ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p315-333

Uma discussão sobre legitimidades matemáticas utilizando o contexto dos números irracionais

A discussion about mathematical legitimacies using the irrational numbers context

REJANE SIQUEIRA JULIO[1]
GUILHERME FRANCISCO FERREIRA[2]
ROMULO CAMPOS LINS[3]

Resumo

Este artigo tem o objetivo de discutir legitimidades matemáticas para responder a certos questionamentos sobre a "matemática do professor de matemática" ser considerada um modo de pensar a matemática na formação de professores. Para isso, abordamos as noções de matemática do professor de matemática, matemática do matemático e atividade matemática, na ótica do Modelo dos Campos Semânticos, por meio de comentários hipotéticos sobre a realização de uma proposta de atividade, de cunho histórico, envolvendo os números irracionais. Para concluir, argumentamos sobre a caracterização de atividade matemática ser uma possibilidade de compreender o compartilhamento de legitimidades entre a matemática praticada pelos professores de matemática e a matemática praticada por matemáticos.

Palavras-chave: *Atividade Matemática, Matemática do Professor de Matemática, Modelo dos Campos Semânticos.*

Abstract

This paper aims to discuss mathematical legitimacies as an answer to some questions about "mathematics of the mathematics teacher" as a way to think the mathematics in the mathematics teacher education. In this discussion, we approach the notions of mathematics of the mathematics teacher, mathematics of the mathematician and mathematical activity according to the Model of Semantics Fields, through hypothetical comments about the realization of a task, based on history of mathematics, involving irrational numbers. In conclusion, we argue about the possibility to consider the characterization of mathematical activity as a way of understanding the sharing of legitimacies between mathematics practiced by mathematics teachers and mathematics practiced by mathematicians.

Keywords: *Mathematical Activity, Mathematics of the Mathematics Teacher, Model of Semantic Fields.*

[1] Doutora em Educação pela UNICAMP, docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação da UNIFAL-MG, e-mail: rejane.julio@unifal-mg.edu.br.
[2] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP/Rio Claro, e-mail: guilhermefrancisco7ferreira@gmail.com.
[3] Foi docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UNESP/Rio Claro, faleceu no dia 17 de agosto de 2017.

Introdução

Hoje em dia, ainda é recorrente ouvirmos que o ensino de matemática na Educação Básica é falho porque os professores de matemática não sabem matemática. Uma solução para esse problema se encontra na crença de que os professores em formação inicial ou continuada devam saber muita matemática, e sabê-la bem, para depois recontextualizá-la, transpô-la ou adaptá-la para o contexto educacional. No entanto, isso tem sido questionado, porque nem sempre saber muita matemática é garantia de saber ensiná-la. A pesquisa de Linardi (2006), por exemplo, nos mostrou que a matemática do matemático, como abordaremos adiante, não participa da organização da prática de um professor de matemática, mesmo que ele consiga tratar dessa matemática, quando requisitado.

Desse questionamento surge a ideia de aprender matemática ao mesmo tempo em que se aprende a ensiná-la, o que também levanta outras questões, como: qual matemática os professores precisam aprender para que tenham um desenvolvimento matemático adequado?

Em Santos e Lins (2016), foram abordados cinco modos de pensar a(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática que contribuem para discutir o último questionamento, sendo uma das respostas a matemática do professor de matemática, que assumimos nas pesquisas que realizamos.

Caracterizamos a matemática do professor de matemática, baseados em Lins (2004b), por nela serem aceitos modos de produção de significados que não sejam somente os da matemática do matemático, mas os da matemática da rua, da matemática da escola, dentre outras matemáticas e outros modos que não ficam restritos somente às matemáticas.

Quando falamos em produção de significados, remetemos a tudo o que se pode e efetivamente se fala de algo em uma atividade. Esta noção faz parte do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), criado por Romulo Campos Lins (LINS, 1999; 2012), que é um modelo epistemológico que nos permite ler e discutir produções de significados em diferentes atividades.

A matemática do matemático, como caracterizamos neste artigo, é uma noção criada por Lins (2004a, 2004b). Ela é vista como a matemática praticada pelos matemáticos quando eles dizem que estão fazendo matemática. Esta autoridade do dizer não decorre de uma vontade particular de um matemático, mas de uma comunidade ou instituição, marcada pela profissionalização e demarcação da matemática, que aceita certos modos de produção de significados para ela.

Um modo de ver a matemática do professor de matemática tem gerado algumas leituras na direção de uma inferiorização da importância da matemática do matemático na formação e na prática docente, uma vez que a consideram como uma parte da matemática do professor de matemática, que legitima tantas outras matemáticas. A pesquisa de Silva (2003) foi exemplar em mostrar que a matemática do matemático é um meio pelo qual se pode discutir diferentes modos de produção de significados na formação de professores, e por isso ela não deixa de ter importância para o professor de matemática.

Mas ocorrem, também, leituras na direção de uma supervalorização da matemática do matemático. A caracterização de matemática do professor de matemática está inserida em um projeto de formação e desenvolvimento de professores pautado em uma educação matemática que lide com situações de salas de aula que podem ser compartilhadas com os alunos. Ou seja, ao invés de formar dentro das categorias da matemática do matemático para depois ter que se dedicar ao que pode ser chamado de recontextualização, transposição ou adaptação delas, o professor seria formado a partir dessas situações, de modo que a recontextualização aconteça do natural para o não natural (matemático), como possibilidade de ampliação de repertório de modos de produção de significados (LINS, 2006; OLIVEIRA, 2011). Esse natural para o não-natural (matemático) tem sido lido como uma postura de legitimar a matemática do matemático em detrimento de outras ou de outros modos de produção de significado, dentre eles alguns modos considerados legítimos matematicamente.

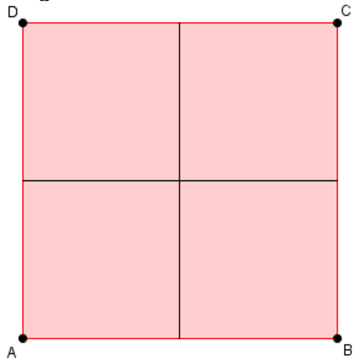
Neste artigo, propomos discutir essas leituras de exclusão de certos modos de produção de significado que alguns podem considerar como modos matemáticos, no contexto do Modelo dos Campos Semânticos, por meio da diferenciação entre as noções de matemática do professor de matemática, de matemática do matemático e de atividade matemática, com base nas pesquisas que realizamos. Essa diferenciação é feita utilizando uma proposta de atividade de cunho histórico relacionada aos números irracionais e discussões hipotéticas sobre ela em salas de aula. Ela se apresenta como possibilidade, também, de contribuição para pensarmos a matemática do professor de matemática em salas de aula como uma forma de imersão e participação em diferentes culturas (FERREIRA, 2016), sejam elas matemáticas ou não.

Uma proposta de atividade envolvendo números irracionais

A atividade que propomos se baseia na apresentação de Platão (2010) de uma conversa entre Sócrates e Mênon sobre a natureza do conhecimento, na qual Sócrates leva um escravo de Mênon, por meio de um diálogo envolvendo perguntas e respostas, a rememorar (descobrir)[4] a solução do problema de encontrar o lado de um quadrado cuja área é o dobro da área de um dado quadrado.

O diálogo se inicia com Sócrates desenhando um quadrado (Figura 1) e questionando o escravo sobre a medida da área dele se o lado for 2. O escravo responde 4.

Figura 1 - Quadrado de lado 2.

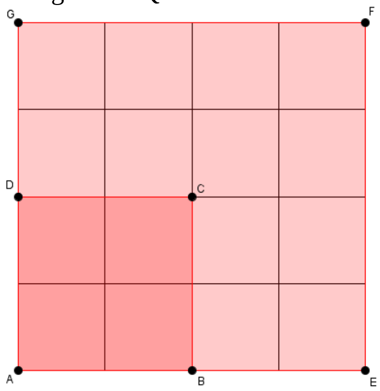


Fonte: Construção feita pelos autores.

Em seguida, Sócrates pergunta ao escravo se pode existir um quadrado que tenha o dobro da área do que ele propôs. O escravo responde que sim, e Sócrates o questiona sobre qual é a medida do lado desse quadrado de área 8. O escravo responde que é o dobro do lado do quadrado de área 4. Na continuação do diálogo, o escravo vê que o lado do quadrado não pode ser 4, porque, com esta medida, a área do quadrado seria 16, e não 8 (Figura 2). Como a medida do lado do quadrado de área 8 está entre as medidas dos quadrados de lado 2 e de lado 4, o escravo sugere 3 como medida do lado do quadrado de área 8 (Figura 3). Novamente, esta medida não satisfaz o problema proposto ao escravo, por dar uma área maior do que 8.

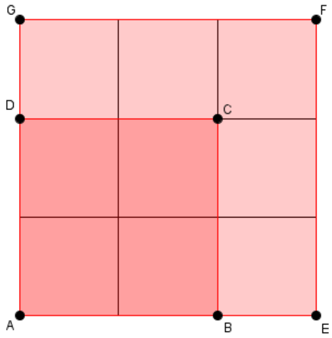
[4] Não é nosso objetivo, neste artigo, discutir a concepção de conhecimento em Platão ou no MCS. Em relação à primeira, é interessante consultar bibliografias relacionadas à filosofia da matemática ou filosofia da educação matemática. Sobre o modo de ver conhecimento no MCS, há diversas pesquisas e artigos abordando esta noção, como, por exemplo, Lins (2004b), Silva (2003), Julio (2007), Oliveira (2012) e Santos e Lins (2016).

Figura 2 - Quadrado de lado 4.



Fonte: Construção feita pelos autores.

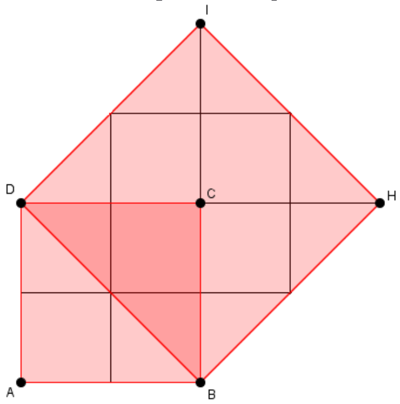
Figura 3 - Quadrado de lado 3.



Fonte: Construção feita pelos autores.

O escravo não sabe dizer qual deve ser, então, o lado do quadrado cuja área seja 8. Diante dessa situação, Sócrates usa o quadrado da Figura 2, que contém o quadrado ABCD, traça a diagonal BD nele, tal como na figura abaixo (Figura 4), e constrói o quadrado DBHI:

Figura 4 - Quadrado construído a partir dos quadrados de lado 2 e de lado 4.



Fonte: Construção feita pelos autores.

Com essa construção, Sócrates contribui para que o escravo veja que a área do quadrado DBHI é 8, pois a área do quadrado ABCD é igual a 4 e a área do quadrado DBHI é igual a 4 vezes a metade da área do quadrado ABCD, ou seja, 2 vezes a área do quadrado ABCD.

Baseado nesse diálogo de Sócrates com um escravo de Mênon, nossa proposta de atividade propõe apresentar aos alunos uma investigação parecida com a que ocorreu no diálogo de Sócrates com o escravo, em outras palavras, a realização de construções geométricas[5] e de investigações numéricas para a solução do problema de encontrar o lado de um quadrado que tem o dobro de área de um quadrado de lado 1.

[5] Como a medida do lado de um quadrado de área 8 é um número irracional, não considerado número na época de Platão, os gregos contornavam problemas envolvendo irracionais por meio de construções geométricas ao invés de exibir um número, que não era legítimo, não existia, para eles.

Talvez alguns alunos digam que a medida do lado (l) do quadrado seja 2, ou seja, o dobro do quadrado de lado 1[6], recaindo no mesmo problema que o do escravo de Mênon. A partir disso, destacaríamos que a medida do lado do quadrado em questão está entre 1 e 2. Sendo a área dele dada pelo produto de seus lados ($l.l=l^2$), logo $l^2=2$. Com esses dados, o objetivo é que os alunos façam aproximações, com o auxílio de uma calculadora, para o lado l do quadrado, de forma que l^2 se aproxime de 2, introduzindo a ideia de $\sqrt{2}$.

Os alunos, então, devem buscar valores que, elevados ao quadrado, resultem em 2 por meio de aproximações, podendo pensar do seguinte modo: o número 2 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, uma vez que $1^2=1$ e $2^2=4$.

Estipulando valores para l, eles podem obter, por exemplo: $(1{,}1)^2=1{,}21<2$; $(1{,}2)^2=1{,}44<2$; $(1{,}3)^2=1{,}69<2$; $(1{,}4)^2=1{,}96<2$; $(1{,}5)^2=2{,}25>2$.

Como o número 2 está entre os quadrados de 1,4 e 1,5, os alunos poderiam testar outras aproximações, aumentando as casas decimais dos números: $(1{,}41)^2=1{,}9881<2$; $(1{,}42)^2=2{,}0164>2$; observando, assim, que o número 2 está entre os quadrados de 1,41 e 1,42. Deste modo, aumentando ainda mais as casas decimais, os alunos poderiam obter: $(1{,}411)^2=1{,}990921<2$; $(1{,}412)^2=1{,}993744<2$; $(1{,}413)^2=1{,}996569<2$; $(1{,}414)^2=1{,}999396<2$; $(1{,}415)^2=2{,}002225>2$.

Destas novas aproximações, os alunos podem ver que 2 está entre os quadrados de 1,414 e 1,415. Repetindo este processo pelo menos dez vezes, eles podem observar que o valor que, elevado ao quadrado, resulta em dois é, aproximadamente, 1,4142135623...

O objetivo não é fazer este processo tantas vezes em sala de aula, mas usá-lo como recurso para que os alunos percebam que podem fazer várias aproximações, observando que não há periodicidade nas aproximações do valor de $\sqrt{2}$, ou seja, que este número não pode ser expresso por um número racional na forma m/n, com m e n inteiros.

Com essa proposta de atividade, queremos oferecer subsídios para pensar sobre que matemática se produz em salas de aula, a partir de casos particulares de irracionais que poderão ser ampliados em outro momento. Defendemos que o modo como pensamos não é coerente com o modo de produção da matemática do matemático, no entanto, ele é legítimo matematicamente tanto para um matemático quanto para um professor de matemática, como veremos adiante.

---

[6] Alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, de fato, já fizeram a afirmação que hipotetizamos aqui no desenvolvimento de uma atividade envolvendo o mesmo problema que propomos, mas que teve um encaminhamento diferente do que fizemos neste artigo.

Os números irracionais e a matemática do matemático

Medir é algo recorrente em nossas vidas, nesse sentido, o como medir e o que usar como medida (ou unidade de medida) vêm sendo discutidos historicamente, de acordo com as necessidades humanas. Na atividade que propomos, os alunos não precisam medir um segmento ou área para finalidades práticas do dia a dia, como, por exemplo, medir o comprimento e a largura de um sofá para ver se ele caberá em uma sala. Mas propomos uma atividade, relacionada à história da matemática, que envolve questões de medida.

Na atividade, pretendemos que os alunos vejam que o lado do quadrado em discussão deve ser um número entre 1 e 2.

Com a impossibilidade de um número natural ser uma unidade de medida para todo tipo de segmento, essa unidade de medida passou a ser pensada em razões ou frações da forma m/n, com m e n naturais e n diferente de zero, isto é, em termos de números racionais que abarcam os naturais. Assim, para medir o comprimento de um segmento AB, a unidade de medida passou a ser pensada como $\frac{m}{n} \times \mathrm{CD}$, cujo produto vira referência para medir AB; em outras palavras, $\mathrm{AB} = \frac{m}{n}\mathrm{CD}$.

Essa ampliação de entendimento sobre medida ainda não resolve o problema de encontrar o lado de um quadrado que tenha o dobro de área de um quadrado de área 1, porque, ao usarem diferentes números racionais para o lado l do quadrado, de forma que l^2 se aproxime de 2, os alunos podem ver que as aproximações obtidas não possuem uma periodicidade, a fim de poderem escrever esses números na forma m/n.

Uma possibilidade para encontrar o lado do quadrado que tem área 2 seria usar o teorema de Pitágoras na Figura 4, adaptada para as medidas da atividade proposta aos alunos, ou seja, calcular a medida da diagonal BD do quadrado $ABCD$, que também é a medida do lado do quadrado de área 2.

Pelo teorema de Pitágoras, $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \mathrm{BD}^2 = 2$. Desta relação, também obtemos que $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}^2 = 2\mathrm{AD}^2$. Comparando esta igualdade com a igualdade $\mathrm{AB} = \frac{m}{n}\mathrm{CD}$, fazendo $BD=AB$ e $AD=CD$, obtemos $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Esse é um fato embaraçoso, porque chegamos a uma equação na qual não existem inteiros m e n, tais que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Estaria o teorema de Pitágoras equivocado? Estaria a equação $\mathrm{AB} = \frac{m}{n}\mathrm{CD}$ equivocada?[7]

Concordar com esses dois equívocos seria destruir todo um aparato conceitual importante para a matemática. Uma solução encontrada foi apresentar construções geométricas ao invés de exibir uma medida que não fosse considerada número, como fizeram os gregos. Outra solução foi construir um conjunto numérico, no caso, o conjunto dos números reais, que seja completo no sentido de fornecer unidades de medida com as quais podemos medir quaisquer segmentos.

Na Educação Básica, a definição dos reais é colocada como a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Essa afirmação parece tão natural que questioná-la e se direcionar para a construção matemática formalizada do conjunto dos números reais parece ser “chover no molhado”. Mas o fato é que a construção formal dos reais é algo que data do século XIX, num processo de profissionalização do matemático e de preocupação com os fundamentos da matemática, em especial do conjunto dos números reais, motivados pelo desenvolvimento da Análise Matemática.

Esse processo de profissionalização do matemático e de busca por fundamentos para a matemática culminou no que caracterizamos por matemática do matemático, que legitima certos modos de produção de significados para a matemática e, consequentemente, não legitima outros.

A legitimidade de certos modos de produção de significados não é dada por um indivíduo particular ou por critérios lógicos ou empíricos, mas pelo compartilhamento de interlocutores, sendo que interlocutor, para o MCS, “é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo” (LINS, 2012, p. 19). Um exemplo de compartilhamento de interlocutores é a existência de uma instituição cultural como a dos matemáticos profissionais, que passou a demarcar a matemática em termos de quem pode falar dela e os requisitos para isso.

Não encontramos, por exemplo, um teorema de construção dos números irracionais na pesquisa que efetuamos em textos matemáticos. Em geral, é feita a construção dos racionais a partir do conjunto dos números naturais e, depois, a construção do conjunto

---

[7] Os questionamentos foram inspirados na exposição de Caraça (1951) sobre os números reais.

dos números reais usando cortes de Dedekind ou classes de equivalência de sequências de Cauchy dos números racionais[8].

A construção do conjunto dos números reais é feita a partir de uma ampliação dos racionais, na qual se define o conjunto dos números irracionais como o conjunto que "sobra" nesta construção, ou seja, como o complementar do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais. Este processo é diferente do feito, comumente, nos livros didáticos da Educação Básica, em que é apresentado, primeiramente, o conjunto dos números racionais, em seguida alguns elementos do conjunto dos números irracionais e somente depois o conjunto dos números reais, como a união dos dois primeiros[9].

Não que não se possa falar em irracionais como os livros didáticos fazem ou que o que eles fazem esteja errado matematicamente; mais adiante discutiremos esse modo de falar. O importante a diferenciar aqui é que, do ponto de vista de nossa caracterização da matemática do matemático, a construção dos irracionais não é feita antes da construção dos reais.

Em Hefez (1993), por exemplo, a construção dos reais se baseia no uso de sequências de números racionais. Aqui, apresentamos uma ideia do que ele fez, discutindo os requisitos para se falar de matemática, do ponto de vista da matemática do matemático[10]. Para isso vamos, inicialmente, supor a existência do corpo[11] dos racionais (Q) e do conjunto dos números naturais (N). Em seguida, definimos uma sequência **a** em Q, como uma função **a**: $N \rightarrow Q$, denotada por a(n)=a_n. Ela é de Cauchy em Q se o valor absoluto da diferença entre os termos da sequência tender a zero à medida que os índices aumentam, o que pode ser expresso por: dado $j \in N$, $\exists n_0 \in N$, tal que $|a_m - a_n| < \frac{1}{j}$, para quaisquer $m, n > n_0$.

Um primeiro aspecto a ressaltar é o caráter definicional da matemática do matemático: "assim que as coisas são definidas, é o que elas *são e serão até nova ordem*" (LINS,

---

[8] Isso é falado, por exemplo, na Introdução de Augusto Franco de Oliveira da tradução portuguesa de "Continuidade e Números Irracionais", escrito por Richard Dedekind (OLIVEIRA, 1999) ou em Hefez (1993)

[9] A pesquisa de Pommer (2012) faz uma leitura do modo como os números irracionais são abordados em alguns livros didáticos.

[10] No Apêndice apresentamos uma ideia adaptada da construção do conjunto dos números reais, baseados em Hefez (1993) – que faz a construção detalhada dos números racionais (Q) e dos números reais (R). Apresentamos, também, um modo de falar de raiz quadrada do número dois.

[11] Um corpo é uma estrutura matemática envolvendo um conjunto e duas operações (adição e multiplicação) que satisfazem certas propriedades.

2004b, p. 14, grifo do autor), marcando um controle sobre o que as coisas são ou não são. Para continuar a construção dos reais, necessitamos de mais definições ainda.

Além de definicional, a matemática do matemático é internalista, ou seja, "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição corresponde bem ou não a algo *fora* da própria Matemática" (LINS, 2004a, p. 95, grifo do autor). Essa discussão pode ocorrer quando o objeto definido ajuda a resolver problemas postos ou se o objeto ajuda a abrir novas áreas de estudo, mas, no caso de construir o conjunto dos números reais, não importa se uma sequência particular resolve um problema em outras áreas ou se ela tem um uso fora da matemática. O modo como usamos sequências tem um motivo específico: continuar a construção do conjunto dos números reais.

Na construção dos números reais, Hefez (1993) não apresenta exemplos particulares de números irracionais, como o $\sqrt{2}$. O número $\sqrt{2}$ é conhecido historicamente como um irracional e, talvez por isso, o autor não apresenta uma demonstração de que ele não pode ser escrito como m/n, com m e n inteiros.

O fato de essa exemplificação ser desnecessária para o matemático indica que não importa identificar irracionais para construir os reais, denotando o caráter simbólico da matemática do matemático, ou seja, "os objetos são conhecidos não no que eles *são*, mas apenas em suas *propriedades*, *no que deles se pode dizer*" (LINS, 2004a, p. 96, grifo do autor). Não é preciso identificar quem são os reais. É importante apenas saber que, ao definir as operações usuais de soma e multiplicação em um conjunto de sequências de Cauchy, podemos identificá-las a um conjunto chamado de números reais, como pode ser visto no Apêndice deste artigo. Em Hefez (1993), sequer é importante falar em reais, pois ele faz uma construção mais geral ainda, usando um corpo qualquer.

Por mais que tenhamos usado o conjunto dos números reais como exemplo de um conteúdo particular para abordar nossa caracterização de matemática do matemático, ressaltamos que o foco dela não está em descrever conteúdos (ou objetos) específicos, porque ela os constitui. O foco está em legitimar ou não o modo como significados são produzidos para a matemática, ou seja, para falar de matemática do matemático é necessário que se levem em consideração seus aspectos definicional, internalista e simbólico, considerando, ainda, que é necessária a legitimação pela comunidade de matemáticos para que algo seja considerado matemática do matemático.

Essa nossa caracterização pode gerar dúvidas se a atividade que propomos é uma atividade considerada matemática ou se estamos dizendo que o que o professor faz em salas de aula não é matemática do matemático ou não é legítimo matematicamente. Para responder a essas dúvidas, é importante diferenciarmos matemática do matemático de atividade matemática.

Marcando diferenças entre Atividade Matemática e Matemática do Matemático

Antes da construção apresentada para os reais e com a caracterização de matemática do matemático por aspectos que a estruturam, como internalista, definicional e simbólico, podemos questionar se os matemáticos ficavam tentando encontrar irracionais, se faziam conjecturas sobre os conjuntos que abordamos, se testavam suas definições para ver se o que eles estavam falando era plausível ou não, se usavam os reais de forma não fundamentada em sequências de Cauchy ou em cortes de Dedekind, se aplicavam argumentos para casos específicos de números particulares que depois poderiam ser generalizados, entre outras ações. A resposta é sim.

> No entanto, esse processo de: elaboração de conjecturas; fazer uma abordagem prática para em seguida passar para uma abordagem abstrata; associações entre conteúdos de modo a ajudar na elaboração do conteúdo que se pretende tratar; verificação de resultados; apresentação de exemplos particulares, práticos ou numéricos antes ou depois de uma definição e que, muitas vezes, está relacionada com uma intenção didática é que caracterizamos como sendo uma "atividade matemática".
> A "atividade matemática" é algo que pode ou não ocorrer no "Jardim do matemático", que é "onde os matemáticos estão praticando a sua matemática" (LINS, 2004a, p. 95). No entanto, no momento que os matemáticos definem ou formalizam o conteúdo que querem tratar, eles passam a transitar exclusivamente no "Jardim do matemático" (JULIO, 2007, p. 24).

Um exemplo de atividade matemática pode ser lido no livro escrito pelo matemático Ivan Morton Niven (NIVEN, 1984), no qual ele definiu o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais, do mesmo modo como pode ser encontrado em livros didáticos da Educação Básica. Ele também definiu os reais como a união dos números algébricos com os números transcendentes[12], afirmando, ainda, que os reais podem ser abordados em vários níveis de rigor.

Mesmo que possua semelhanças com o que é feito na Educação Básica, Niven (1984) fez uma abordagem um pouco diferente. Depois de falar dos racionais, ele já passou para

---

[12] Os números algébricos, para Niven (1984), são números que são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros, enquanto os números transcendentes são todos os demais números que não satisfazem as equações algébricas. Niven (1984) ressalta que alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, mas todos os números transcendentes são irracionais. Neste texto não abordaremos os números algébricos e transcendentes.

os reais, colocando em correspondência cada real com um ponto da reta numérica, chamada de reta real, e dizendo que os racionais formam um subconjunto dos reais e que existem números reais que não são racionais. Ele definiu esses números como números que não podem ser expressos pela razão *m/n* de dois inteiros ou que não possuem uma representação decimal periódica[13], assemelhando-se a nossa proposta de atividade, na qual os alunos fariam aproximações de $\sqrt{2}$ e veriam que este número não pode ser escrito como um número racional, por não possuir uma periodicidade.

Só depois de abordar os reais, Niven (1984) falou de forma mais específica dos irracionais, enunciando o não fechamento do conjunto dos irracionais em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão[14], e prosseguiu o tratamento aos irracionais por meio de processos que classificam um grande conjunto de números como números irracionais[15].

O modo como Niven (1984) lidou com os números irracionais, na nossa leitura, se dá pela suposição da reta numérica e da utilização de sequências de Cauchy, por usar os termos sequência e convergência. Isso pode ser visto quando ele considera um número irracional q = 0,101 001 000 100 001 000 001 000 000... como um ponto da reta real para o qual converge a seguinte sequência de números: 0,1; 0,101; 0,101 001; 0,101 001 000 1; 0,101 001 000 100 001;...

Niven (1984) não fez uma abordagem como a de Hefez (1993), mas também isso não significa que a abordagem dele não seja matemática ou não seja legítima para os matemáticos. Para ele, como um matemático, é legítimo falar do modo como falou, e veremos as justificações que ele nos forneceu para falar daquele modo. No entanto, acreditamos que ele não falaria daquele modo se estivesse produzindo matemática e fosse divulgar esse trabalho para a comunidade dos matemáticos.

---

[13] Ainda que tenha uma abordagem diferente da dos livros didáticos, o modo de falar de irracionais é semelhante ao modo como os livros didáticos fazem.

[14] "Não fechamento" significa que nem sempre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre irracionais darão um número irracional. Por exemplo, $\pi-\pi=0$, o que significa que a subtração do número irracional π por ele mesmo é o número racional zero.

[15] Niven (1984) enunciou processos para classificar irracionais. Um exemplo é o teorema: seja c um irracional e r um racional, c+r, c–r, c.r e c:r são irracionais. Como uma infinidade de racionais r pode ser usada em cada afirmação do teorema, podemos produzir uma infinidade de números irracionais. Além do mais, qualquer número específico produzido pode ser usado como um novo irracional c no teorema e gerar, novamente, uma infinidade de irracionais. Outros métodos apresentados são: resolução de equações algébricas para demonstrar a irracionalidade de certas raízes dessas equações e métodos para demonstrar a irracionalidade de uma infinidade de números trigonométricos, tais como cos 20º e sem 10º, e de números logarítmicos, como log 2 e log 21.

No livro escrito por Niven (1984) há, inclusive, uma discussão sobre o uso da palavra "irracional" que está mais voltada para a atividade matemática do que para a matemática do matemático do modo como as caracterizamos.

> Na linguagem do dia a dia, ao dizermos que algo é "irracional", queremos, em geral, dizer que este algo é desprovido de bom senso, sendo, portanto, contrário à razão. Mas, é claro que não consideramos números irracionais como contrários à razão. Aparentemente, os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais porque eles pensavam que, dados dois segmentos quaisquer, como o lado e a diagonal de um quadrado, existiriam sempre inteiros a e b tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse a/b. O significado matemático da palavra "racional" se refere à razão de números inteiros e "irracional" se refere à ausência de uma tal razão (NIVEN, 1984, p. 70).

Niven (1984) disse que não fez uma abordagem rigorosa dos reais. Ele transita no que caracterizamos por atividade matemática. Para ele, rigor é "um termo técnico usado em Matemática para indicar o cuidado lógico no desenvolvimento de um tópico, em contraste com uma posição mais intuitiva, onde afirmações são aceitas como corretas por parecerem razoáveis ou evidentes" (NIVEN, 1984, p. 7). Niven (1984) classificou sua abordagem como intuitiva, sem oferecer axiomas ou postulados como base para o estudo, apresentando pontos de vista descritivos que deixam algumas questões sem resposta, como, por exemplo: "como sabemos que $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$?".

> Para responder tais questões, é necessário que seja dada uma definição precisa das operações com números reais. Isto não será feito aqui, porque não é tão simples como possa parecer e é melhor adiar este tipo de tratamento até que o estudante não só tenha maior habilidade matemática, mas também possa apreciar melhor a natureza e o significado de uma demonstração matemática. Como disse o matemático americano E. H. Moore: "sufficient unto the day is the rigor thereof" (este rigor é suficiente para hoje) (NIVEN, 1984, p. 8).

Ele deseja familiarizar os leitores com noções e métodos de demonstração relacionados aos números reais, na esperança de os leitores reconhecerem demonstrações válidas e encontrarem prazer em construir algumas por conta própria. O livro conversa com um leitor iniciante. Não é um matemático falando com outro matemático ou fazendo uma abordagem sistemática para a formação de matemáticos, mas é um matemático falando com pessoas que se interessam por matemática e que podem, futuramente, ser matemáticos.

Falar em reais como a união dos racionais com os irracionais, como é feito na escola, não exclui a legitimidade que isso tem para um matemático. A diferença que estamos abordando é uma diferença de direção da fala, ou seja, dos interlocutores que constituímos em determinadas atividades, com determinados objetivos.

Para qual direção um matemático fala quando ele fala de matemática? Qual é esse modo de falar de matemática? Enquanto é legítimo falar de irracionais do modo como é dito na escola ou pelos matemáticos em textos de divulgação matemática para iniciantes ou professores de matemática, na produção profissional de matemáticos esse modo não parece ser legítimo, uma vez que ele não falaria desse modo com outro matemático.

A característica internalista da matemática do matemático exclui dela o que possa ser do dia a dia, exemplos particulares, motivações, comparações com definições na língua portuguesa, questões filosóficas, embaraços. Não se trata da exclusão de certos modos de produção de significados que poderiam ser considerados matemáticos por outras pessoas (professores de matemática, por exemplo), mas se trata de diferentes legitimidades de produção de significado para a matemática em diferentes atividades ou lugares em que o próprio matemático transita, assim como outras pessoas. Quando os matemáticos transitam no terreno da atividade matemática, o modo de falar é um, quando passam a transitar exclusivamente no terreno da matemática do matemático, o modo é outro. Em ambos os modos, são produzidas legitimidades que nem sempre se intersectam. Distinguir atividade matemática de matemática do matemático marca essa diferença de legitimidades.

Acreditamos que o rigor usado por nós na atividade proposta é mais que suficiente, por levarmos em consideração que, na atividade do professor de matemática, o mais importante é lidar com as diferentes produções de significados que ocorrem em sala de aula, de forma que o professor possa tentar fazer os alunos falarem na direção esperada por ele ao trabalhar com os números irracionais. Por isso que, nesse lugar, é legítimo dizer que o número $\sqrt{2}$ não pode ser expresso por uma dízima periódica, considerando apenas os primeiros dez números decimais e que, portanto, esse número não pode ser expresso no formato *m/n*.

Para nós, a atividade que propomos é uma atividade considerada matemática, ou seja, ela é legítima matematicamente, e ajuda a enfatizar que a matemática praticada em salas de aula é, muitas vezes, mais próxima da caracterização de atividade matemática do que da matemática do matemático.

Matemática do professor de matemática, atividade matemática e matemática do matemático

Já mencionamos que a matemática do professor de matemática é caracterizada pelos diferentes modos de produção de significados que podem ocorrer em salas de aula e que eles chamam de matemáticas, cabendo, então, a discussão sobre se o que eles chamam de matemática está mais relacionado à atividade matemática ou à matemática do matemático.

Como já afirmamos, a matemática do matemático restringe os significados que são legítimos de serem produzidos para certas coisas dentro da matemática. Fazendo isso, restringe a autoridade de falar de e sobre matemática por estruturá-la no modo definicional de produção de significados (LINS, 2004b). A autoridade e a legitimidade de produção de significados ficam confinadas ao que os matemáticos falam, dando o poder a eles de dizer o que é e o que não é matemática.

Ainda que isso ocorra, os professores de matemática podem compartilhar dos modos de produção de significados da matemática do matemático, ao falarem em alguma direção considerada legítima pelos matemáticos.

No entanto, acreditamos que o que importa no contexto de sala de aula é a necessidade de falar com o outro de um modo que ele compreenda. É isso que legitima a matemática ser trabalhada sem o rigor característico do modo definicional, internalista e simbólico de produzir matemática profissionalmente. A atividade que propomos é exemplar nesse sentido, tendo em vista que estamos mais interessados em casos particulares de irracionais, a fim de promover discussões com os alunos, do que em uma formalização do conjunto dos reais que nos permita dizer que o conjunto dos números irracionais é considerado o complementar do conjunto dos números racionais no conjunto dos números reais.

O projeto de formação de professores de matemática a que nos dedicamos tem se direcionado para uma formação na qual diferentes modos de produção de significados possam ser discutidos, de forma a expandir as possibilidades de leituras dos alunos, a fim de promover interações em salas de aula. Nesse sentido, a matemática do matemático é um aspecto da matemática do professor de matemática a ser discutido e é tão importante quanto qualquer outro aspecto, pois ela possibilita discutir diferenças, entre o que é ou não é natural no mundo em que vivemos, por exemplo.

Ao diferenciar atividade matemática de matemática do matemático, diferenciamos legitimidades matemáticas pelos diferentes lugares nos quais os matemáticos e os professores transitam. Fica-nos a questão de como relacionamos atividade matemática com matemática do professor de matemática.

Assim como a matemática do professor de matemática engloba a matemática do matemático, ela também engloba a nossa caracterização de atividade matemática. Assim, consideramos que a caracterização da atividade matemática que propomos neste texto seja um modo de compreender o compartilhamento de legitimidades entre a matemática praticada pelos professores de matemática, em sala de aula, e a matemática praticada por matemáticos quando estão a falar de matemática para seus colegas de profissão.

Agradecimentos

Agradecemos ao matemático José Claudinei Ferreira, professor doutor da Universidade Federal de Alfenas, pelas discussões sobre a construção dos números reais. Agradecemos, também, ao Romulo Campos Lins (in memoriam), pela grande pessoa que foi e continua sendo em nossos corações.

Referências Bibliográficas

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

FERREIRA, Guilherme Francisco. *Brincando de gangorra: uma discussão sobre formação de professores e uso de tecnologias.* 2016. 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio Claro, 2016.

HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra.* v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

JULIO, Rejane Siqueira. *Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "dimensão".* 2007. 118 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio Claro, 2007.

LINARDI, Patrícia Rosana. *Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática.* 2006. 279 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio Claro, 2006.

LINS, Romulo Campos. Monstros, Matemática e Significados. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004a. p. 92-120.

LINS, Romulo Campos. Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production. In: *10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen, 2004b (Plenary and Regular Lectures).

LINS, Romulo Campos. *Design e Implementação de um programa de formação continuada de professores de matemática*. Projeto de pesquisa integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de produtividade em pesquisa ao CNPq, 2006.

LINS, Romulo Campos. O modelo dos campos semânticos: Estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Org). *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história.* São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

NIVEN, Ivan Morton. *Números: racionais e irracionais*. Trad. Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIVEIRA, Augusto Franco de. Introdução a Antologia (Continuidade e números irracionais de Richard Dedekind). *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, n. 41. Portugal, 1999.

OLIVEIRA. Viviane Cristina Almada. *Uma leitura sobre formação continuada de professores de matemática fundamentada em uma categoria da vida cotidiana*. 2011. 207 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio Claro, 2011.

PLATÃO. *Mênon.* 6ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Editora PUC-Rio/Editora Loyola-Editora, 2010.

POMMER, Wagner Marcelo. *A construção dos Números Irracionais no ensino básico*: uma proposta de abordagem envolvendo eixos constituintes dos números reais. 2012. 235 p. Tese (Doutorado em Educação) – USP/Faculdade de Educação: São Paulo, 2012.

SANTOS, João Ricardo Viola dos; LINS, Romulo Campos. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.

SILVA, Amarildo Melchiades da. *Sobre a Dinâmica da Produção de significados para a Matemática*. 2003. 243 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio Claro, 2003.

Texto recebido: 26/11/2016

Texto aprovado:14/11/2017

Apêndice – Uma adaptação da construção do conjunto dos números reais

Em Hefez (1993), a construção do conjunto dos números reais (R) baseia-se no uso de sequências de números racionais. Aqui, vamos apresentar apenas uma ideia dessa construção. Para isso, vamos, inicialmente, supor a existência do corpo dos números racionais[16] (Q) e do conjunto dos números naturais (N). Em seguida, definimos uma sequência **a** em Q, como uma função **a**: $N \rightarrow Q$, denotada por a(n)=a_n. Essa sequência será de Cauchy quando o valor absoluto da diferença entre os termos dela convergir para zero, à medida que os índices aumentam, o que pode ser expresso por: dado $j \in N$, $\exists n_0 \in N$, tal que $|a_m - a_n| < \frac{1}{j}$, para quaisquer $m, n > n_0$.

Denotamos por S(Q) o conjunto das sequências **a**=(a_n) de Cauchy em Q e por $S_c(Q)$ o conjunto das sequências convergentes em Q, onde (a_n) é convergente em Q quando existe $b \in Q$, tal que, para cada $j \in N$ dado, $\exists n_0 \in N$, tal que $|a_n - b| < \frac{1}{j}$ para todo $n > n_0$.

Denotamos por $S_0(Q)$ o conjunto das sequências em Q convergentes para zero. Se o número a$\in Q$ e **a**$\in S_c(Q)$ converge para a, denota-se por $\bar{\mathbf{a}}$=**a**+$S_0(Q)$ o conjunto das sequências que convergem para o número racional a.

De modo geral, se **e**$\in$S(Q), denotamos por $\bar{\mathbf{e}}$=**e**+$S_0(Q)$ o conjunto das sequências de Cauchy **b**=(b_n)=(e_n+s_n), onde s=(s_n)$\in S_0(Q)$, cujos termos se aproximam dos termos da sequência **e**.

O conjunto $\overline{R}$={$\bar{\mathbf{e}}$: **e**$\in$S(Q)}, das classes $\bar{\mathbf{e}}$ de sequências de Cauchy, contém uma cópia de Q, pois cada a$\in Q$ é limite da sequência constante a_n=a. Identificamos esse a$\in Q$ com a classe da sequência constante **a** que é $\bar{\mathbf{a}}$, o que produz uma cópia de Q em $\overline{R}$.

Seja u=(u_n) a aproximação de $\sqrt{2}$, ou seja, uma sequência $u_n \in Q$, tal que $u_n^2 - 2$ converge para 0. A sequência **u**$\in$S(Q) não converge para um número racional, ou seja, a classe $\bar{\mathbf{u}}$ não está na cópia $\overline{Q}$={$\bar{\mathbf{a}}$: **a**$\in S_c(Q)$} de Q em $\overline{R}$.

Podemos definir as operações de soma e multiplicação em S(Q), isto é, **a**+**b**=**c**, onde $c_n = a_n + b_n$ e **a**.**b**=**d**, onde $d_n = a_n b_n$, para **a** e **b**$\in$S(Q) . Isso induz as operações de soma e multiplicação em $\overline{R}$ e, com isso, identificamos $\overline{R}$ a R como o conjunto dos números que

[16] Em Hefez (1993) é feita a construção detalhada de N, Q e do conjunto dos números reais (R).

podem ser aproximados por sequências de números racionais, finalizando a construção do conjunto dos números reais.

Ao identificarmos$\sqrt{2}$como um conjunto das sequências $\overline{\sqrt{2}}$que se aproximam de $\sqrt{2}$, temos que $\overline{\sqrt{2}} \in \overline{R} - \overline{Q}$, ou seja, $\sqrt{2} \in R - Q$. Isso exemplifica que existem sequências de Cauchy em Q que não convergem em Q, mostrando que R é um conjunto maior que Q. Pode-se mostrar com essa ideia de construção, que isso não acontece em R, ou seja, que uma sequência de Cauchy em R converge em R, permitindo dizer que o corpo dos números reais é completo.