporcionalidade seja aceita, é preciso que ela esteja respaldada em alguma regra de realização do conceito, isto é, em uma narrativa que fundamente o uso da regra de três. A regra de realização que fundamentou esse uso, por exemplo, foi o teorema de Tales, pois as grandezas envolvidas (alturas do prédio e poste e comprimento das respectivas sombras) estão relacionadas proporcionalmente, permitindo a aplicação desse teorema.

A situação apresentada acima descreve um tipo de rotina, caracterizada por um tipo de realização. Nesse sentido, o modelo de matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade se constitui por retratar uma variabilidade de realizações a serem agrupadas de acordo com rotinas. Para identificarmos diferentes realizações e consequentemente, rotinas que as descrevem, reelaboramos algumas definições teóricas de Sfard (2008) entrelaçadas a apropriação que fizemos das ênfases do EC (DAVIS; RENERT, 2014) para, então, construir uma matemática para o ensino do conceito proposto.

A primeira ênfase do EC se referiu às *realizações* dos participantes da comunicação, ou seja, o que eles comunicaram como conceito de proporcionalidade. À medida que analisávamos as realizações identificávamos estruturas das ações discursivas que se aproximavam ou não no modo de comunicar o conceito, fosse por palavras fosse por recursos visuais como, por exemplo, gráficos, tabelas, desenhos, símbolos algébricos, ícones. Conforme rotinas se aproximavam delimitávamos a segunda ênfase, constituída pelos *cenários*, produzidos segundo as regras de realização que os fundamentavam e as metarregras que os descreviam. Já os *vínculos*, que formaram a terceira ênfase, foram gerados entre as realizações agrupadas no mesmo cenário, ou seja, vínculos entre a estrutura das ações discursivas comunicadas.

Os cenários foram construídos a partir da identificação de diferentes rotinas, ou seja, a partir de conjuntos diferentes de metarregras. Já os vínculos foram constituídos a partir de associações entre realizações do mesmo cenário, pois observando um cenário por vez, o foco recaiu sobre o que relacionava as realizações ali agrupadas, instaurando, assim, possíveis vínculos.

Na seção seguinte, descreveremos os procedimentos metodológicos utilizados para analisar as realizações apresentadas pelos participantes da comunicação, bem como as relações que mantiveram entre si, a partir do EC.

3 Procedimentos metodológicos

Para o cumprimento do objetivo da pesquisa, foi necessário identificar realizações para o conceito de proporcionalidade com professores da educação básica. Por isso, caracterizamos a pesquisa como empírica e empregamos o método qualitativo para o seu desenvolvimento (JOHNSON; CHRISTENSEN, 2012). Partindo da comunicação entre e com professores, foi possível fazer a identificação e, por conseguinte, constituímos uma matemática para o ensino do referido conceito, a partir do EC.

Com base nas pesquisas desenvolvidas por Davis e Renert (2013; 2014), Rangel (2015) e Coutinho (2015), notamos que a experiência e os distintos níveis de atuação no ensino de matemática seriam preponderantes para a captura de diferentes realizações para o conceito de proporcionalidade. A fim de assegurar tais características para um grupo de professores, identificamos no Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, campus de Vitória da Conquista, na Universidade Estadual do Sudoeste Baiano (UESB), essa potencialidade.

Fizemos o convite a um dos professores do programa, o qual aceitou compartilhar uma disciplina conosco[3] - no caso, a disciplina MA 40 – Tópicos de Matemática, que é eletiva e possui ementa aberta para que cada instituição a ofereça conforme seus anseios. Propusemos como metodologia para a disciplina um EC (DAVIS; RENERT, 2014) sobre proporcionalidade. Concretizamos a proposta quando o Colegiado do referido programa aprovou o pedido feito pelo professor com a participação da primeira autora deste relatório.

O curso é semipresencial e a disciplina manteve-se com 120h, sendo 45h presenciais e as demais computadas com trabalhos desenvolvidos nas salas de aula dos professores do ensino básico e estudos referentes à própria disciplina. Iniciamos em março de 2015 e fizemos 8 encontros de 3h cada um, até uma greve ser deflagrada pelos docentes em maio, o que nos forçou a suspender as atividades.

A comissão de ética do comando de greve só deferiu nosso pedido pela manutenção da disciplina dois meses depois, quando retornamos às atividades. Contudo, o que apresentamos especificamente neste relatório refere-se ao material produzido anteriormente à greve, pois esse estudo integralizou a pesquisa de doutorado da primeira autora, que tinha prazo para ser concluída.

O material utilizado para a produção dos dados foram: 1) registros no diário de campo, no qual anotamos o desenvolvimento de cada encontro e estabelecemos a relação entre as realizações do conceito de proporcionalidade e as ênfases do EC; 2) notas analíticas que, segundo Macedo (2010), são anotações para uso próprio do pesquisador, utilizadas,

---

[3] Local de atuação profissional da primeira autora, o que possibilitou uma parceria de trabalho com o professor do PROFMAT.

neste caso, para refletir sobre os usos do conceito em estudo; 3) filmagens de todos os encontros, de cuja transcrição fizemos um recorte com foco nas realizações discutidas *pelo* e *em* grupo, assim como em possíveis relações que pudessem ser estabelecidas entre as realizações apresentadas; 4) registros escritos produzidos pelos professores; e 5) uma ficha utilizada para traçar o perfil desses profissionais.

A produção de dados gerada por esse material foi interpretada sob o foco das ênfases do EC, que simultaneamente serviu como uma estratégia de modelagem teórica para construir uma matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, a partir das realizações compartilhadas pelos professores[4].

3.1 Os participantes da comunicação em um estudo do conceito

No primeiro encontro, apresentamos a proposta da disciplina e esclarecemos o motivo da presença dos dois professores Claudinei Camargo Sant'Ana e autora. Expusemos que nossa participação, enquanto professores, dar-se-ia de forma a não direcionar o trabalho, mas a engajar-se nele. Assim como Rangel (2015), assumimos para os estudantes que, diante de dúvidas ou questionamentos, responderíamos com outra pergunta, sugerindo que pesquisassem e retomassem a discussão no encontro seguinte, ou ainda, que um deles se responsabilizasse pela investigação e, assim, compartilhasse os resultados obtidos com o grupo.

Explicamos que todo material produzido na disciplina seria recolhido porque faria parte de uma pesquisa da qual participava a segunda professora. Após questionamentos serem dirimidos, entregamos, em duas vias, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), em cumprimento à Resolução 466/12, a qual regulamenta pesquisas envolvendo seres humanos (BRASIL, 2013). Salientamos que poderiam desistir da mesma em qualquer tempo e não sofreriam penalidade alguma, muito menos em relação à disciplina.

Em seguida, entregamos uma ficha aos professores, para que, pudéssemos traçar o perfil dos participantes. Nessa ficha, solicitamos informações sobre sua formação inicial, o tempo de atuação profissional e o nível escolar de atuação entre ensino fundamental (EF) e/ou ensino médio (EM). Os nomes que apresentamos não são fictícios, pois esses

[4] Ressaltamos que esse relatório de pesquisa foi apresentado a todos os envolvidos na disciplina MA-40 para que conhecessem a redação final do que foi produzido em conjunto e relatado pelos pesquisadores, com o objetivo de que todos legitimassem ou não a interpretação que fizemos de suas produções ao discutirem o conceito de proporcionalidade.

participantes preferiram manter a identificação. O perfil traçado pode ser observado no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Perfil dos professores

Nome	Formação Inicial	Tempo de atuação	Nível escolar de atuação
Agnaldo	Licenciatura em Matemática- UESB	17 anos	EF e EM
Alan	Licenciatura em Matemática - UESB	6 anos	EF
Dario	Licenciatura em Matemática - UNEB	10 anos	EM
Eric	Licenciatura em Matemática - UNEB	7 anos	EF
Guilhermino	Pedagogia - UESB	11 anos	EM
Jandresson	Licenciatura em Matemática - UESB	8 anos	Atuava no EF e EM
Noreslei	Licenciatura em Física - UESB/UFPE Licenciatura em Matemática - FTC	12 anos	EM
Radival	Ciências com Habilitação em Matemática - UNEB	10 anos	Ensino Superior, mas atuava no EM

Fonte: Elaboração própria com base no preenchimento da ficha

As situações que apresentaremos na seção seguinte foram todas trazidas pelos professores citados acima, conforme as discussões se configuravam nos encontros. Apenas no primeiro, disparamos uma atividade que objetivava levantar realizações para o conceito de proporcionalidade. Então, solicitamos que apresentassem uma situação relacionada a proporcionalidade bem como uma solução para tal situação. As realizações desenvolvidas foram mostradas a todos pelos próprios professores no encontro seguinte. No terceiro encontro discutimos alguns dos problemas que eles tinham trazido no encontro anterior, pois convidamos os professores para registrar por escrito problemas que merecessem ser discutidos no grupo, ou por serem considerados difíceis pelos alunos deles, ou porque eles os resolviam sem saber por que empregavam determinados procedimentos.

A partir daí, produzimos diversas realizações para o conceito de proporcionalidade, pois além do professor que trazia a questão a ser discutida, os próprios colegas tinham que resolvê-la antes da discussão, o que possibilitou capturar várias realizações para o conceito em questão. Com esses dados iniciamos o processo de produção e análise, culminando para a construção de uma matemática para o ensino do referido conceito.

A seguir, denotaremos as realizações identificadas e agrupadas por cenários com os possíveis vínculos estabelecidos. A forma que escolhemos para apresentar as realizações estão relacionadas ao agrupamento por cenários e não a uma ordem linear das discussões desenvolvidas nos encontros. Por fim, apresentaremos as considerações finais e as implicações da pesquisa.

4 Cenários para realizações do conceito de proporcionalidade e possíveis vínculos

Escolhemos três narrativas para iniciar a exposição de cada cenário, que identificamos ao longo das discussões com o grupo de professores, e, em seguida, para representar suas realizações, que serão destacadas em negrito apenas uma vez, quando mencionadas como tais. A fim de evitar repetições, esclarecemos que cada problema será apresentado por um número, através do qual ele poderá ser referenciado em outras partes do texto.

4.1 Proporcionalidade como razão

Quando a gente compara duas grandezas, vai existir uma razão entre elas [...]. (Professor Agnaldo)

A narrativa do professor Agnaldo expressa o que pesquisadores comunicam como *razão*, isto é, uma comparação multiplicativa entre quaisquer duas quantidades de mesma natureza ou não (LAMON, 2006; CYRINO et al., 2014). De acordo com os enunciados falados ou escritos pelos professores, no que diz respeito à relação multiplicativa entre duas grandezas, foram apresentadas diferentes realizações para a razão. A primeira delas foi a **divisão proporcional,** quando as grandezas de natureza diferentes, mas relacionadas, referiram-se ao número de moedas e pães.

Quadro 2: Problema 1 e realização do professor Radival

Problema 1	**Realização do professor Radival** (grifo nosso)
Dois pastores possuem 9 pães: o primeiro tem 4, e o segundo, 5. Aparece um caçador esfomeado e os três dividem entre si igualmente os 9 pães. O caçador paga sua parte, dando 8 moedas ao primeiro pastor e 10 ao segundo. Um dos pastores reclama desse pagamento, achando injusta a distribuição das moedas, dizendo que deveria receber mais do que recebeu. Quantas moedas cada um deve receber?	"Se eles <u>dividiram</u> em partes iguais, cada um comeu 3 pães; logo, o que tinha 5 deu 2 pães e o que tinha 4 pães deu 1 pão. Como o total de moedas pagas por 3 pães foi 18, cada pão custou 6 moedas; logo, quem deu um pão deveria receber 6 moedas e o segundo, 12 moedas, mantendo a <u>proporção</u> de ½, utilizada na entrega dos pães".

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Consideramos a realização do professor Radival (Quadro 2) como uma divisão proporcional porque a metarregra que descreveu a ação do participante (professor) foi a repartição do número de moedas proporcionalmente ao que cada pastor deu de pães. A razão ou proporção pode ser compreendida como 1:2 (ou ½), o que equivale a receber 6 moedas por cada pão- logo, 6 moedas para o primeiro pastor e 12 para o segundo.

Outra forma de realizar a divisão proporcional ocorreu com a utilização de um operador. Segundo Lamon (2006, p. 151, tradução nossa), “um operador é um conjunto de instruções para resolução de um processo. Por exemplo, 2/3 é um operador que instrui você a multiplicar por 2 e dividir o resultado por 3”. Identificamos uma instrução parecida com essa em um dos registros do professor Guilhermino, conforme a Figura 1, problema 1.

Figura 1 – Realização do professor Guilhermino

o dovlho a. a proporcão mais justa seria dar ao primeiro
Pastor 1 parte das 18 moedas enquanto o outro receberia
2 partes. Assim 1º) $\frac{1}{3}$ de 18 e 2º $\frac{2}{3}$ de 18
Logo: 1º Pastor 6 moedas e o 2º 12 moedas

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

No caso de 2/3 de 18, a instrução, considerada por nós como metarregras, consiste em multiplicar 18 por 2 e dividir o resultado por 3. A razão 2/3 relaciona a quantidade de pães que o segundo pastor doou ao caçador (2) com a quantidade total de pães de cada um (3).

A segunda realização para a razão ocorreu como **escala**, por meio de um operador chamado *fator de escala*, que “age em todas as dimensões [de uma figura, por exemplo] simultaneamente. Um operador reduz ou amplia através da operação de multiplicação [...]” (LAMON; 2006, p. 214, tradução nossa).

O professor Guilhermino elaborou uma situação cuja realização é do tipo escala comunicada pelo fator de escala (operador). Ele construiu um enredo no qual uma sala tinha 5m de comprimento e 3m de largura mas, no desenho, as dimensões estavam representadas por 10cm e 6cm, respectivamente. A pergunta era: quantas vezes a sala real era maior que o desenho, ou seja, qual é o fator de escala ou operador?

Figura 2 – Realização do professor Guilhermino

Há um numero K que multiplica as dimensões do desenho
e obtem-se o tamanho real, Logo

comprimento: $10 . K = 500$ (Observe que $5m = 500cm$)

$K = \frac{500}{10} \to K = 50$ vezes

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

A Figura 2 mostra parte da realização em que o fator de escala ou operador pode ser identificado como k. A metarregra usada é também reconhecida como E=R/D (GUERRA; HERNÁNDEZ, 2014), onde E representa o fator de escala, R o comprimento do tamanho real do objeto e D o comprimento do desenho do objeto. Na realização do professor Guilhermino, Figura 3, a letra k representou a letra E.

Os registros do professor Guilhermino apresentados nas Figuras 1 e 2 exemplificam que um operador pode agir sobre um objeto, conjunto ou número (BEHR et al., 1992). Apresentamos outros registros, ainda utilizando o operador como metarregra, porém realizando a razão como **porcentagem**. Para ilustrar esse caso, podemos visualizar a instrução nas escritas dos professores Noreslei e Radival, conforme Quadro 3, problema 2.

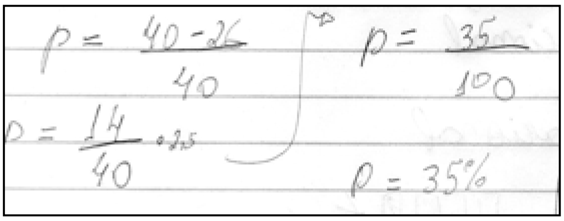
Quadro 3 – Problema 2 e realizações dos professores Noreslei e Radival

Problema 2	**Realização do professor Noreslei**
Dos 40 alunos de uma turma do ensino fundamental, 26 são do sexo feminino. Qual é o percentual dos alunos do sexo masculino?	portanto, devemos dividir 100 por 40 e o resultado multiplicar por 14. logo $\frac{14.100}{40} = 35\%$
	Realização do professor Radival
	$k = \frac{14}{40} = 0{,}35$, para estabelecermos o percentual basta multiplicarmos esse valor por 100, daí teremos 35%

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

No caso da porcentagem, o valor solicitado não é absoluto; logo, a instrução ou metarregra indica a divisão por 100 (como registrado pelo professor Noreslei no Quadro 3) ou a multiplicação por 100 (como registrado pelo professor Radival no Quadro 3). De acordo com Lamon (2006), a porcentagem é um tipo especial de razão, em que a segunda quantidade é sempre 100. A realização do professor Dario (Figura 3) é um exemplo explícito disso e a metarregra por ele utilizada consistiu em encontrar um número que, multiplicado por 40, chegasse a 100.

Figura 3 – Realização do professor Dario para o problema 2

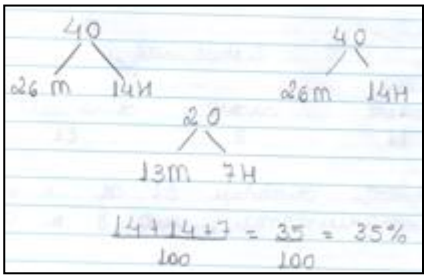


Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Em um dos encontros, ao explicar sua realização, esse professor esclareceu que a intenção foi multiplicar 14/40 por 2,5/2,5, embora não tivesse escrito isso. Nessa multiplicação, ele obteve uma razão cujo denominador é 100, encontrando o resultado em porcentagem.

As realizações dos professores Noreslei, Dario e Radival apresentaram em comum um operador em ação, indicando uma instrução, ou seja, uma metarregra. Radival explicitou a multiplicação por 100, ao passo que Noreslei e Dario o fizeram pelo valor (2,5), chegando, todos, ao total de 35 por cento. Contudo, a realização do professor Eric, Figura 4, ilustrou outra metarregra para encontrar o valor 2,5, sem recorrer a um operador. Para chegar ao valor 100, ele representou proporcionalmente dois grupos e meio de 40 pessoas, sendo 26 mulheres e 14 homens em cada um. Como o problema solicita saber a quantidade de homens, ele somou essa quantidade em dois grupos completos, mais a metade de outro. Dessa forma, obteve 35 homens de um total de 100 pessoas, o que pode ser representado por trinta e cinco por cento (35%).

Figura 4 – Realização do professor Eric para o problema 2



Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Esse professor realizou a razão como **quotização proporcional**, que difere da divisão por já ter o número total de elementos de cada grupo, sendo necessário, apenas, encontrar o número de grupos (CYRINO et al., 2014) - no caso, dois grupos e meio (2,5).

A última realização para a razão identificada foi a **taxa**, que pode ser apresentada conforme a explicação do professor Guilhermino: “[...] a relação entre duas grandezas é uma grandeza também [...]. Elas se envolvem no processo de determinação de uma outra grandeza [...]”. Para exemplificar essa narrativa, vamos citar a vazão, cujas grandezas são volume (m^3) dividido pelo tempo (h). Taxas são razões, mas a natureza das grandezas relacionadas não é necessariamente a mesma, conforme o referido professor ressaltou. Uma das grandezas pode variar em função do tempo (LAMON, 2006; NCTM, 2010), como é o caso da vazão.

O problema 3, apresentado no Quadro 4, ilustrou uma situação em que há vazão. A metarregra utilizada pelos professores Dario, Radival (Quadro 4) e Guilhermino (Figura 5) foi “vazão total= capacidade/tempo” e eles recorreram a equações para resolver o problema. A manipulação dos dados nas equações, no entanto, ocorreu de forma diferente: os dois primeiros professores (Quadro 4) somaram as vazões para, então, encontrarem a grandeza desconhecida - o tempo (representado pela letra x) que as duas torneiras levam para encher o tanque. Ainda assim, o que distinguiu a narrativa desses dois professores foi a forma de apresentar suas ações discursivas.

Quadro 4 – Problema 3 e as realizações dos professores Dario e Radival

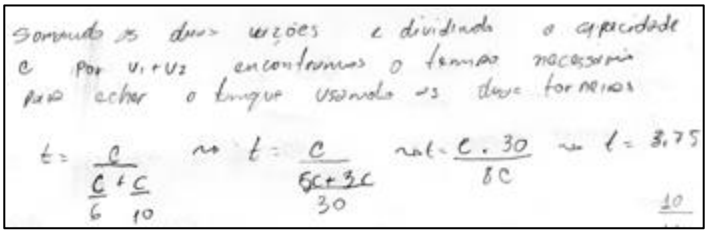
Problema 3	**Realização do professor Dario**	**Realização do professor Radival**
Uma torneira enche um tanque em 6h. Uma segunda torneira enche em 10h. As duas juntas enchem o tanque em quanto tempo?	02 $\frac{1}{10}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$ $(6+10)x=60$ $60x$ $16x=60$ $x=\frac{60}{16}$	as torneiras juntas enchem $\frac{4}{15}$ da caixa em uma hora, daí o tempo x gasto pelas duas será de $\frac{x}{1}.\frac{4}{15}=1.$ $4x=15 \rightarrow x=3{,}75horas$, ou seja, 3horas e 45 min

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

A incógnita x que apareceu no denominador (1/x), conforme o registro do professor Dario, foi assim anunciada porque igualou a soma das vazões à divisão da capacidade do tanque (1 tanque cheio) pelo tempo. Já o professor Radival multiplicou o tempo (x) pela vazão das duas torneiras juntas (4/15) e igualou a 1, por ser um tanque cheio.

O professor Guilhermino, de acordo com a narrativa apresentada na Figura 5, considerou a mesma metarregra que os professores Dario e Radival, porém escreveu: “tempo = capacidade/(vazão1 + vazão2)”.

Figura 5 – Registro do professor Guilhermino



Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Já o professor Jandresson, sem utilizar uma equação, recorreu a outra metarregra: "$\frac{6.10}{6+10} = \frac{60}{16} = 3{,}75h$ [...] o produto de dois termos dividido pela soma deles". Questionado pela professora sobre o surgimento dessa metarregra, ele respondeu: "De resolver questões... acho que usa média harmônica e aí, para não fazer todo aquele procedimento... [referindo-se ao que os professores anteriores fizeram, recorreu a fórmula]" (Narrativa produzida pelo professor Jandresson em 24/04/15).

A questão das torneiras (como é assim reconhecida), no entanto, nem sempre é resolvida com a aplicação da média harmônica, embora ela apareça "em problemas que envolvem velocidades, vazões, frequências e taxas" (HARIKI, 1996, p. 22). Dessa forma, é possível relacionar o Problema 3 com a média harmônica, mas a vazão total das torneiras não pode ser assim calculada, como afirmou o professor Jandresson.

A média harmônica (MH) pode ser escrita pela metarregra: MH=$\frac{2ab}{a+b}$ (HARIKI, 1996) ou ainda, $MH = 2.\frac{ab}{a+b}$. Observemos que $\frac{ab}{a+b}$ faz parte da narrativa escrita pelo professor Jandresson; talvez, por isso, ele tenha estabelecido relação com a MH. Quando o referido professor foi questionado pelo professor Claudinei sobre a relação de sua resposta com MH, ele não soube dizer. Segundo seu depoimento, esse procedimento é usado para "resolver questões". Ensinar a "resolver questões" é focar no 'como' realizações matemáticas podem ser desenvolvidas.

Para Sfard (2008), quando a escola foca no 'como' realizar narrativas, negligencia-se quase totalmente o 'quando' realizá-las. Esse exemplo reafirma a valorização do 'como' em detrimento de uma avaliação do desenvolvimento mais adequado (quando), podendo evitar equívocos, como o ocorrido, pois a metarregra utilizada pelo professor Jandresson não era MH.

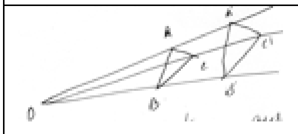
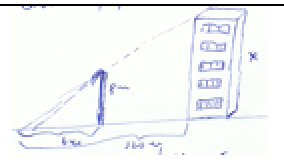
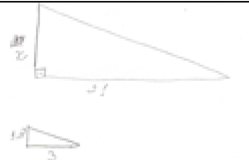
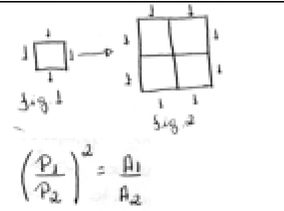
Diante do que foi exposto, a proporcionalidade realizada como razão pode ser comunicada como divisão e quotização proporcionais, escala, porcentagem e taxa. A regra de realização que fundamentou a razão foi uma relação de comparação multiplicativa entre grandezas, de mesma natureza ou não.

4.2 Proporcionalidade como igualdade entre razões

Proporcionalidade é a igualdade entre duas razões.
(Professor Agnaldo)

A narrativa do professor Agnaldo representa como a proporcionalidade era realizada pela maioria dos professores, quando na atividade disparadora foi solicitado: “Descreva uma situação ou problema relacionado com a noção de proporcionalidade”. No Quadro 5, é possível identificar algumas dessas realizações, comunicadas por diferentes metarregras.

Quadro 5 – Realizações do conceito de proporcionalidade na atividade disparadora

a) Realização do Professor Radival	b) Realização do Professor Noreslei	c) Realização do Professor Dario	d) Realização do Professor Eric
 $\frac{2}{3} = \frac{1{,}5}{B'A'}$	 $\frac{x}{120} = \frac{8}{6}$	 $\frac{x}{1{,}8} = \frac{21}{3}$	

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

A narrativa do professor Radival apresentou o seguinte enunciado: “Dadas as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ e o triângulo equilátero ABC de lado 1,5 u.c. [unidade de comprimento], determinar as medidas do triângulo A’B’C’ com AB//A’B’, BC//B’C’ e CA//C’A’, sabendo que $\acute{OB}$=2 e BB’=1”. A metarregra que descreveu sua ação discursiva está pautada pela proporção entre duas razões, descrita por ele próprio, em um de nossos encontros: “dá para descobrir o quarto lado, a quarta medida já que a gente conhece três. [...] Então, tem como a gente usar a <u>proporção</u>. O segundo triângulo é maior que o outro, sob determinada proporção, a qual seria a razão entre eles” (narrativa produzida pelo professor Radival em 20/03/15, grifo nosso).

Dado o enunciado da questão, o professor escreveu: “$\frac{2}{3} = \frac{1{,}5}{B\prime A\prime}$ [...] B’A’=$\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ u.c. Como A’B’C’ é equilátero, podemos afirmar que seus lados medem 2,25 u.c” (Narrativa produzida pelo professor Radival em 13/03/15). Ele justificou a igualdade entre duas razões pela semelhança de triângulos (regra de realização - os triângulos ABC e A’B’C’ são equiláteros, portanto, semelhantes). Dessa forma, existe uma igualdade entre as razões – proporção –, permitindo que se obtenha o valor procurado.

A semelhança de triângulos foi também o que fundamentou as metarregras utilizadas pelos professores Noreslei e Dario, já que todos os triângulos retângulos são semelhantes

(LIMA et al., 2006b), conforme pode ser observado no Quadro 5, nas realizações b) e c). Vejamos, no Quadro 6, a ação discursiva de cada um deles para explicar a metarregra utilizada, embora não tenham justificado seus usos pela regra de realização – semelhança de triângulos.

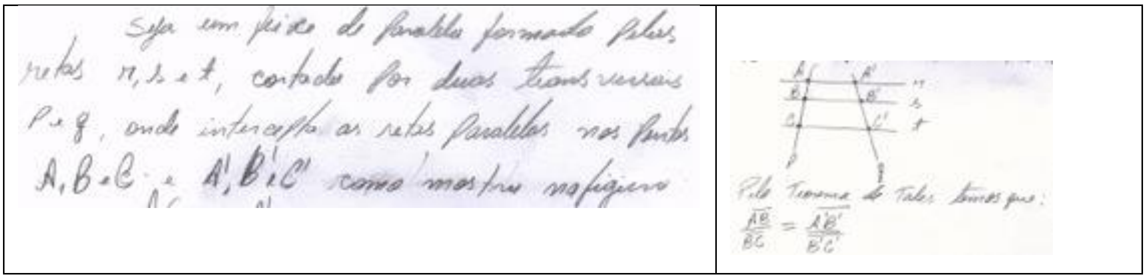
Quadro 6 - Registro dos professores Noreslei e Dario

Professor Noreslei	Professor Dario
Utilizando o princípio que diz que a tangente de um ângulo é a razão entre os catetos do triângulo formado, levando em conta que o ângulo de incidência dos raios é o mesmo, podemos estabelecer a proporção entre as razões formadas pela altura e comprimento da sombra do poste e a altura e comprimento da sombra do prédio. Portanto: $\frac{x}{120} = \frac{8}{6}$ [...] x=160 m. (Narrativa produzida pelo professor Noreslei em 13/03/15, grifos nossos).	A igualdade [...] foi possível porque existe uma proporção. Formando triângulos com as alturas e as sombras, seus lados são segmentos paralelos e podemos aplicar as ideias de Tales [referindo-se ao Teorema]". $\frac{x}{1,8} = \frac{21}{3}$ [...] x=12,6 m. (Narrativa produzida pelo professor Dario em 13/03/15, grifos nossos).

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

No caso do professor Noreslei, a metarregra foi justificada pelo emprego de uma razão trigonométrica - a tangente de um determinado ângulo (α). O professor Dario apenas sinalizou que poderia aplicar o teorema de Tales, sem explicar o porquê. O teorema de Tales tem, como uma de suas compreensões, a sustentação na semelhança de triângulos, pois segundo Eves (2011), há relatos de que Tales se baseou na semelhança de triângulos para encontrar a altura de uma pirâmide. Esse teorema pode ser comunicado da forma como foi realizado pelo professor Jandresson no primeiro encontro (13/03/15), segundo a Figura 06:

Figura 06 – Realização do professor Jandresson



Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Nas narrativas dos professores Radival, Dario e Noreslei grifamos a palavra **proporção**, porque ela foi quem estabeleceu vínculo com a igualdade entre duas razões, por isso os professores a usam em suas ações discursivas. Segundo o NCTM (2010, p. 33, tradução nossa): "Uma proporção é uma relação de igualdade entre duas razões. Em uma proporção, a razão de duas quantidades permanece constante quando os correspondentes valores das quantidades variam". Essa definição pode ser explicada nas palavras do professor Agnaldo: "[...] Representar a mesma quantidade de maneiras diferentes [...] é estabelecer a proporção [...]. Aumentar ou diminuir com o mesmo fator multiplicativo [...]”. A igualdade estabelecida possibilita compreender as razões como equivalentes.

O professor Eric também usou a proporção para caracterizar a igualdade entre duas razões, sem recorrer a triângulos (conforme Quadro 5, realização d): “Há uma relação entre o perímetro e a área da primeira figura com o perímetro e a área da segunda, e, dessa forma, temos uma igualdade de razões que caracteriza uma <u>proporção</u> $\left(\frac{P1}{P2}\right)^2 = \frac{A1}{A2}$” (Narrativa produzida pelo Professor Eric, em13/03/15, grifo nosso).

A metarregra usada pelo professor Eric se fundamentou na semelhança de figuras, pois apesar de não a ter explicitado, a igualdade apresentada por ele é verdadeira porque quadrados (figuras 1 e 2 nomeadas por ele) são sempre semelhantes.

Outra forma de realizar proporcionalidade como igualdade entre duas razões pode ser descrita pela metarregra conhecida como **regra de três**, porém, ao invés de respaldá-la na regra de realização de semelhança de figuras, vamos fundamentá-la conforme Lima e colaboradores (2006b, p. 4):

> Na regra de três têm-se uma proporcionalidade x ↦ y, consideram-se valores específicos x’ ↦ y’, x” ↦ y” da mesma, supõe-se que são conhecidos três dos números x’, y’, x”, y” e pede-se o quarto desses números [...]. Se conhecemos x’, x” e y’ podemos calcular y”=k.x” sem conhecer o fator de proporcionalidade k, usando a proporção $y'/y = x'/x$.

Encontrar o quarto número, sem identificar o fator de proporcionalidade, foi o que os professores Radival, Noreslei e Dario fizeram (Quadro 5, apresentado acima), assim como Eric, Agnaldo (Quadro 7) e Jandresson (Quadro 8). Vejamos as realizações dos professores, conforme Quadro 7.

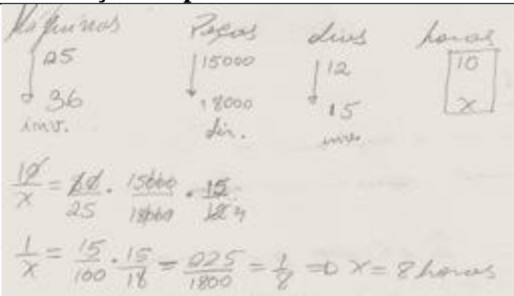
Quadro 7 – Realizações dos professores referentes aos problemas 1 e 2

Problema 1 – realização do professor Eric	Problema 2 – realização do professor Agnaldo
3 pães — 18 moedas $\frac{4}{3}$ pães — x $3x = \frac{4 \cdot 18}{3}$ $x = \frac{4 \cdot 18}{9}$ x = 8 moedas	$\frac{40}{26} \times \frac{100\%}{x} \Rightarrow 40x = 2600$ $x = \frac{2600}{40}$ $x = 65\%$ Logo, 35% dos alunos são do sexo masculino.

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Nos problemas 1 e 2 as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, diferentemente do problema 4 (Quadro 8) em que há relações direta e inversamente proporcionais, conforme as grandezas foram analisadas. A metarregra utilizada – regra de três -, pelos três professores, foi realizada conforme igualdade entre duas razões, sem a necessidade de identificar o fator de proporcionalidade ou proporção.

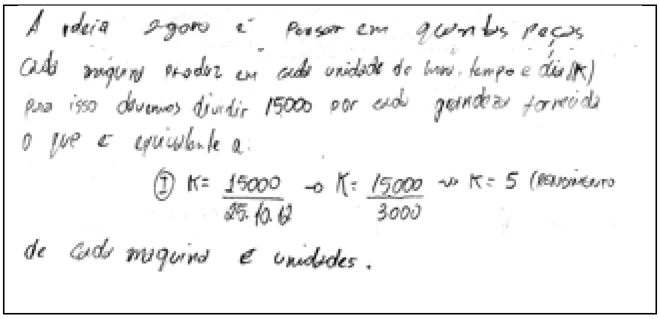
Quadro 8 – Problema 4 e realização do professor Jandresson

Problema 4	**Realização do professor Jandresson**
Em uma fábrica, 25 máquinas produzem 15.000 peças de automóvel em 12 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia, deverão trabalhar 30 máquinas para produzirem 18.000 peças em 15 dias?	

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Com relação ao quarto problema, em princípio, a realização do professor Guilhermino (Figuras 07 e 08, foi diferente da realização do professor Jandresson (Quadro 8). O professor Guilhermino primeiramente encontrou a proporção, ou seja, quanto cada máquina produzia por hora (redução à unidade – maquina por hora - chamado por ele de k, conforme Figura 07).

Figura 07 – realização do professor Guilhermino sobre o problema 4

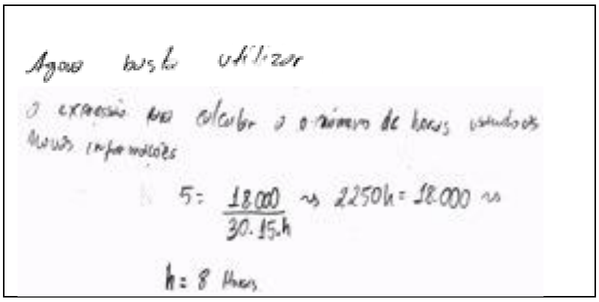


Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Ao igualar o valor de k à segunda razão, a realização veio complementar a regra de realização apresentada por Lima e colegas (2006b): Se conhecemos x’, x” e y’ podemos calcular y” usando a proporção x’/y’= x”/y” conhecendo ou não o fator de proporcionalidade (k).

Quando utilizaremos uma ou outra metarregra, dependerá da escolha do participante da comunicação. O professor Guilhermino substituiu a primeira razão da igualdade pelo valor de k, igualando-o a segunda razão (conforme Figura 08) para concluir a questão.

Figura 08 – finalização da realização do professor Guilhermino sobre o problema 4



Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Tendo em vista as realizações apresentadas neste cenário, podemos inferir que a proporcionalidade realizada como igualdade entre razões comunicou uma proporção, a qual pode ser fundamentada na semelhança de figuras, incluindo a semelhança de triângulos e o teorema de Tales, e descrita por metarregras - por exemplo, pela regra de três simples ou composta. Além disso, ela pode se constituir como realizações quando for a própria rotina.

4.3 Proporcionalidade como taxa de variação de uma função

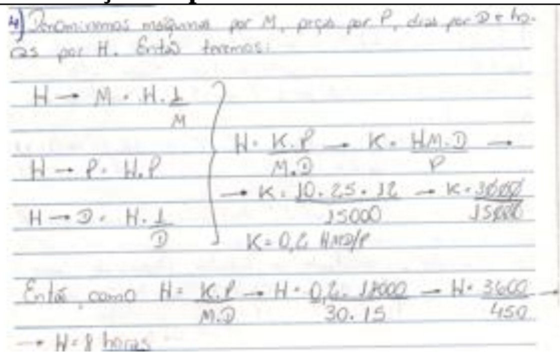
> Duas grandezas são proporcionais quando uma variação na primeira implica uma variação na segunda [...] (Professor Alan).

Na narrativa acima, há uma relação de proporcionalidade e essa relação pode vincular-se à função, porém não está explícito se nessa variação a relação é direta ou inversamente proporcional. Quanto à primeira relação - diretamente proporcional –, Lima e colaboradores (2006a, p. 93) explicam que “a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado *constante de proporcionalidade*), tal que y=ax para todo valor de x” (destaque do autor). Na segunda relação – inversamente proporcional –, os autores afirmam que “seu modelo matemático é uma função f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que f(cx) = $f(x)/c$ para c, x ∈ $\mathbb{R}^*$ quaisquer” (LIMA et al., 2006a, p. 93). O fator de proporcionalidade (LIMA et al., 2006a) ou a constante de proporcionalidade (LIMA et al., 2006b; NCTM, 2010), representadas aqui pelas letras *a* e *c*, é o que caracteriza a proporcionalidade, nem sempre explícita na situação-problema.

A realização desenvolvida pelo professor Noreslei para o problema 4, conforme mostra o Quadro 9, expressa a constante de proporcionalidade, representada em sua narrativa pela letra k. Além disso, trata-se de um exemplo de proporcionalidade relacionada com a

função de três variáveis (M - número de máquinas; D – número de dias; e P – número de peças) em função de H – número de horas. A primeira parte da metarregra consistiu em identificar os tipos de relações entre as grandezas, duas a duas, ou seja, se eram relações direta ou inversamente proporcionais.

Quadro 9 – Problema 4 e a realização do professor Noreslei

Problema 4	**Realização do professor Noreslei**
Em uma fábrica, 25 máquinas produzem 15.000 peças de automóvel em 12 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia, deverão trabalhar 30 máquinas para produzirem 18.000 peças em 15 dias?	 4) Denominamos máquina por M, peça por P, dias por D e horas por H. Então temos: $H \to M = H.\frac{1}{M}$ $H \to P = H.P$ $H \to D = H.\frac{1}{D}$ $H = \frac{K.P}{M.D} \to K = \frac{H.M.D}{P} \to K = \frac{10.25.12}{15000} \to K = \frac{3000}{15000}$ $K = 0,2\ HMD/P$ Então, como $H = \frac{K.P}{M.D} \to H = \frac{0,2.18000}{30.15} \to H = \frac{3600}{450} \to H = 8$ horas

Fonte: Dados selecionados do material produzido pelos participantes da pesquisa

Como podemos observar nas ações discursivas do professor Noreslei, uma grandeza é fixada - no caso, a hora- e, então, relacionada com as outras, duas a duas. Quando a relação é diretamente proporcional, como foi o caso da hora e do número de peças, ele modelou a função escrevendo: “H → P = H.P”; quando é inversamente proporcional (hora e número de máquinas e hora e número de dias), o professor fez o modelo a partir do seguinte registro: “H → M = H.$\frac{1}{M}$ e H → D = H.$\frac{1}{D}$”. Embora o uso da linguagem matemática não tenha sido realizado de forma apropriada, é possível compreender a intenção de seus registros e dar seguimento à análise de sua produção.

A segunda parte da metarregra consistiu em escrever uma lei de formação sabendo-se que o número de horas ocorre em função do número de máquinas, dias e peças produzidas. Todas essas variáveis estão relacionadas proporcionalmente com o que chamamos de **fator ou constante de proporcionalidade**. Embora H esteja escrito em todas as relações estabelecidas por ele, bastou colocá-lo uma vez na lei de formação: “H= $\frac{k.P}{M.D}$”, pois as variáveis estão em função de H. Compreendemos essa lei de formação como a que se refere a uma função do tipo $H: \Omega \to R$ tal que $(M, D, P) \longmapsto H(M, D, P) = kP/MD$, onde $\Omega \subset \mathbb{N} x \mathbb{R}^{+} x \mathbb{N}$.

Depois de encontrar o valor de k, ou seja, o fator de proporcionalidade, o professor passou para a terceira parte da metarregra, isto é, substituir, na lei de formação, os valores de k, das máquinas, das peças, dos dias para, então, encontrar o número de horas. Com base nesse exemplo, quando a relação é diretamente proporcional, a proporcionalidade pode ser realizada como função linear (em relação à variável 'número de peças'), e quando essa relação é inversamente proporcional, a proporcionalidade pode ser realizada como uma função não linear (em relação às variáveis 'máquinas e dias') do tipo f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = {}^{c}/_{x}$ para c, $x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer.

5 Considerações finais

> Proporcionalidade é um elo que une coisas que aparentemente são diferentes.
> (Professor Guilhermino)

A narrativa do professor Guilhermino, ao explicar o que é proporcionalidade, nos faz levar em consideração a palavra *elo* ou *relação*. Para que uma relação exista na proporcionalidade, são necessárias pelos menos duas grandezas, de mesma natureza ou não. Consideremos a seguinte situação: se uma jarra de suco é feita colocando-se 1 copo de suco concentrado e 4 copos de água, quantos copos de água serão necessários para fazer 10 jarras de suco com o mesmo sabor da primeira? Para realizar a situação, é preciso *relacionar* a quantidade de copos de água usada na primeira jarra para, então, fazer o cálculo para as 10 jarras.

Outra característica da proporcionalidade é que se trata de um conceito arraigado em uma diversidade de realizações, que talvez possa ser explicada pelas diferentes formas de relacionar as grandezas envolvidas e, por conseguinte, as realizações. Foi possível identificar o enraizamento do conceito de proporcionalidade por meio dos cenários. No primeiro, cuja rotina foi identificada como razão, as realizações descritas pelas metarregras relacionaram grandezas independentemente de suas naturezas. Nessa rotina, as quantidades podem aumentar ou diminuir, mas um valor (razão sob a qual as grandezas variarão) permanece para que a proporcionalidade seja mantida.

No segundo cenário, em que a rotina é identificada como igualdade entre razões, a proporção é uma relação fundamental entre as grandezas. Aqui, as rotinas poderiam ser descritas pelas metarregras, considerando-se ou não a proporção, cuja explicitação não é fundamental para que elas se efetivem. Ao contrário, no terceiro cenário, no qual a rotina é reconhecida como função, tem-se na proporção ou no fator de proporcionalidade sua essência, cuja metarregra é encontrá-la.

Diante da identificação de diferentes realizações para o conceito de proporcionalidade e tendo por objetivo construir uma matemática para o ensino desse conceito, a partir de um grupo com professores da educação básica, apresentamos o Quadro 3, que sintetiza esse modelo.

Quadro 10 – Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade conforme professores da educação básica

Proporcionalidade realizada como:	**Tem a rotina descrita por metarregras que comunicaram:**	**Tem a rotina sustentada:**
Razão	Divisão proporcional; Quotização proporcional; Escala; Porcentagem; Taxa.	pela relação multiplicativa entre grandezas de mesma natureza ou de natureza diferentes
Igualdade entre razões	Regra de três.	na proporção que pode ser explicada pela semelhança de figuras, especialmente de triângulos; Teorema de Tales; Razão trigonométrica;
Função	Fator de proporcionalidade	Pela regra de realização - função

Fonte: Elaboração própria

Devido à proporção, a regra de três pode ser justificada pela semelhança de figuras, para casos específicos como semelhança de triângulos ou teorema de Tales ou razão trigonométrica. Entretanto, se o professor não identificar esses vínculos e compartilhar com os alunos, o ensino estará focado no "como", recorrendo-se a procedimentos mecânicos, sem o estabelecimento de relações existentes e pertinentes. Ressaltamos que tal modelo é peculiar desse grupo de professores, em virtude do EC variar de acordo com os participantes, pois grupos diferentes podem gerar cenários, rotinas e metarregras distintas, segundo as realizações propostas para o conceito de proporcionalidade.

Assim, o modelo de matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, visto por realizações matemáticas, sugere que: a) a proporcionalidade realizada como razão foi comunicada como divisão e quotização proporcionais, escala porcentagem ou taxa; b) a proporcionalidade realizada pela igualdade entre razões foi comunicada como proporção por meio da regra de três e c) a proporcionalidade também pode ser comunicada como função.

São salutares as diferentes conexões entre proporcionalidade e aritmética, geometria e função, porém, dar oportunidade a um ensino que articule conexões é ainda mais fundamental. Apontar para essas e outras conexões, mesmo quando o conteúdo ensinado não for o de proporcionalidade – quando se trata de semelhança de figuras, por exemplo - é uma forma de possibilitar aos alunos construções entre conceitos que permitam à compreensão de uma visão mais integradora da matemática.

Agradecimentos

Agradecemos ao Colegiado do Programa PROFMAT, ao professor Claudinei de Camargo Sant'Ana e aos professores que participaram da disciplina MA-40: Agnaldo S. Santana; Alan de O. Novais; Dario S. Silva; Eric N. Silva; Guilhermino P. Teixeira; Jandresson D. Pires; Norislei A. do Nascimento e Radival da C. N. Junior, por proporcionarem a realização dessa pesquisa. Também somos gratos à Hellen C. Leite pela sugestão de trabalho com o PROFMAT; à Ana Paula Perovano; Catia Palmeira; Maria Rachel P. P. Pinto de Queiroz; Graça Luzia Dominguez; Victor A. Giraldo e Marcia C. de C. T. Cyrino pelos comentários à versão preliminar deste artigo.

Referências

BALL, D. L.; BASS, H. Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In: CMESG/GCEDM, 26, 2002, Kingston. **Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group/Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques.** Edmonton: CMESG/GCEDM, 2002. p. 3- 14.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**. v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEHR, M. J.; HAREL, G; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In GROWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning** . New York: Macmillan Publishing, 1992, cap. 14, p. 296 – 333.

BRASIL. Conselho Nacional de Saúde. Resolução n° 466, de 12 de dezembro de 2012. Aprova normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. Brasília: **Diário Oficial da União**, 2013.

COSTA JUNIOR, J. R. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade: contribuições da história da matemática**. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

COUTINHO, J. L. da E. **Matemática para o ensino do conceito de combinação simples**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

CYRINO, M. C. C. T.; GARCIA, T. M. R.; OLIVEIRA, L. M. P. de; ROCHA, M. R. da. **Formação de Professores em Comunidades de Prática**: frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, Publishing Association: Canada, v. 29, n. 3, p. 37- 43, 2009.

______. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**. v. 82, p. 245-265, 2013.

______. **The Math Teachers Know**: profound understanding of emergent mathematics. NY: Routledge, 2014.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293-319, mar. 2006.

DISESSA, A. A. Metarepresentation: Native Competence and Targets for Instruction. **Cognition and Instruction**, London, v. 22, n. 3, p. 293-331, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

GUERRA, F. U.; HERNÁNDEZ, C. G. Una praxeología matemática de escala en un texto universitario. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 279-293, 2014.

HARIKI, S. Média Harmônica. **Revista do Professor de Matemática**. RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, Nº 32, 3º quadrimestre, p. 17-24, 1996.

JOHNSON, B.; CHRISTENSEN, L. **Educational research***:* quantitative, qualitative, and mixed approaches. Thousand Oaks: Sage, 2012.

LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New Jersey e London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. 9. ed. RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006a.

______. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática. 2. ed. RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006b.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática. 4. ed. RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

MACEDO, R. S. **Etnopesquisa crítica, etnopesquisa-formação**. 2 ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2010.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP: Vol. 26, Nº 44, p. 1137-1150, 2012.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proporcional Reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. USA: NCTM, 2010.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 22, n. 34, p. 57-80, 2009.

RANGEL, L. G. *Teoria de Sistemas* – **Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo**. 2015. 275 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

RANGEL, L. G.; GIRALDO, V.; MACULAN F. N. Conhecimento de Matemática para o Ensino: Um Estudo Colaborativo sobre Números Racionais. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. Rio de Janeiro, v. 8, n. 2, p. 42-70, 2015. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer//index.php/JIEEM >. Acesso em jul. 2015.

SFARD, A. **Thinking as communicating**: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: University Press, 2008.

SILVA, E. A. **Pensamento Proporcional e regra de três**: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas. 2008. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Tuiuti do Paraná, Paraná, 2008.

TOWERS, J.; MARTIN, L. The emergence of a 'better' idea: preservice teachers' growing understanding of mathematics for teaching. **For the Learning of Mathematics**, Publishing Association: Canada, v. 29, n. 3, p. 44- 48, 2009.

Texto recebido: 07/04/2016
Texto aprovado: 17/09/2017