EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384

Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem

A trajectory in the learning of rational numbers enhanced by percentage

HELENA GIL GUERREIRO [1]

LURDES SERRAZINA [2]

JOÃO PEDRO DA PONTE [3]

Resumo

Este artigo tem como objetivo indicar os contributos que uma trajetória com um foco inicial na percentagem, que faz emergir de seguida o numeral decimal e posteriormente a fração, traz para a compreensão da natureza relacional dos números racionais. Trata-se de uma investigação baseada em design na modalidade de experiência de ensino na sala de aula. A recolha de dados resultou da observação participante, apoiada num diário de bordo, de gravações áudio e vídeo e da recolha das produções escritas dos alunos. Os resultados revelam que esta abordagem, partindo da percentagem, permite integrar os conhecimentos numéricos prévios intuitivos dos alunos na compreensão dos números racionais e apoia a construção de uma aprendizagem das diferentes representações, de forma interrelacionada, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número.

Palavras-chave: *percentagem, aprendizagem, sentido de número, grandeza numérica, números racionais*

Abstract

This article aims to figure out the contributions that a trajectory with an initial focus on percentage which leads to the emergence of decimals and later of fractions brings to the understanding of the relational nature of rational numbers. A classroom teaching experiment was developed as a design based research. Data were collected through participant observation, supported by a logbook, audio- and video-recorded lessons and collecting students' written productions. The results show that this approach, based on percentage, allows integrating students' previous intuitive numerical knowledge into the understanding of rational numbers and supports the construction of learning of the

[1] Doutoranda em Educação Matemática no Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Professora no Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha, Lisboa. Membro colaborador da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. *Email*: hg@campus.ul.pt.

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal. Membro integrado da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. *Email*: lurdess@eselx.ipl.pt.

[3] Doutor em Educação Matemática pela Universidade da Georgia (UGA, EUA). Professor Catedrático do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa (IEUL), Lisboa, Portugal. *Email*: jpponte@ie.ulisboa.pt.

different representations, in an interrelated way, in a perspective of the development of number sense.
Keywords: *percentage, learning, number sense, numerical magnitude, rational numbers*

Introdução

Construir uma aprendizagem dos números racionais[4] que se apoie nos conhecimentos numéricos que os alunos já possuem, constitui um desafio que se coloca à escola e à investigação em educação matemática. A noção de número racional, embora fundamental, levanta fortes dificuldades aos alunos (MIDDLETON; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; SHEW, 1998). Estas dificuldades prendem-se, nomeadamente, com duas características do seu ensino. Por um lado, a ênfase colocada no ensino dos números racionais centrado nas diferenças que este conjunto numérico introduz, exigindo uma mudança conceptual em relação aos conhecimentos numéricos que os alunos já possuem (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). E, por outro lado, o facto de se trabalhar os diferentes significados e representações do número racional de forma compartimentada, como se se tratassem de tópicos distintos (MIDDLETON; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; SHEW, 1998; TIAN; SIEGLER, 2017).

A extensão dos conhecimentos dos alunos dos números inteiros[5] para os números racionais implica a compreensão das relações que alicerçam a estrutura deste sistema numérico (PREDIGER, 2013). Independentemente da representação ou significado que assumem, os números racionais têm subjacentes relações estruturais que os alunos devem compreender à medida que exploram estes números, que os visualizam em diferentes contextos e que os relacionam, dando-lhes sentido, num processo de alargamento do sentido de número (MARKOVITS; SOWDER, 1994; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). É na compreensão da natureza relacional dos números racionais que se esteia "uma compreensão robusta e flexível de todas as notações do número racional" (TIAN; SIEGLER, 2017, p. 18), como grande finalidade do ensino destes números.

A literatura foca-se sobretudo na fração ou no numeral decimal[6] como representação a privilegiar na introdução aos números racionais (MOSS: CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017). A percentagem é relegada para um plano secundário, havendo poucos estudos

[4] Usamos o termo *números racionais* para indicar os números racionais não negativos.
[5] Usamos o termo *números inteiros* para indicar os números naturais com o zero.
[6] Usamos o termo *numeral decimal* para designar uma representação dos números racionais positivos, escrita de acordo com o sistema de numeração decimal, usando vírgula.

recentes que a discutam, apesar de lhe serem reconhecidas vantagens, nomeadamente, pelo facto de integrar as experiências sociais dos alunos antes mesmo da sua entrada na escola e permitir relacionar-se de forma intuitiva com as outras representações (MOSS; CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017).

Neste estudo optamos por seguir uma abordagem aos números racionais que se foca na compreensão das relações numéricas envolvidas, privilegiando a construção do conhecimento da grandeza do número, numa perspetiva de sentido de número, e interrelacionando as diferentes representações dos números racionais: numeral decimal, fração e percentagem, a partir de um trabalho inicial com a percentagem e fazendo emergir depois o numeral decimal e a fração (MOSS; CASE, 1999). O objetivo é perceber os contributos dessa abordagem na construção da compreensão da natureza relacional dos números racionais, por alunos de 3.º e 4.º ano do ensino básico.

Desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número

A construção do conhecimento dos números segue um desenvolvimento contínuo ao longo dos diferentes conjuntos numéricos e o seu aspeto central prende-se com a compreensão da grandeza numérica (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Por conseguinte, no trabalho com o conjunto dos números racionais é importante descobrir as características que são comuns com os números inteiros, como o facto de qualquer número possuir uma grandeza que se pode representar na reta numérica, e as que não são, identificando propriedades específicas do novo conjunto numérico. Esta é a ideia central da teoria integrada do desenvolvimento numérico apresentada por Siegler, Thompson e Schneider (2011). Segundo esta teoria, o conhecimento dos números racionais emerge dos conhecimentos prévios dos números inteiros dos alunos, num processo de enriquecimento conceptual gradual que requer uma reorganização do seu conhecimento numérico (SIEGLER; FAZIO; BAILEY; ZHOU, 2013). Este conhecimento consiste em considerar as propriedades que caraterizam os números racionais enquanto elementos de um sistema numérico mais abrangente e deixar de os ver a partir das características que são específicas de um dado conjunto (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Esta perspetiva de enriquecimento e reorganização do conhecimento dos números implica perceber o que são, como se podem representar, de que forma se relacionam e como se estruturam em diferentes conjuntos numéricos. Implica pensar a aprendizagem dos números em termos de desenvolvimento de sentido de número, como uma construção de sentido. Por um lado, isso implica um conhecimento acerca dos números e das operações e, por outro lado, a capacidade de usar esse conhecimento de modo flexível para fazer julgamentos matemáticos e construir estratégias adequadas para lidar com os números e as operações (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Pensar os números deste modo implica o que alguns autores designam por uma boa intuição sobre os números e as suas relações, não apenas no trabalho com os números inteiros, mas também com outros conjuntos numéricos, à medida que se avança na escolaridade (HOWDEN, 1988; MARKOVITS; SOWDER, 1994; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Pensar o desenvolvimento do conhecimento dos números nesta perspetiva implica compreender a sua grandeza, notação, significados e representações, de forma interrelacionada, sendo capaz de fazer um uso significativo e flexível de procedimentos na resolução de problemas (NCTM, 2014; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Esta perspetiva vem refletida nos princípios da Educação Matemática Realista. Na verdade, quando Freudenthal (1991) considera a matemática como atividade humana e não como um corpo de conhecimentos a transmitir, encara a sua aprendizagem como um processo de matematização que emerge do senso comum. Por conseguinte, reforça a ideia de que se deve partir dos conhecimentos que os alunos já possuem e da sua intuição, guiando-os numa ação realista de reinvenção da matemática (FREUDENTHAL, 1991). A matemática será "realista" para os alunos no sentido de ser significativa, envolvendo situações do mundo real ou situações que estes conseguem imaginar e às quais atribuem significado (VAN DEN HAUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014). Um outro princípio a destacar diz respeito ao facto de se entender que cada assunto deve ser trabalhado de forma entrelaçada com outras ideias matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014). Deste modo, a aprendizagem dos números pode ser interpretada como um processo de desenvolvimento integrado, em que o conhecimento conceptual dos números inteiros é gradualmente alargado aos números racionais, interrelacionando os seus diversos aspetos, e encarando a aprendizagem dos números como uma construção de sentido (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Extensão do sentido de número aos números racionais

Os números racionais apresentam uma natureza proporcional, envolvendo na sua essência uma relação (GALEN; FEIJS; FIGUEIREDO; GRAVEMEIJER; HERPEN; KEIJZER, 2008). Qualquer número racional positivo traduz uma relação relativa a uma dada unidade, que se traduz na sua grandeza: os números inteiros nomeiam conjuntos de unidades e os números fracionários nomeiam uma razão em relação à unidade (LAMON, 2007). Esta propriedade de grandeza numérica permite que os números racionais possam ser representados e ordenados numa reta numérica (CCSSI, 2010; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Deste modo, os números racionais podem ser trabalhados de forma integrada com os números inteiros, sendo que o seu nome traduz o valor de medida relativa à unidade, o que tem subjacente uma relação de comparação de ordem de grandeza (BROWN, 2015).

Com os números inteiros a medida está presente na sua forma mais simples, a contagem, em que se conta o número de vezes que se itera a unidade (STEPHAN; CLEMENTS, 2003). É no alargamento dos conhecimentos numéricos que a medida, como comparação de quantidades contínuas, subdividindo e iterando, permite atribuir a uma quantidade de uma grandeza um número racional (PONTE; SERRAZINA, 2000). Assim, qualquer número racional pode ser interpretado como medida, à qual está associada uma razão, existindo assim uma relação direta entre a medida e os restantes significados que o número racional pode assumir (LAMON, 2012). Por conseguinte, a medida desempenha um papel determinante na compreensão dos números racionais, bem como na compreensão das relações multiplicativas. Os alunos podem construir novas quantidades a partir de quantidades dadas e da interpretação da sua relação constante (LAMON, 2012). A perceção de que a medida, enquanto valor aproximado, pode ser mais ou menos precisa, constitui um caminho para a compreensão da densidade dos números racionais, processo que se desenvolve de forma lenta e gradual, à medida que o trabalho neste conjunto numérico se vai desenvolvendo (PONTE; SERRAZINA, 2000; VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004).

A compreensão desta natureza relacional dos números racionais pode ser analisada em termos de sentido de número, uma vez que alunos com um bom desenvolvimento de sentido de número racional revelam, como considera Lamon (2007),

> intuição em relação à grandeza relativa dos números racionais e uma capacidade para estimar e pensar qualitativamente e em termos multiplicativos, para resolver proporções e problemas, para se movimentar entre interpretações e representações, para dar sentido e tomar decisões adequadas e apreciações plausíveis. (p. 636)

Deste modo, os alunos devem ser capazes de manipular os números de forma fluente e flexível, no sentido de encontrarem soluções apropriadas para as mais diversas tarefas, numa "perspetiva de que os números são úteis e de que a Matemática tem uma certa regularidade (faz sentido)" (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992, p. 4).

As diferentes interpretações de sentido de número da literatura oferecem diferentes referentes de capacidades que se complementam, podendo ser vistas como componentes e, ao mesmo tempo, como indicadores que permitem o reconhecimento do sentido de número (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SOWDER; SCHAPPELLE, 1994). Considerando o início da construção da compreensão dos números racionais, promovendo o desenvolvimento de sentido de número, importa cruzar diversas ideias centrais dos trabalhos de McIntosh, Reys e Reys (1992), Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Berch (2005) reorganizando-as em cinco tópicos, que se constituem como competências que alicerçam a construção do conhecimento e da destreza com os números: 1) compreender a regularidade dos números, tendo por base a compreensão da estrutura no sistema decimal de posição; 2) relacionar múltiplas representações dos números, reconhecendo as suas diferentes representações e interpretando o seu significado em função do contexto; 3) compreender a grandeza dos números, identificando o seu valor relativo e a ordem de grandeza da sua representação; 4) construir números de referência, interpretando-os como referentes, a partir da experiência matemática, na tomada de decisões; e 5) mobilizar relações de proporcionalidade, usando estratégias de natureza aditiva, mas sobretudo multiplicativa, para interpretar relações numéricas, bem como para estabelecer comparações, identificando relações entre relações envolvendo quantidades de grandezas diferentes.

A construção destas competências, de forma integrada, traduz-se numa compreensão dos números racionais numa perspetiva de sentido de número, à medida que os alunos relacionam a nova informação com conhecimento numérico já adquirido, apropriando-se da natureza multiplicativa dos números racionais e dos seus múltiplos significados (LAMON, 2007). Nesta perspetiva, Moss e Case (1999) desenvolveram um currículo para aprendizagem dos números racionais que preconiza uma compreensão flexível e integrada destes números, numa abordagem que apela ao desenvolvimento de sentido de número (MOSS, 2002). Os autores destacam o papel da percentagem, num significado de medida, na fase inicial da aprendizagem dos números racionais e fazem as representações em numeral decimal e fração decorrer da percentagem, tendo por base a aprendizagem do modo como as três representações se relacionam (MOSS; CASE, 1999). O trabalho parte do conhecimento intuitivo que os alunos possuem de percentagem, com ligação a contextos realistas, mas também do conhecimento dos números inteiros, que permite manipular com facilidade os números de 1 a 100, para interpretar o sentido de completude (*sense of fullness*), mobilizando relações de proporcionalidade, que a percentagem oferece. Ao privilegiar a percentagem, os alunos vão construindo as suas estratégias e fazendo as primeiras conversões entre diferentes representações de forma intuitiva, sem se centrarem em procedimentos de rotina (MOSS; CASE, 1999). Progressivamente, os alunos vão construindo um leque de aprendizagens que incluem, como refere Moss (2002), as capacidades de: 1) usar de forma flexível e indiferenciada as representações em numeral decimal, fração e percentagem; 2) apreciar a grandeza dos números racionais, comparando e ordenando números; 3) encontrar estratégias de solução para calcular com números racionais; e 4) revelar confiança e fluência para pensar sobre os números racionais, usando números de referência. Trata-se, assim, de uma abordagem em que a construção do conhecimento dos números é apresentada de forma indissociável do desenvolvimento de sentido de número, apoiada num ambiente de sala de aula facilitador da construção de sentido (SOWDER & SCHAPPELLE, 1994).

Metodologia

Este estudo, enquadrado numa perspetiva sociocultural, segue uma abordagem metodológica de investigação baseada em design, centrando-se na compreensão dos processos de aprendizagem dos números racionais e do modo de os promover no contexto natural da sala de aula (COBB; JACKSON; DUNLOP, 2016; PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA; 2016). Trata-se de uma investigação que se consubstanciou numa intervenção numa turma durante dois períodos letivos, no fim do 3.º ano de escolaridade e no início do 4.º ano, na modalidade de experiência de ensino na sala de aula (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003).

Esta modalidade de investigação envolveu a construção de uma conjetura inicial com duas dimensões: uma de conteúdo matemático, centrada nos processos de aprendizagem, especificamente dos números racionais, e outra pedagógica, que remete para aspetos da cultura da sala de aula que potenciam essa aprendizagem pela turma (COBB; JACKSON; DUNLOP, 2016; CONFREY; LACHANCE, 2000).

Nesta experiência de ensino tiveram lugar três microciclos, cada um envolvendo três fases: a antecipação dos processos de aprendizagem, a implementação de tarefas e a análise dos elementos da ecologia de aprendizagem, isto é, das tarefas, dos materiais, da interação, bem como das normas da sala de aula (COBB; CONFREY; DISESSA;

LEHRER; SCHAUBLE, 2003; PREDIGER; GRAVEMEIJER; CONFREY, 2015). O caráter experimental e cíclico desta modalidade de investigação permitiu ir explorando, adaptando e introduzindo reajustamentos na ecologia de aprendizagem, com cada ciclo a proporcionar informação ao ciclo seguinte (GRAVEMEIJER; VAN EERDE, 2009). Este processo contribuiu para um refinamento progressivo da conjetura, no sentido de se poder constituir como uma teoria local, isto é, situada em relação a um tópico matemático específico trabalhado embebido na cultura da sala de aula de uma turma em particular (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003).

A antecipação dos processos de aprendizagem permitiu definir uma progressão hipotética no desenvolvimento da aprendizagem (SIMON, 1995). Neste estudo, essa progressão foi conjeturada como uma trajetória de aprendizagem inspirada no currículo experimental para o ensino dos números racionais de Moss e Case (1999), que se estruturou em três etapas, cada uma constituindo-se como um microciclo da experiência de ensino. Esta trajetória de aprendizagem teve como pressuposto um trabalho com as diferentes representações do número racional, interrelacionando-as de modo flexível, remetendo a primeira etapa para a compreensão da percentagem. Em seguida, focou-se a atenção na compreensão do numeral decimal, fazendo as centésimas decorrer da percentagem. E por fim, promoveu-se a compreensão da fração a partir do numeral decimal (MOSS; CASE, 1999). Deste modo, e apesar de se descrever a trajetória de forma sequenciada, e aparentemente segmentada, cada etapa não foi estanque, pelo que o seu desenvolvimento não pode ser interpretado de forma linear. Pretende-se, sobretudo, detalhar a rede de ideias e conceitos considerados nesta experiência, para que os alunos se pudessem movimentar dos conceitos mais informais para os mais complexos ao longo do tempo (CONFREY; MALONEY, 2010).

Recolha e análise de dados

Neste estudo optámos por focar a análise de dados nos processos de aprendizagem da turma e nos meios que os apoiam, considerando a turma, enquanto a comunidade da sala de aula, como unidade de análise (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003). Neste artigo, começamos por analisar dados recolhidos na fase da preparação da experiência, tendo por base as produções escritas dos alunos num trabalho de diagnóstico. Este diagnóstico procurou perceber se a noção de percentagem era familiar aos alunos, uma vez que na escola o trabalho no domínio dos números racionais já realizado tinha envolvido apenas a fração em situações contextualizadas relativas aos significados quociente e parte-todo. Posteriormente, trazemos diversos episódios de cada microciclo, focando a análise nos momentos de discussão coletiva de duas tarefas de cada etapa. Os dados foram obtidos através da gravação áudio e/ou vídeo das aulas, das produções dos alunos e da observação participante, apoiada por um diário de bordo da primeira autora, como investigadora e professora da turma, garantindo-se a responsabilidade ética que uma investigação desta natureza implica (IE – UL, 2016).

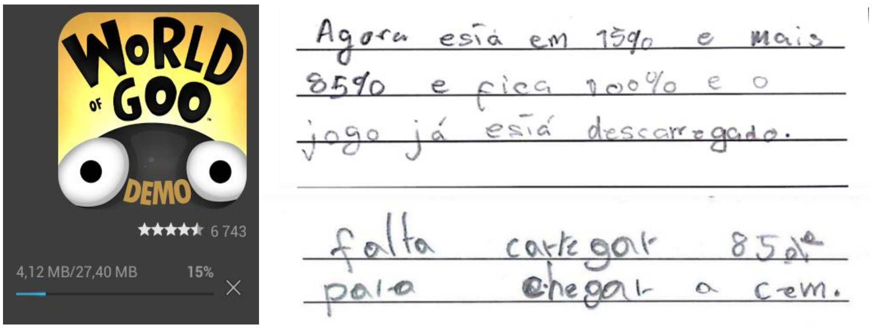
A análise retrospetiva dos dados envolveu o cruzamento de categorias emergentes dos dados com categorias geradas a partir do quadro teórico, para a identificação de evidências do processo de desenvolvimento do sentido de número racional (GOETZ; LECOMPTE, 1984). Convocamos componentes de sentido de número apontadas pela investigação que, ao mesmo tempo, são consideradas como indicadores que facilitam o seu reconhecimento (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH; 2005; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Focamo-nos na dimensão do conhecimento e destreza com os números, identificando por um lado, as relações numéricas mobilizadas: grandeza, ordenação, comparação, equivalência, múltiplas representações e proporcionalidade. Além disso, consideramos as estratégias de manipulação dos números construídas na turma: factos numéricos, decomposição/composição, metade/dobro; adições sucessivas/multiplicação, partição/agrupamento, valores de referência e uso de modelos.

Resultados

Estudo de diagnóstico

Numa tarefa apresentada no estudo de diagnóstico era pedido que os alunos indicassem, justificando, quanto faltava para descarregar um jogo, tendo como suporte uma barra de estado, em que era visível que estava processado 15% do *download* (Figura 1).

Figura 1 – Explicação de Carolina e de Heitor na resposta à tarefa de *download*

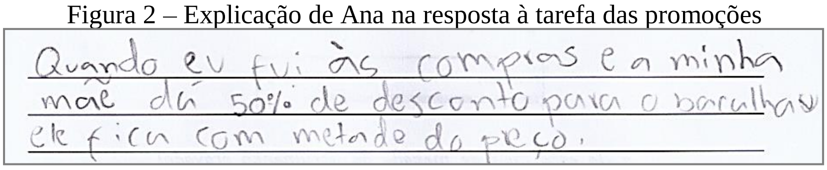


Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

O argumento que os alunos apresentaram evidencia que mobilizaram o conhecimento dos números inteiros de 0 a 100, usando a decomposição de 100 para descobrir quanto faltava para o *download* do jogo ficar completo. A mensagem visual que a barra de estado oferece foi interpretada corretamente pela maioria dos alunos, permitindo-lhes associar o seu grau de completude a um dado valor de percentagem, correspondendo 100% ao *download* completo.

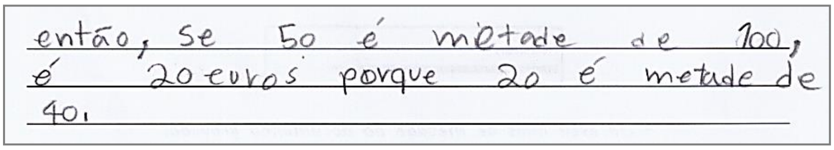
Numa outra tarefa deste estudo, que envolvia interpretar uma promoção de 50% numa camisola que custava inicialmente 40 euros, sem que fosse apresentada uma representação icónica para apoiar a interpretação da situação, alguns alunos chegaram à resposta correta, evidenciando uma intuição relativa à noção de percentagem, que parece apoiada pelas suas vivências fora da escola (Figura 2).

Figura 2 – Explicação de Ana na resposta à tarefa das promoções



Outros alunos convocaram o conhecimento dos números inteiros de 0 a 100, aliado a um raciocínio proporcional intuitivo, como podemos ler na resposta de Clara (Figura 3) para interpretar a situação.

Figura 3 – Resposta de Clara na resposta à tarefa das promoções



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Esta aluna perceciona a relação de proporção que a percentagem oferece, estabelecendo, intuitivamente, uma igualdade de razões.

No estudo de diagnóstico, os alunos revelaram um conhecimento informal da percentagem a partir da sua experiência do dia-a-dia com a utilização de tecnologias como o *smartphone* ou computador, em que associam a percentagem a um dado grau de completude. Além disso, resolveram outras tarefas que remetiam para situações da sua vida familiar, que envolviam percentagem, sem o apoio de uma representação icónica, estabelecendo relações proporcionais intuitivas. A construção deste conhecimento informal parece resultar da experiência dos alunos com situações em que a percentagem está presente em contextos do dia-a-dia e das estratégias espontâneas que vão construindo, tendo por base os conhecimentos relativos aos números inteiros de 0 a 100, associados a uma perceção intuitiva da natureza multiplicativa dos números racionais.

Compreensão da percentagem

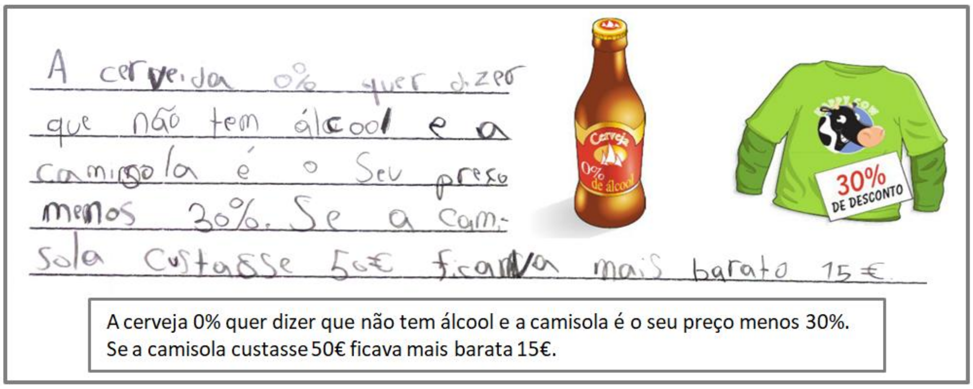
Numa das primeiras tarefas desta etapa da experiência de ensino os alunos foram convidados a encher e vazar recipientes com formas e capacidades diferentes, avaliando, em percentagem, o espaço ocupado pela água na sua relação com o todo, ou seja, 100% como o recipiente completamente cheio. No momento da discussão coletiva, houve necessidade de clarificar a relação entre a capacidade de cada recipiente e a percentagem de água que tinham em relação ao todo:

Professora:	*Então o que quer dizer 100% cheio? Lembrem-se da bateria, o que queria dizer 100% cheia? Clara.*
Clara:	*Quer dizer que está todo cheio.*
Professora:	*Está todo cheio. Então e este [levantando o recipiente mais pequeno], está todo cheio ou não, Ivo?*
Ivo:	*Está.*
Professora:	*Então, por que é que quando eu ponho um ao lado do outro dizem que este [o mais pequeno] está 50% cheio? Sim, Dina.*
Dina:	*Tenho sempre 100%, porque só por ser mais pequeno não quer dizer que não esteja também cheio.*
Marco:	*Estão os dois até cima, mas não levam a mesma quantidade de água.*
Professora:	*Estão ambos 100% cheios mas levam quantidades de água diferentes, porque são recipientes com capacidades diferentes certo?*

A construção da ideia de que recipientes 100% cheios podem ter quantidades de água diferentes foi um marco importante no processo de alargamento do conhecimento dos números inteiros aos números racionais, uma vez que os alunos percecionaram que um mesmo número, representado em percentagem, podia dizer respeito a quantidades diferentes, uma vez que corresponde a um todo também diferente, mas que se considera como 100%.

Numa das últimas tarefas desta etapa, era pedido aos alunos que comentassem duas imagens, explicando o significado da percentagem em cada uma delas (Figura 4).

Figura 4 – Resposta do grupo de Horácio à tarefa sobre o significado de percentagem



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Em relação à segunda imagem, todos os grupos identificaram que com “30% de desconto” a camisola iria ficar mais barata, interpretando o desconto em percentagem como um valor relativo em relação ao preço inicial e não como um valor absoluto que se subtraí ao preço inicial, como aparentemente poderia quer dizer a expressão “é o seu preço menos” da resposta do grupo de Horácio. Na discussão coletiva desta tarefa procurou-se por em comum o significado de aplicar um desconto sobre um dado valor, no sentido de explicitar a relação que a percentagem traduz entre quantidades e que parecia escondida atrás das respostas dos alunos:

Professora: *Mas quando vemos na montra uma camisola com 30% de desconto, como é que sabemos quanto é que custa? Mafalda.*
Mafalda: *Fazemos… 50% de desconto é metade do preço e 30% fazemos metade mais 5%.*
Professora: *Ok. Fazemos metade da metade e mais 5% e assim ficamos a saber quanto custa a camisola?*
. . .
Bruna: *Tens que tirar 30%, para ficar com menos 30%.*
Professora: *Isso, tenho que pensar no preço da camisola como 100% e retirar-lhe os 30%.*
Ana: *É 70% do preço.*
Heitor: *30% é o que não pagas.*

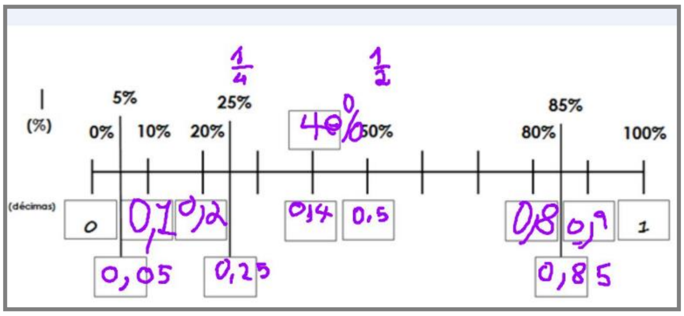
Embora usando termos aparentemente aditivos como “tirar” ou “menos”, as justificações apresentadas pelos alunos evidenciam a construção de um entendimento das relações multiplicativas associadas à noção de percentagem, isto é, percecionam o desconto como uma quantidade proporcional que se obtém quando se aplica aquele valor ao custo inicial, tendo por base a proporção para 100.

Nesta etapa da compreensão da percentagem, o estabelecimento de relações entre ideias na construção dos conhecimentos dos números racionais tem por base comparações numéricas que mobilizam relações multiplicativas. Estas surgem apoiadas num significado de medida, em que um número descreve uma quantidade de algo em relação a uma unidade, 100% no caso da tarefa dos recipientes, considerando o recipiente cheio, independente do valor da sua capacidade e da razão, em que uma parte da razão está relacionada com a outra parte através da multiplicação, como na situação da camisola em que o preço é reduzido para 30% do preço original.

Compreensão do numeral decimal

Uma das tarefas realizadas na etapa de compreensão da representação em numeral decimal ocorreu no momento de cálculo mental, onde os alunos foram convidados a fazer conversões entre a percentagem e o numeral decimal, surgindo a décima como um agrupamento de centésimas (Figura 5).

Figura 5 – Registo durante o momento de discussão coletiva da tarefa envolvendo conversões



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Em particular, a discussão de 25% evidenciou que os alunos interpretaram esta representação num significado de medida. Na verdade, quando procuraram uma representação equivalente para 25% verificaram que distância representava quando comparada com o todo, visto como resultante da iteração de cem partes, no caso das centésimas, em analogia com a percentagem, e da iteração de dez partes no caso das décimas como reagrupamento de centésimas:

Luís:	*Os 50% são metade da unidade e 25% é 1/4 do percurso.*
Professora:	*E quantas décimas?*
Simão:	*São 25 centésimas.*

Professora: Mas como é que podemos ler em décimas? É um quarto do percurso, mas... alguém quer ajudar? Mafalda.

Mafalda: É mais que duas décimas, mas menos que três, fica no meio.

Professora: Então e como é que ficamos?

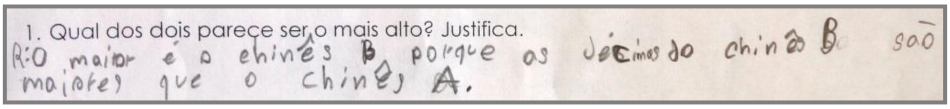
Luís: É duas décimas, mais 50% da outra, mais metade (aponta a distância na reta correspondente a duas décimas e meia).

Mafalda: É duas décimas e meia (escreve 0,25)

Neste processo de medida, os alunos perceberam que nem todos os valores de percentagem se conseguiam escrever usando o numeral decimal apenas com décimas, associando as centésimas a uma medida mais precisa. Neste momento da discussão, o nome de cada ponto, localizado na reta, e a correspondente distância a zero, representam o mesmo valor e, como tal, o mesmo número racional, que assumiu diferentes representações, consoante se considerou a sua leitura em percentagem, numeral decimal ou fração.

Uma outra tarefa realizada nesta etapa da compreensão do numeral decimal desafiava os alunos a estimar e identificar a diferença de altura entre os dois chineses mais altos do mundo. O chinês A media 2,362 metros e o outro, o chinês B, tinha de altura 2,40 metros. Na primeira parte da tarefa era perguntado qual dos dois parecia ser mais alto. Todos os grupos identificaram que o chinês B era mais alto. No entanto, as suas explicações foram de natureza diferente, alguns alunos justificaram ser mais alto, porque a imagem assim o permitia percecionar, enquanto outros apresentaram justificações apoiadas na interpretação do valor das suas alturas, como a do grupo de Heitor (Figura 6).

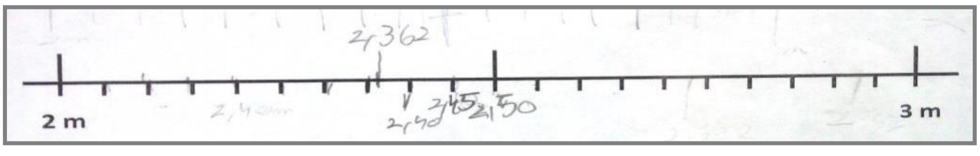
Figura 6 – Resposta do grupo de Heitor à primeira parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

A segunda parte da tarefa apelava a uma comparação entre o valor de medida das suas alturas, sendo dada uma reta numérica. Alguns alunos localizaram usando a reta simples, recorrendo a números de referência e recorrendo apenas ao numeral decimal, como no caso do grupo de Berta (Figura 7).

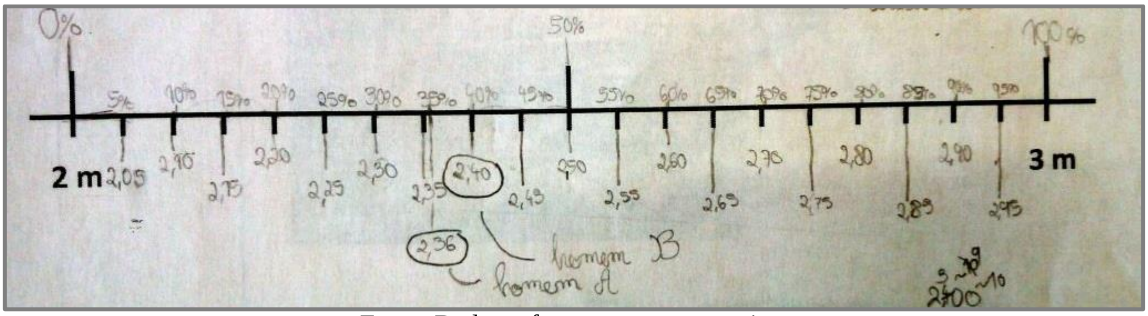
Figura 7 – Resposta do grupo de Berta à segunda parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Outros alunos, contudo, recorreram à percentagem para apoiar a localização de números em numeral decimal na reta, que usaram como dupla, como no caso do grupo de Mafalda (Figura 8).

Figura 8 – Resposta do grupo de Mafalda à segunda parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Este grupo estabeleceu a relação entre a percentagem e o numeral decimal, considerando um metro como 100%. Usou o numeral decimal com arredondamento às centésimas, desprezando as milésimas por considerar difícil, como defendeu o grupo, fazer uma marcação exata desse ponto na reta, evidenciando a perceção da relação entre a noção de precisão, associada ao refinamento da medida, e o número de dígitos da parte não inteira do numeral decimal.

A discussão coletiva conduziu à análise da diferença de altura entre os dois homens, no sentido de pôr em comum a relação entre os números na representação em numeral decimal de um número:

Professora:	*Então, qual a diferença entre eles? Bruna.*
Bruna:	*Huumm…*
Heitor:	*É 4 centímetros!*
Professora:	*Serão mesmo 4 centímetros certos?*
Dina:	*Não chega a 4 centímetros...*
Ana:	*É menos um bocadinho… é menos duas décimas [do centímetro].*
Marco:	*É menos dois milímetros.*
Bárbara:	*É 38 milímetros.*

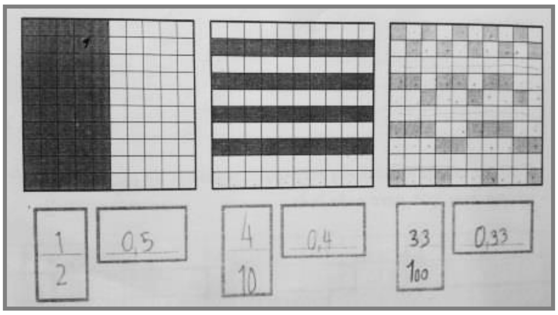
Os alunos percecionaram que a diferença entre os dois homens era pequena, afirmando "Não chega a 4 centímetros", à medida que sentiam necessidade de refinar a unidade para a interpretar, contextualizando a reconceptualização da unidade, apoiada na ideia da dividir sucessivamente em dez partes, originando uma unidade dez vezes mais pequena que a anterior.

Nesta etapa, os alunos parecem dar sentido à estrutura do numeral decimal, ancorada na percentagem, na compreensão da grandeza dos números, tendo por base um significado de medida, através da reta numérica dupla. O numeral decimal, com arredondamento às centésimas, foi interpretado como a percentagem do percurso entre 0 e 1. A propósito da primeira tarefa, por exemplo, 0,25 quantificaram uma percentagem da distância, 25%, de uma unidade, que era 100%. Na segunda, 2,40 traduzia a distância que era 40% do caminho entre dois e três metros.

Compreensão da fração

Numa das primeiras tarefas desta etapa da experiência de ensino, o desafio apelava à conexão entre o numeral decimal e a fração decimal, com recurso à manipulação do Material Multibásico (MAB), fazendo variar a unidade. A segunda parte desta tarefa remetia para a interpretação e escrita da quantidade representada, numa tabela de 10×10, em numeral decimal e em fração (Figura 9).

Figura 9 – Resposta do grupo de Hélio à segunda parte da tarefa envolvendo numeral decimal e fração decimal



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Os alunos, tendo como suporte o modelo do MAB, representaram a quantidade indicada sem dificuldade, apoiada num significado parte-todo, descrevendo a relação proporcional entre as duas quantidades, a quantidade que se queria descrever e a unidade a que se referia, como se pode verificar no excerto da discussão coletiva de cinquenta centésimas:

Berta: *Aqui são cinquenta centésimas.*
Professora: *Quantas décimas? Carolina.*
Carolina: *Cinco.*
Berta: *Cinco décimas.*
. . .
Débora: *Cinco traço de fração 100.*
Professora: *Vamos lá todos pensar nesta forma. Sim, Ana.*
Ana: *Não são cinco centésimos, são 50.*
Dinis: *Isso são cinco centésimas, não cinco décimas.*
Hélio: *Eram cinco cubinhos e não cinco barras!*
Professora: *Ok. Porquê?*
Ana: *Se são cinco barras, são 50 centésimas.*
Ivo: *Pode ser é 5 décimos.*
Professora: *Cinco décimos. Como é que eu escrevo?*

Dina: *Cinco em cima e dez na parte de baixo, porque estão cinco pintadas, mas são dez barras.*

Perante o conflito gerado em torno da representação em fração de 50 centésimas, Hélio convocou o argumento de que assim seriam “cinco cubinhos e não cinco barras”, procurando concretizar a diferença entre cinco centésimas e 50 centésimas, através da relação que estabeleceu entre o referente concreto, o MAB, e a representação simbólica, quer em numeral decimal, quer em fração:

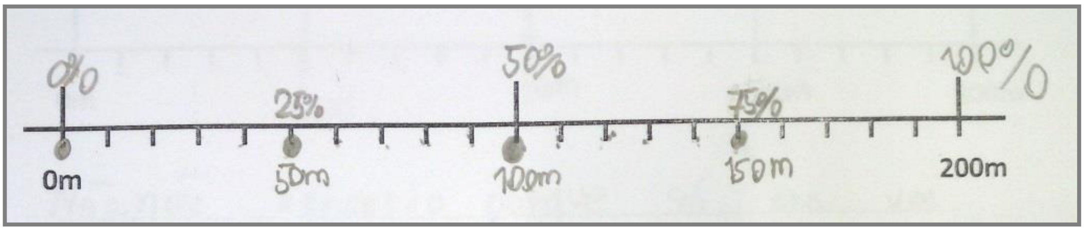
Professora: *(Escreve 5/10) . . . E se quiséssemos ler em centésimas…*
Marco: *Escrevíamos 50 traço de fração 100.*
Professora: *(Escreve 50/100) Mais alguém tem outra sugestão.*

Carolina: *500 milésimas.*
Professora: *(Escreve 0,500). Se lemos 5 décimas ou 50 centésimas, também podemos ler 500 milésimas.*
. . .
Professora: *Ora bem. Ainda haveria mais formas?*
Alunos: *Sim!*
Ivo: *Cinco mil de dez mil.*
Simão: *Há infinitas! Nunca mais saímos daqui…*

Nesta tarefa, as frações decimais pareceram ganhar sentido a partir do numeral decimal, não só pelas semelhanças na sua estrutura, pois ambas apelam ao valor posicional no sistema de base 10, mas também apoiado pelo isomorfismo com as propriedades do sistema decimal que o MAB apresenta. Os alunos identificaram que uma dada quantidade podia ser representada de diversas formas dentro e entre representações, de acordo com a unidade de agrupamento que se considera, numa relação multiplicativa que construíram, mas que ainda não verbalizaram. No entanto, quando esta regularidade foi identificada, os alunos perceberam que podiam estender o procedimento e criar, por exemplo, infinitas frações equivalentes, como verbalizou Simão.

Uma outra tarefa desta etapa remetia para o contexto real e familiar aos alunos da corrida de estafetas, uma atividade que desenvolviam no âmbito da Atividade Física e Desportiva. Os alunos foram convidados a descobrir que parte de uma corrida de 200 metros fazia cada elemento de uma equipa de quatro atletas, apoiando-se numa reta numérica. Os alunos identificaram, sem dificuldade, a distância em metros, assinalando na reta os pontos de passagem do testemunho, como evidencia o registo do grupo de Heitor na Figura 10.

Figura 10 – Resposta do grupo de Heitor à tarefa das estafetas

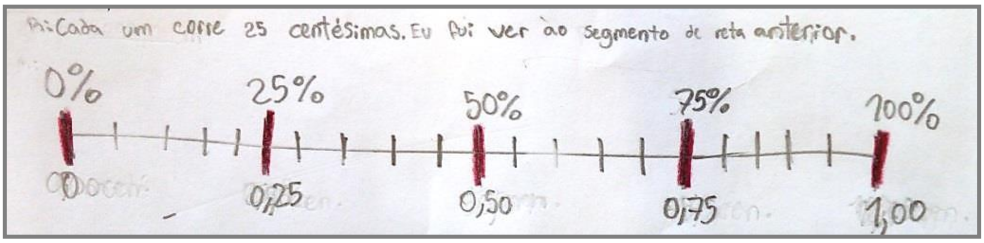


Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Os alunos apoiaram-se na relação comparativa que a percentagem oferece para relacionar o 25%, o 50% e 100% com os quatro momentos de passagem do testemunho, considerando a totalidade da corrida como unidade.

Quando lhes foi perguntado que parte da corrida fez cada um dos quatro elementos da equipa, alguns grupos recorreram à relação entre a percentagem e o numeral decimal, interpretando que cada atleta correu 0,25 da corrida (Figura 11).

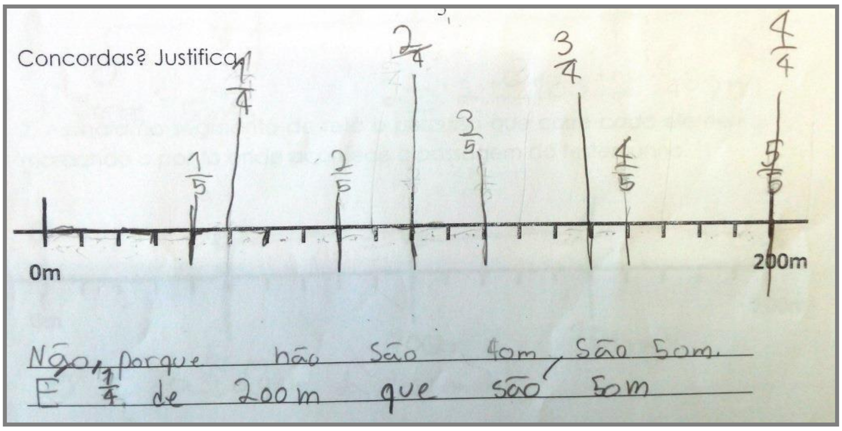
Figura 11 – Resposta do grupo de Dina à tarefa das estafetas



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Na última questão desta sequência era pedido que os alunos se posicionassem, justificando, em relação a uma afirmação que dizia "Cada elemento da equipa corre 1/5 da corrida.". Todos os grupos afirmaram não concordar com a afirmação. Alguns justificaram assinalando na reta numérica a divisão da unidade em quartos e em quintos, como forma de comparar diretamente a sua grandeza, como mostra o registo do grupo de Clara (Figura 12).

Figura 12 – Resposta do grupo de Clara à tarefa das estafetas



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Este grupo de alunos justificou por palavras que era a um quarto da corrida que correspondiam os 50 metros que cada elemento da equipa fez e não a 40 metros (Figura 20).

Na discussão coletiva desta afirmação, os alunos foram apresentando argumentos para refutar a afirmação tendo por base as suas estratégias de resolução:

Dinis: *Eram só quatro pessoas na corrida.*
Ivo: *E cada uma corria 50 metros.*

Professora: *Então eram 4 elementos por equipa e vimos que cada um corria 50 metros. Foi a essa conclusão que vocês chegaram também, Ana?*
Ana: *Se fossem 4 pessoas era de 50 em 50 e não de 40 em 40. Assim eram 5 pessoas.*
Professora: *E então? Eu pergunto, quando vimos que eram 4 pessoas e cada pessoa corria 50 metros cada elemento fazia que parte do percurso?*
Dina: *25%.*
Professora: *Isso. Se a estafeta fosse feita por 4 pessoas, o percurso estaria dividido em quanto?*
Alunos: *Em quatro.*
Heitor: *Cada pessoa fazia um quarto.*
…
Professora: *Olhando para a reta, será verdade a afirmação de que cada atleta correu 1/5?*
Heitor: *Não, fez um quarto porque cada um corre vinte e cinco por cento e não vinte por cento.*
Professora: *Então se correm vinte e cinco por cento, a afirmação era verdadeira?*
Alunos: *Não.*
Bruna: *Só se fossem cinco corredores.*

A relação entre a fração e a percentagem que emergiu durante a fase de exploração pelos diferentes grupos foi sistematizada na voz de Heitor na discussão coletiva quando afirmou que um quarto correspondia a 25% da corrida e não a 20%. A relação que estabeleceu entre 25% e um quarto é a que sustenta a relação entre 20% e um quinto. Perceberam, por exemplo, que 25% representam vinte e cinco centésimas de cem e também um quarto, de quatro quartos, da mesma unidade. A fração um quinto constrói-se naturalmente como uma representação de um número mais pequeno, mais próximo do zero, do que a fração um quarto. A marcação destes pontos na reta numérica permitiu interpretar a fração com um significado de medida, em que o denominador parece significar a parte que se obtém quando o todo é dividido num dado número de partes e o numerador como o número de partes que se consideram.

Nesta etapa da experiência de ensino os alunos envolveram-se numa aprendizagem mais formal da fração, dando sentido à sua estrutura e movimentando-se entre frações, embora ao longo das outras etapas já tivessem feito referência às frações. A sua estrutura pareceu ser entendida como uma forma de representar um número, como uma relação entre o que estava a ser considerado e a unidade a que se referia. Com as frações, nomeadamente com as frações decimais, percecionaram que à medida que o número de partes em que a unidade foi dividia aumentava, cada parte ficava progressivamente mais pequena o que parecia não ser tão evidente com a representação decimal, que parecia apelar sobretudo ao número como grandeza. Por outro lado, a turma pareceu ir construindo uma compreensão das diferentes representações de forma a interrelacioná-las, o que deu forma à ideia de que o mesmo número racional pode ser escrito de várias formas, sem que a sua grandeza se altere.

Discussão e conclusão

Neste artigo analisamos uma experiência de ensino que, tendo por base um trabalho com as diferentes representações do número racional, se focou inicialmente na percentagem e fez emergir posteriormente o numeral decimal e a fração. O nosso objetivo era perceber que contributo uma abordagem seguindo esta sequência, apoiada pela percentagem no significado de medida, poderia dar na construção da compreensão da natureza relacional dos números racionais, numa perspetiva de sentido de número.

A trajetória hipotética de aprendizagem que orientou esta experiência e, consequentemente, a sequência de tarefas que a operacionalizou, é específica em relação à turma para a qual foi desenhada. Não se trata de uma progressão de aprendizagem estruturada em etapas estanques ou necessariamente eficaz, independentemente das características da turma e da cultura da sala de aula. A análise conceptual desta trajetória remete-nos para as características da aprendizagem desta turma, enquanto processo social e cultural, não pretendendo descrever a aprendizagem individual dos alunos.

Do trabalho com os números inteiros, os alunos traziam flexibilidade em manipular os números, bem como o entendimento da contagem de unidades de um dado conjunto, sendo 1 usado como unidade. A compreensão do sentido de completude da percentagem permite aliar este entendimento de medida e salientar a natureza multiplicativa dos números racionais. Numa primeira fase, quando os alunos constatam que uma barra de estado ou um recipiente apresentam um dado valor de preenchimento em percentagem, entendem este valor como um conjunto de elementos, em que a unidade de medida é 1, mas também o veem como medida da relação que a parte tem com o todo (ou seja, 100%), tirando partido da base 100 (MOSS; CASE, 1999). A medida desempenha um papel fundamental no início deste processo de extensão dos conhecimentos numéricos aos números racionais, permitindo interpretar os outros significados de número racional (LAMOM, 2007). Progressivamente, os alunos percecionam a relação de proporcionalidade que a percentagem permite estabelecer entre duas quantidades de natureza diferente, enquanto medida de razão de base 100, que, contudo, ainda não conceptualizam. E observam também que a grandeza relativa de um número racional, representado em percentagem, é indissociável da unidade considerada, isto é, não faz sentido sem considerar o todo a que diz respeito. Compreendem por exemplo que existe um preço inicial, um preço final e uma relação entre ambos que é de 70%, relação que começam a construir como multiplicativa. Nesta etapa, o número racional ganha sentido enquanto quantidade relativa (BROWN, 2015).

O numeral decimal surge como representação alternativa à percentagem, primeiro com arredondamento às centésimas, privilegiando o entendimento que os alunos trazem da percentagem na base 100 e, posteriormente, recorrendo a estratégias de agrupamento e partição, surgindo as décimas e as milésimas. Os alunos percecionam que 10% podem ser convertidos em 10 centésimas e 5% em 5 centésimas, reconhecendo a importância que o valor de posição dos algarismos assume na notação desta representação, por analogia com a percentagem. Nesta etapa, os alunos constroem e mobilizam números de referência, nomeadamente frações simples (por exemplo interpretando 1/4 como 25 centésimas) quando procuram dar sentido a situações numéricas recorrendo a conversões simples

(MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005; MOSS; CASE, 1999). A compreensão desta representação surge apoiada no significado de medida, tendo como suporte a reta numérica dupla, como modelo de escala linear. Os alunos percecionam que os números representados como numeral decimal indicam uma distância em relação à unidade, que é tanto mais precisa e difícil de marcar com exatidão na reta numérica quanto mais algarismos tiver a parte não inteira do número nessa representação. Esta perceção abre caminho no sentido da compreensão da densidade associada aos números racionais (VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004).

O trabalho para a compreensão da fração surge apoiado nos conhecimentos da percentagem e do numeral decimal, de forma interrelacionada. Os alunos percebem que é possível converter percentagem em numeral decimal e numeral decimal em fração decimal a partir das regularidades e aspetos comuns a cada representação. A ideia que um mesmo número, ou seja, uma mesma quantidade, se pode expressar através de diferentes representações simbólicas, que envolvem diferentes notações ou mesmo diferentes formas da mesma notação (como frações equivalentes), contribui para o seu uso de forma flexível, em função do contexto (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005). Recorrendo à reta numérica, os alunos conceptualizam a fração não apenas como uma parte do todo, mas como uma iteração de uma dada fração unitária, considerando a sua relação com a unidade considerada. As frações são assim interpretadas como um número que traduz a medida da relação da parte em relação à unidade, e não como dois números inteiros que traduzem uma relação parte-todo. Esta perceção permite identificar a ordem de grandeza do número que a fração representa, intuindo o significado de razão subjacente à relação entre numerador e denominador.

Apesar da aprendizagem dois números racionais não se tratar de um processo linear é possível identificar um conjunto de aspetos inerentes a esta trajetória que parecem ter contribuído para o desenvolvimento da compreensão da natureza relacional destes números pela turma, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, nomeadamente: 1) a mobilização e ampliação de conhecimentos prévios relativos aos números inteiros (CCSSI, 2010); 2) a valorização dos conhecimentos intuitivos de percentagem e razão, aliados à capacidade de decompor números, para enfatizar a sua grandeza, apoiada no uso de modelos (MOSS; CASE, 1999; SIEGLER, 2016); 3) a valorização do significado de medida, como ponte entre a contagem e a medição, associando um número a uma quantidade de grandeza e invocando a necessidade de refinamento (LAMON, 2010; PONTE; SERRAZINA, 2000); 4) a enfase na relação de proporcionalidade que cada representação envolve, destacando a relação entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere, no sentido da construção de relações multiplicativas (GALEN et al., 2008; MOSS, 2002); e 5) a construção de uma estrutura conceptual, apoiada na percentagem, que apela progressivamente ao uso de outras representações e à compreensão da sua notação, integrando-as na compreensão do sistema de números racionais como um todo (MOSS, 2002).

A aprendizagem dos números racionais é um processo complexo, que tem início nesta etapa da escolaridade e que se procura, gradualmente, desenvolver no sentido de uma compreensão robusta e flexível das diferentes representações do número racional, enquanto aspeto fundamental na aprendizagem dos números racionais (TIAN; SIEGLER, 2017). A literatura divide-se em relação à ordem pela qual as representações dos números racionais devem ser introduzidas, havendo também autores que consideram que essa ordem não é decisiva, mas as discussões sobre estas questões raramente envolvem a percentagem (MOSS; CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017). Neste estudo, a sequência segundo a qual as três representações dos números racionais surgiram na trajetória de aprendizagem vivida pela turma, influenciou a forma como os alunos foram construindo e relacionando as ideias subjacentes a este novo conjunto numérico, tendo por base um entendimento da grandeza dos números racionais na compreensão da sua natureza relacional. Estes resultados vêm reforçar a necessidade de considerar a percentagem nesta discussão, mostrando que a sua valorização no trabalho a realizar pelos alunos pode trazer importantes benefícios para a sua aprendizagem.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento, através de uma bolsa atribuída à 1.ª autora.

Referências

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. 1.ª ed. Lisboa: ME–DEB, 1999. 113 p.

BERCH, D.B. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. **Journal of Learning Disabilities**, California, v. 38, n. 4, p. 333-339, jul. 2005.

BROWN, B. The relational nature of rational numbers. **Pythagoras**, Centurion, v. 36, n. 1, p. 1-8, jan. 2015.

COBB, P. et al. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, v. 32, n. 1, p. 9-13. Jan.2003.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Eds.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York: Routledge, 2016. p. 481-503.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common core state standards for mathematics**. Washington, 2010. 93 p. Disponível em: http://www.corestandards.org/Math/. Acesso a: 15 nov. 2017.

CONFREY, J.; LACHANCE, A. Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 231-266.

CONFREY, J.; MALONEY, A. The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE LEARNING SCIENCES, 9, 2010, Chicago. **Proceedings…** Chicago: International Society of the Learning Sciences, 2010. p. 968-975.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**: China lectures. Dordrecht: Kluwer, 1991. 199 p.

GALEN, F. et al. **Fractions, percentages, decimals and proportions**: a learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. 1.ª. ed. Rotterdam: Sense, 2008. 163 p.

GOETZ, J. P.; LECOMPTE, M. D. **Ethnography and qualitative design in educational research**. 2.ª ed. New York: Academic, 1984, 292 p.

GRAVEMEIJER, K.; VAN EERDE, D. Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. **The Elementary School Journal**, Chicago, v. 109, n. 5, p. 510-524. may 2009.

HOWDEN, H. Teaching number sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 36, n. 6, p. 6-11, feb. 1989.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA. **Carta ética para a investigação em educação e formação**. Lisboa, 2016. 2 p. Disponível em: <http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica> Acesso a: 15 nov. 2017.

LAMON, S.J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: Lester, F. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007, v. 1, p. 629-667.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ª ed. New York: Routledge, 2012, 254 p.

MARKOVITS, Z.; SOWDER, J. Developing number sense: An intervention study in grade 7. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 25, n. 1, p. 4-29, jan. 1994.

MCINTOSH, A.; REYS, J.; REYS, E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, White Rock, v. 12, n. 3, p. 2-8 e 44, nov. 1992.

MIDDLETON, J. A.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; SHEW, J. A. Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 3, n. 4, p. 302-312, jan. 1998.

MOSS, J. Percents and Proportion at the Center: Altering the Teaching Sequence for Rational Number. In: LITWILLER, B. (Ed.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 Yearbook**. Reston: NCTM, 2002. p. 109-120.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar.1999.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles to actions**: ensuring mathematical success for all. 1.ª ed. Reston: NCTM, 2014. 140 p.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em *design* para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 2, p. 77-98, 2.º semestre. 2016.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º ciclo**. 1.ª ed. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. 257 p.

PREDIGER, S. Focussing structural relations in the bar board – a design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In: EIGHT EUROPEAN CONFERENCE OF RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8, 2013, Ankara. **Proceedings…** Ankara: ERME, 2013. p. 343-352.

PREDIGER, S.; GRAVEMEIJER, K.; CONFREY, J. Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. **ZDM**, Berlim, v. 47, n. 6, p. 877-891. oct. 2015.

SIEGLER, R. S. et al. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, Cambridge, v. 17, n. 1, jan. 2013.

SIEGLER, R.S.; THOMPSON, C.A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, Amsterdam, v. 62, n. 4, p. 273-296, jun. 2011.

SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, mar. 1995.

SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. Number sense-making. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 41, n.6, p. 342-346. Feb. 1994.

STEPHAN, M.; CLEMENTS, D.H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. CLEMENTS (Ed**.), Learning and teaching measurement: 65th Yearbook,** Reston: NCTM, 2003. p. 3-16.

TIAN, J.; SIEGLER, R.S. Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First?. **Educational Psychology Review**, USA, p. 1-22, jul. 2017.

VAMVAKOUSSI, X.; VOSNIADOU, S. Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. **Learning and Instruction**, Cambridge, 2004, v. 14, n. 5, p. 453-467, oct. 2004.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DRIJVERS, P. (2014). Realistic mathematics education. In: S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of mathematics education**. Netherlands, 2014. p. 521-525.

Texto recebido: 04/01/2018
Texto aprovado: 22/03/2018