EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p385-418

Estratégias didáticas com tecnologias na formação continuada de professores de Matemática: uma investigação sobre homotetia

Didactic strategies with technologies in the continuous education of Mathematics teachers: an investigation about homothety

GERSON PASTRE DE OLIVEIRA [1]
NILO SILVEIRA MONTEIRO DE LIMA [2]

Resumo

Este trabalho descreve uma investigação qualitativa que teve como sujeitos um grupo de professores de Matemática da Escola Básica Pública que participaram voluntariamente de uma iniciativa de formação continuada. A pesquisa aqui descrita teve como objetivo constituir estratégias didáticas por meio das quais os professores pudessem aprimorar/ressignificar seus conhecimentos acerca de um tema da geometria euclidiana plana, a homotetia. Os sujeitos participaram de uma série de atividades com o uso de tecnologias digitais e não digitais, por meio de interações virtuais e presencias, em regime de convergência, no âmbito das quais puderam constituir um percurso investigativo que lhes permitiu realizar progressos em relação aos saberes que possuíam acerca do tema, principalmente por meio de formação de coletivos compostos por professores e tecnologias, bem como a partir do desenvolvimento de fluência em relação às interfaces em jogo.

Palavras-chave: *Estratégias didáticas, tecnologias na Educação Matemática, geometria euclidiana plana, homotetia, formação de professores de Matemática.*

Abstract

This paper describes a qualitative investigation that had as subjects a group of Mathematics teachers of Public Basic School who voluntarily participated in a continuous education initiative. The aim of the research here described was to constitute didactic strategies through which the teachers could improve / re-significate their knowledge about a theme of Euclidean plane geometry, homothety. The subjects participated of several activities with the use of digital and non-digital technologies, through virtual interactions and regular ones, under a convergence regime, within which they could constitute an investigative path that allowed them to make progress in relation to the knowledge that had on the subject, mainly through the formation of collective composed of teachers and technologies, as well as from the development of fluency in relation to the interfaces at play.

[1] Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP – Doutor em Educação (USP) – gpastre@pucsp.br
[2] Doutorando do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP – Mestre em Educação Matemática (PUC/SP) – nilosmdelima@gmail.com

Keywords: *Didactic strategies, technologies in Mathematics Education, Euclidean plane geometry, mathematics teachers education.*

Introdução

A formação do professor que ensina matemática tem despertado o interesse de diversos centros de pesquisa, no Brasil e em outros países, principalmente a partir da década de 1980, como asseveraram Curi e Pires (2008). Trata-se de tema de importância indiscutível e que pode trazer à baila uma série de discussões acerca de que conhecimentos são necessários para a atuação deste profissional nos processos de ensino. Neste sentido, Shulman (1986) destaca a importância de que a formação docente, em caráter geral, volte seus esforços para abarcar não apenas a constituição do professor como especialista em didáticas e abordagens pedagógicas, mas como alguém que domina os conteúdos das disciplinas com as quais trabalha.

Em meio a recomendações que envolvem conhecimentos subsidiários acerca, por exemplo, do currículo e das questões sociais relativas aos alunos, Shulman (1986) indica uma interseção crítica e fundamental como foco para os processos formativos relativos à profissão docente, chamada por ele de conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagical content knowledge* – PCK). É um conhecimento que surge e se consolida na própria prática, constituído que é quando o professor lança mão de estratégias e de recursos de ordem didática para que seus estudantes tenham condições de engajamento em um processo de construção do conhecimento. Em outras palavras, é o conhecimento típico de base para um movimento que Chevallard (1991) chama de transposição didática, ou seja, um conjunto de transformações adaptativas que, tendo como referência um saber científico ou acadêmico, visam vertê-lo em um saber a ensinar, em uma forma e com abordagens passíveis de assimilação por parte dos estudantes. O professor é um dos agentes da transposição, no momento em que toma este saber por assim dizer transformado para seu trabalho e o ressignifica a partir de estratégias didáticas que não prescindem da referência em relação ao saber formal. Isto quer dizer que dominar o conhecimento que pretende ensinar tem grande importância quando se fala sobre o conjunto de competências docentes. Assim, os processos formativos continuados têm a possibilidade de reestruturar e qualificar esta construção de saberes em suas múltiplas facetas, e são muito importantes na constituição do professor como organizador do processo de ensino.

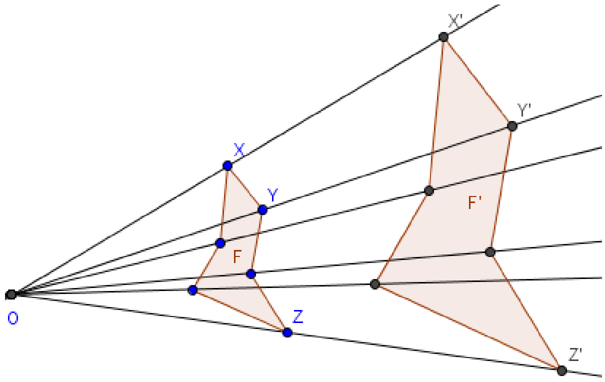
O trabalho aqui apresentada parte de um contexto de formação de professores de Matemática que considera, de maneira subjacente, a possibilidade de trabalho conjunto dos aspectos didático e específico do conhecimento destes profissionais, a partir de uma sequência de problemas de Geometria Euclidiana Plana. Considera, também, um terceiro componente, representado pelas tecnologias, sobretudo as de caráter digital. Mais especificamente, esta investigação tem, como sujeitos, um grupo de professores que ensinam matemática e que eram, à época da pesquisa que fundamenta a redação deste artigo, alunos no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. De outro ponto de vista, são professores que iniciaram sua formação como pesquisadores na área mencionada, e que participaram voluntariamente das sessões a partir das quais foi possível recolher os dados empregados nas análises, os quais, por sua vez, foram obtidos por meio de uma sequência didática composta por seis atividades, estruturadas para permitir que estes professores elaborassem suas respostas a partir do uso de tecnologias digitais – mais especificamente, o software GeoGebra. O acréscimo do componente tecnológico procura contemplar um importante aspecto relativo à possibilidade de uso de recursos desta natureza tanto na aprendizagem/ressignificação de conhecimentos para a prática quanta da constituição de estratégias didáticas para o trabalho com os diversos conteúdos ligados ao ensino de matemática. Esta característica do estudo é explorada mais adiante, quando o referencial teórico deste artigo é evidenciado.

Ainda no campo do conhecimento específico, o interesse matemático eleito para esta investigação é a homotetia. Para Lima (1991, p. 46), “toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa paralela”. Além disso, o mesmo autor assevera, à guisa de definição:

> Sejam O um ponto no plano $\prod$ (ou do espaço E) e r um número real positivo. A homotetia de centro em O e a razão r é a função σ: $\prod \rightarrow \prod$ (ou σ: $E \rightarrow E$) definida do seguinte modo: $\sigma(O)=O$ e para todo $X \neq O$, $\sigma(X)=X'$ é o ponto da semirreta OX tal que $OX' = r.OX$. (LIMA,1991, p.45).

Em uma homotetia, para todo ponto X que não seja o seu centro, há um semelhante X' tal que $OX'= r.OX$. A homotetia pode ser, então, em função dos valores atribuídos a r, identidade, quando r=1, transformando toda reta que passa por O nela mesma; inversa, quando tem mesmo centro O e razão $\frac{1}{r}$. Desta forma, duas figuras F e F' são ditas homotéticas quando há uma homotetia σ tal que $\sigma(F)=F'$, como se vê na Figura 1.

Figura 1 – Homotetia $\sigma(F)=F'$ de centro O e razão 2



Fonte: elaborado pelos autores

Após estas definições prévias, Lima (1991) distingue homotetia de semelhança, de modo geral:

> [...] numa homotetia os pontos O, X, X' são sempre colineares e nesta ordem se $r>1$, ou na ordem O, X', X, caso $0<r<1$; já numa semelhança, as figuras F e F' podem ocupar posições quaisquer, como numa foto e sua ampliação que podem ser postas em vários lugares, mas continuam semelhantes (LIMA, 1991, p. 45).

No caso de um estudo por meio de construções geométricas na qual esta razão esteja a definir a proporção entre duas figuras, trata-se de uma homotetia direta quando houver uma ampliação, no caso $k>1$; uma identidade, no caso $k=1$; e uma redução, no caso $0<k<1$.

Além disso, Luis (2006) aponta que existem os casos inversos de homotetia, na hipótese da adoção de um tratamento vetorial das figuras poligonais, de ampliação inversa para $k<-1$, identidade inversa, para $k=-1$ e redução inversa, no caso $0>k>-1$. Nestes casos de inversão de um polígono, observa-se que as razões são negativas, na medida em que expressam um afastamento em relação ao ponto que origina a homotetia, comportamento que pode ser observado em casos de simetria axial, por exemplo.

Neste sentido, pode-se dizer que esta transformação possui aspectos fundamentais e desdobramentos relevantes em relação a outros estudos importantes no âmbito da Geometria, a partir da ideia de proporcionalidade, como os casos de semelhança de triângulos e polígonos, as relações métricas no triângulo retângulo, os teoremas de Pitágoras e de Tales, entre outros tópicos.

De fato, o tema "semelhança" surge de forma bastante entrelaçada quando se pretende falar de homotetia. Esta noção, a de semelhança, segundo Moise e Downs (1971), parte da ideia de proporcionalidade, na qual duas figuras geométricas, no caso poligonais, possuem exatamente a mesma forma, sem, contudo, possuírem necessariamente as mesmas medidas. O termo “forma”, nesse contexto, refere-se às propriedades geométricas que essas figuras têm em comum: uma escala entre as medidas dos lados e a congruência dos seus ângulos internos. Escala, neste caso, diz respeito à razão de semelhança entre as propriedades das figuras em questão.

Outra definição da mesma noção, alinhada com a perspectiva exposta por Lima (1991) e retomada por Luis (2006), parte de um estudo de figuras, não necessariamente poligonais, mas que conservam a sua forma quando se realizam ampliações e reduções da mesma de acordo com uma razão de semelhança. Ao relacionar dois conjuntos de pontos, figuras planas ou espaciais, chamadas aqui F e F', estas são consideradas semelhantes se existe uma correspondência biunívoca $\sigma: F \rightarrow F'$ entre elas, que faz com que cada ponto de F relacione-se a apenas um de F', e ambas possuam o mesmo número de pontos, com uma razão de semelhança r. Disto, vem a seguinte propriedade: se X, Y são pontos quaisquer de F e $\sigma(X)=X'$, X e X' homólogos; $\sigma(Y)=Y'$, Y e Y' homólogos, então X' e Y' são seus correspondentes em F'; logo, $X'Y' = r.\ XY$.

Para cada valor que r assume, há consequências para a forma estudada, sendo reduzida, conservada ou ampliada em relação a original. Neste caso, será ampliada quando $r > 1$; conservada, pelo princípio da identidade, quando $r = 1$, chamando-se isometria, a qual determina que a distância entre dois pontos X e Y de F é a mesma distância entre seus homólogos X' e Y' em F' (também se chama congruência). E, por fim, a forma é reduzida quando $0 < r < 1$ (trata-se da função inversa de σ, $\sigma^{-1}: F' \rightarrow F$ tal que $\frac{1}{r}$ é a razão de semelhança).

Considerando figuras poligonais, a abordagem por meio de homotetia proporcionaria, segundo Lima (1991), um estudo

> [...] extremamente simples e que permite desenvolver toda a teoria elementarmente. Nossos livros didáticos poderiam adotá-las com vantagens. Assim fazendo evitariam um tratamento incompleto, no qual se dá uma definição válida apenas para polígonos, enquanto a maior parte dos exemplos que encontramos não se enquadra nessa categoria (LIMA, 1991, p.39).

Outra abordagem, de acordo com o mesmo autor, componente de um estudo de relações dos elementos fundamentais das construções aqui empregados, tais como pontos, segmentos de reta, semirretas e retas, parte da noção de proporcionalidade de tal maneira que, dados dois segmentos de reta arbitrários, AB e CD, se $CD = r.AB$, pode-se definir uma semelhança, $\sigma: AB \rightarrow CD$ de razão r de modo que, para cada X, elemento de AB, há um X' em CD de tal forma que $CX' = r.AX$. Esta semelhança se comprova a partir de que, ao admitir dois pontos arbitrários X e Y em AB, com X entre A e Y, pela definição de semelhança, há um ponto X' entre C e Y'. Logo $X'Y' = CY' - CX' = r.AY - r.AX = r.(AY-AX) = r.XY$. As demonstrações para semirretas e retas são análogas.

Em termos do uso social do conhecimento matemático, pode-se apontar que o domínio do tema aqui tratado não pode ser desprezado: Resende e Queiroz (2000), neste sentido, indicam a importância do estudo de semelhança como fundamental para áreas como Engenharia e Arquitetura, quando profissionais destas áreas empregam ampliação e redução de seus registros tais como mapas, plantas e maquetes. Em vista disto, de forma justa, pode-se questionar por que este estudo foi conduzido apenas com triângulos. Esta escolha se justifica, a princípio, por conta de uma suposta familiaridade dos sujeitos com elementos, propriedades e conceitos a serem mobilizados na construção da definição geral de semelhança por meio da homotetia. Neste caso, ainda que os mesmos sejam mestrandos, potencialmente trabalharam estes temas por meio de atividades roteirizadas, que priorizam algoritmos em detrimento da percepção, apuração, inferência e generalização das propriedades evidenciadas por construções geométricas. O emprego de softwares dinâmicos de geometria no âmbito de uma estratégia didática colaborativa concorre, segundo se supõe, para a revisão deste quadro.

Ainda com relação ao objeto tratado neste texto, Resende e Queiroz (2000) indicam a divisão do tema "semelhança" nos seguintes tópicos: a ideia e o teorema sobre proporcionalidade, teorema fundamental de semelhança por meio do conceito de lomotetia, semelhança nos triângulos quando ocorre um dentre os casos *AAA* (ângulo, ângulo, ângulo), *LLL* (lado, lado, lado) e *LAL* (lado, ângulo, lado). Ainda se deve considerar o teorema da semelhança nos triângulos retângulos.

A partir da estruturação destes tópicos iniciais, pode-se trabalhar outros temas correlatos, como as áreas de triângulos semelhantes, as razões trigonométricas, a trigonometria numérica e as relações entre as razões trigonométricas, além do tópico de semelhança de polígonos, entre outros.

A expectativa, quando da eleição deste elemento em relação aos sujeitos da pesquisa, era a de alinhar estratégias didáticas para estimular, em conjunto com a escolha de um software dinâmico de geometria como o Geogebra, em atividades de cunho investigativo, uma oportunidade de revisitar conceitos, compreender estruturas e lógicas próprias da Geometria Euclidiana, e propor uma modificação em relação à maneira pela qual os mesmos compreendem a Matemática, superando a visão por meio da qual se consolidam um conjunto de métodos e equações apenas voltado à resolução de questões repetitivas.

Além disso, por meio da investigação descrita neste trabalho, procurou-se subsídios para compreender de que maneira se caracteriza uma trajetória de resolução de problemas, envolvendo professores de Matemática da Escola Básica, acerca do tema *homotetia* e de tópicos matemáticos correlatos, constituída a partir de uma proposta que envolve tanto a resolução de atividades por pessoas-com-tecnologias como o desenvolvimento de fluência em relação às interfaces empregadas. Neste sentido, procurou-se desenvolver uma estratégia didática para uso de tecnologias em atividades/problemas ligados à geometria plana, tendo a homotetia como elemento matemático principal, e a intenção de evidenciar as compreensões constituídas a partir de pressupostos interativos no âmbito de pessoas-com-tecnologias-digitais.

Assim, procurou-se, nesta investigação, propor trajetórias de ressignificação do conhecimento que se constituíssem de forma colaborativa e/ou cooperativa e/ou individual, de acordo com as características preferenciais dos sujeitos envolvidos. Neste artigo, as interações desta forma ocorridas são descritas e analisadas, especificamente em relação a duas das atividades contidas no roteiro proposto originalmente e que é explicado mais adiante. Este movimento, composto por descrição e análises, tem por fundamento um marco teórico, que se procura explicitar a seguir.

Aportes teóricos

Uma forma de pensar na inserção das tecnologias na sociedade – e, por consequência, nos processos educativos – é assumir que as mesmas representam recursos que subsidiam o trabalho intelectual das pessoas em seus percursos de vida. Neste sentido, assume-se o pressuposto de que a construção do conhecimento ocorre a partir de um coletivo formado por seres-humanos-com-tecnologias (Borba e Villarreal, 2005), possível quando se desenvolve a apropriação da lógica das mídias envolvidas ao adquirir fluência no uso das mesmas (Oliveira, 2013). Na base destes constructos teóricos, estão as proposições de Lévy (1993) e de Tikhomirov (1981).

Os processos educativos, por exemplo, utilizaram tecnologias diversas em praticamente todos os movimentos históricos já registrados. Mesmo que os tempos mais recentes tenham trazido avanços de toda ordem, no sentido de tornar mais sofisticadas as tecnologias, quer no que se refere ao instrumental (equipamentos), quer quanto ao funcional (programas), em uma proposta de extensão das capacidades humanas (pensar, agir e comunicar), não se pode negar que tecnologias diversificadas foram engendradas, ao longo dos tempos, para ampliar as aptidões e o pensamento das pessoas. Para Lévy (1993), o processo evolutivo humano foi constituído a partir de três paradigmas fundamentais, classificados por ele como tempos do espírito, e objetivados na oralidade, na escrita e no polo informático-midiático, com prevalência de algum deles em distintos momentos históricos. Desta forma, oralidade, escrita e informática são, na verdade, tecnologias da inteligência, ou seja, assumem, dado um contexto e momento histórico, funções e ganhos específicos para a construção, manutenção e divulgação do conhecimento.

Desta maneira, o autor francês assevera que mesmo aquelas tecnologias apontadas às vezes como antigas ou ultrapassadas, assim como a oralidade e a escrita, não perdem seu valor, apesar da ascensão da tecnologia informática; na verdade, ampliam ou reduzem sua importância ao longo do tempo e de acordo com as circunstâncias, mas tendem à convergência, em função dos objetivos com que são empregadas (Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015). Assim, quando se fala de tecnologias digitais, está incluso um aspecto típico do polo informático-midiático: aglutinar as outras formas de comunicação e informação sob outra lógica, que inclui velocidade ampliada, temporalidade distinta e outras funções para elementos como a inteligência e a memória (Lévy, 1993; Oliveira e Marcelino, 2015).

De outro ponto de vista, contudo, desde a sua gênese, a informática faz com que se adaptassem novas interfaces às necessidades dos usuários e que se acumulassem novas funções nos softwares, ampliando a gama de possibilidades dos seus usos e das produções intelectuais mediadas pelas mesmas em um ritmo tão surpreendente, guardadas as devidas proporções, quanto o da Renascença, trazendo novos elementos indispensáveis à produção de conhecimento humano contemporâneo (Lévy, 1993). Um destes novos estilos é constituído pela simulação por meio dos modelos digitais, promovida por conta do seu caráter exploratório, de forma interativa, substituindo situações nas quais os altos custos de toda natureza impediriam a realização de determinado estudo. São as simulações que permitem trazer à tona as representações, inclusive dos objetos matemáticos, conferindo às mesmas a possibilidade de experimentação intensiva, visualização e dinamismo.

Neste sentido, podem ser mencionadas as possibilidades abertas pela disponibilidade das tecnologias informáticas que se alinham com a perspectiva teórico-metodológica desta proposta, como, por exemplo, a criação de simulações digitais por meio de softwares dinâmicos de matemática como o GeoGebra. Este software, aliás, faz parte daquele conjunto de ferramentas que, segundo Borba e Villarreal (2005), constituem

> [...] uma nova extensão da memória com diferenças qualitativas em relação com outras tecnologias da inteligência (como a oralidade e a escrita), e isto torna possível a compreensão linear ser desafiada por outras formas de pensamento, baseados em simulação, experimentação e a 'nova linguagem' que envolve escrita, oralidade, imagens, e comunicação instantânea. Nesse contexto a metáfora da linearidade é cada vez mais substituída pela descontinuidade que caracteriza o uso da internet (BORBA E VILLARREAL, 2005, p.22).

Em relação à forma como se pode encarar a relação entre pessoas e computadores (ou outras mídias), Borba e Villarreal (2005) propugnam que tais elementos e os seres humanos deveriam ser considerados como elementos que se integram na construção do conhecimento contemporâneo. Mais que isto, o constructo de ordem teórica pensado pelos autores mencionados traz à tona a concepção de que o conhecimento

> [...] é produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias e não somente por seres humanos ou por grupos destes, ou seja, as mídias não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer Matemática, pois elas mudam a natureza do que é feito, sugerindo, assim, que diferentes coletivos humanos com mídias produzem diferentes formas de acessar o conhecimento matemático (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015, p. 475).

Ainda aqui, a proposta do constructo mencionado tem suas bases filosóficas constituídas a partir do pensamento de Lévy (1993), o qual já havia reivindicado que as construções mentais seriam obra de coletivos de pessoas e dispositivos diversos:

> Qual a imagem que sobressai desta dissolução do sujeito cognitivo em uma microssociedade biológica e funcional de base, e de sua imbricação em uma megassociedade povoada por homens, representações, técnicas de transmissão e de dispositivos de armazenamento, no topo? Quem pensa? Não há mais sujeito ou substância pensante, nem "material", nem "espiritual". O pensamento se dá em uma rede na qual neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escrita, livros e computadores se interconectam, transformam e traduzem as representações (LÉVY, 1993, p. 135).

Outra perspectiva do constructo teórico seres-humanos-com-mídias se constitui a partir da ideia de que as mídias exercem a possibilidade de reorganizar o pensamento das pessoas que com elas se integram. Isto é importante em relação a esta pesquisa, a partir da qual se pretendeu averiguar as formas pelas quais estas reorganizações do pensamento dos participantes envolvidos se deram ao longo das dinâmicas de resolução de problemas matemáticos a partir do uso de tecnologias digitais da inteligência.

A proposição em torno da qual a reorganização do pensamento seria um efeito da integração entre pessoas e mídias surge com Tikhomirov (1981). Para o autor russo, não há sentido nas duas ideias mais vulgarmente divulgadas sobre a função dos sistemas computacionais, que seriam a de substituição e a de suplementação. Para ele, então, os computadores poderiam alterar significativamente o arcabouço estrutural da atividade intelectual. Desta forma,

> O processo de aquisição de conhecimento é alterado (por exemplo, passa a ser possível reduzir o número de procedimentos formais a ser adquirido graças ao uso do computador). Isto nos dá base para afirmar que, como resultado da informatização, um novo estágio no desenvolvimento ontogenético do pensamento também se desenvolveu. [...] A memória, o armazenamento de informações, e sua busca (ou reprodução), são reorganizados. A comunicação é alterada, uma vez que a comunicação humana com o computador, especialmente quando linguagens similares à natural são criadas, é uma nova forma de comunicação. As relações humanas passam a ser mediadas pelo uso de computadores (TIKHOMIROV, 1981, p. 274).

Parece claro, de toda maneira, que, ainda que as mídias digitais assumam esta possibilidade de reorganizar o pensamento, as mesmas não determinam a constituição do conhecimento, mas condicionam-no, à medida que, mesmo sendo factível “desenvolver conhecimento na ausência de determinada tecnologia [...] algumas possibilidades como dinamismo, visualização múltipla e experimentação intensiva são melhor objetivadas a partir do uso de tecnologias digitais” (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015, p. 478).

Deste modo, atividades de investigação de temas matemáticos por meio de mídias digitais como as realizadas nesta pesquisa lançam mão da tríade supramencionada, constituída pelas ações de experimentar e visualizar, apoiadas no dinamismo típico das interfaces digitais. A experimentação, neste contexto, assume um papel que vai além de reduzir estes momentos de ensaio por meio de uma mídia digital aos atos de apenas "pressionar botões" ou "movimentar o mouse". Aqui, estes atos assumem o papel de proporcionar que os sujeitos conjecturem, e em conjunto com várias representações, iniciem um renovado processo de tentativa e erro (BORBA; VILLAREAL, 2005, p. 73) que pode subsidiar pensamentos mais avançados, como os ligados à demonstração, por exemplo.

Este processo de "tentativa e erro" pode partir de um empirismo que promova, em seguida, o levantamento de hipóteses, o teste de conjecturas, a argumentação e até mesmo o alcance de generalizações, ou seja, como Borba e Villarreal (2005) indicam, por meio de uma citação de Lakatos (1976 apud BORBA; VILLARREAL, 2005), agir tendo por base elementos próprios da descrição da lógica das descobertas matemáticas, ou seja, comportamento mais que desejável de acordo com a problemática da pesquisa aqui proposta. Isto pode, em certa medida, soar estranho, mas nada mais significa do que uma constatação, como aquela vista por Lévy (1993): “uma das mais estranhas modificações ligadas ao uso das simulações digitais é a que hoje afeta as matemáticas.

Tradicionalmente consideradas como reino da dedução, elas também estão adquirindo um caráter experimental. Simulações de objetos matemáticos podem infirmar, confirmar, ou gerar conjecturas (LÉVY, 1993, p. 104).

O autor francês aponta que a experimentação e a simulação são elementos importantes em relação à produção do conhecimento em um cenário com tecnologias da inteligência, e os modelos tecnológicos digitais vão neste sentido. No contexto mencionado, simulação e experimentação possuem constituições distintas daquela relativa a um objeto de conhecimento, mas podem funcionar como elementos básicos, precursores, por assim dizer, para a construção dos conceitos em estudo. Ainda que subsistam marcantes distinções entre as tecnologias digitais e as chamadas "tecnologias tradicionais" (não digitais e/ou historicamente constituídas como típicas de uma área – lápis e papel, por exemplo), o que ressalta do discurso teórico aqui defendido pode ser resumido pelo termo "convergência", o qual significa, de modo diverso da substituição, um postulado que envolve, de acordo com o processo educativo específico, os polos citados por Lévy (1993): oralidade, escrita e informática.

A visualização por sua vez, desde que os monitores possibilitaram o acesso às interfaces gráficas ao usuário comum de sistemas computacionais, tomou proporções que o próprio Tikhomirov (1981) não previu e que se desdobraram nos estudos de Borba e Villarreal (2005). Para estes autores, a visualização consiste em uma ação na qual a pessoa constitui um laço consistente entre um constructo interno e elementos em relação aos quais o sistema sensório estabelece acesso. Desta forma, ao mesmo tempo em que representa uma "construção mental de objetos" ou de "processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos como externos", a ação de visualizar "deve consistir em uma construção, em alguma mídia externa como papel, giz ou a tela de um computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifique com os objetos ou processos em sua mente" (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 441, tradução nossa). Em um levantamento teórico que realizaram, considerando diversos trabalhos, os autores destacam, no que tange à visualização, as seguintes definições:

- A visualização engloba a habilidade de interpretar e compreender informações de uma figura e a habilidade de conceituar e traduzir relações abstratas e informações que não estão na figura em termos visuais;
- No contexto matemático, é um processo de formação (construção) de imagens (mentalmente, via lápis e papel ou ainda com auxílio de [outras] tecnologias) e

seu uso tem o objetivo de obter melhor compreensão e estimular o processo de descoberta matemática;

- Trata-se de uma atividade intelectual que tem por base o emprego de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou concretos, executada para resolver problemas ou provar propriedades;
- Há, ainda, a visão ampla de autores como Zazkis, Dubinsky e Dautermann:

> Visualização é um ato do qual um indivíduo estabelece uma forte conexão entre um constructo interno e algo ao qual o acesso é estabelecido pelos sentidos. Tal conexão pode ser feita em ambas as direções. Um ato de visualizar deve consistir em qualquer construção mental de objetos ou processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos por ele/ela como externos. Por outro lado, um ato de visualização deve consistir em uma construção, em alguma mídia externa como papel, giz ou a tela de um computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifique com os objetos ou processos em sua mente (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.441).

Claro que falar em visualização não representa exatamente uma novidade em termos de Educação Matemática – e nem mesmo uma exclusividade relativa ao suporte das tecnologias digitais. As asserções de Barbosa (2009 apud Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015) indicam que, nas atividades relativas à matemática, no âmbito das quais a abstração pode ir além da percepção material, os matemáticos empregam processos simbólicos, diagramas e várias outras formas ligadas a processos que envolvem a imaginação e referências mentais. Neste sentido, a visualização cumpre um papel de interpretação, e não meramente de captação genérica de imagens; e esta interpretação se constitui a partir de trocas pessoais e sociais, frequentemente oriundas do contexto escolar e da, por assim dizer, convivência com as representações matemáticas mais comuns aos indivíduos.

Como elemento adicional, consta um dinamismo que pode ocorrer de maneira típica quando se empregam tecnologias digitais. A prática de “clicar-e-arrastar”, por exemplo, quando efetuada sobre alguma representação de objetos matemáticos, pode parecer usual e bem simples nestas quase duas décadas do século XXI, mas representa um aspecto revolucionário do acesso a elementos que podem fomentar a construção do conhecimento. Em um software dinâmico de geometria, por exemplo, arrastar um ponto e observar a manutenção de certas propriedades ou a evidenciação de outras pode ser uma oportunidade de bastante valia no processo de elaboração de conjecturas. A correlação entre experimentar e a instantaneidade da reação da interface abre um mundo de situações diferenciadas, em relação às representações de determinados objetos ou construções, no sentido de compreender, potencialmente, inúmeros casos particulares e aquilo que pode levar a generalizações.

Desta forma, a escolha de percursos investigativos mediante resolução de problemas em um software dinâmico de matemática como o GeoGebra, pode proporcionar uma oportunidade aos participantes para que os mesmos investiguem tais problemas, apurando informações a partir das manipulações e dos *feedbacks*, e organizem a própria argumentação acerca dos eventos em tela, reestruturando suas próprias concepções, e progressivamente, adotando novos usos à essa interação.

Neste artigo, o emprego das noções até aqui mencionadas, relativas às tecnologias digitais, permitiu analisar as produções dos sujeitos por meio de categorias que indicam se (e como) as características de visualização, experimentação e dinamismo foram mobilizadas como forma de fomentar conjecturas, debates, reflexões e outros tipos de interação. Também se procurou observar de que maneira surgem, nos problemas e suas resoluções, características que indiquem estar em processo alguma forma de reorganização de pensamento. Não obstante as descrições feitas até aqui, julga-se necessário abordar outro aspecto, relativo à fluência no uso de dispositivos digitais destinados a ensinar e/ou aprender, o que se faz a seguir.

Como se vem argumentando aqui, as tecnologias compõem, em conjunto com as pessoas, configurações que podem explorar aspectos como experimentação, visualização e dinamismo, com intensidades variadas, de acordo com o tipo de interface, com a finalidade de produzir vantagens no complexo processo de construção do conhecimento matemático. De igual modo, adota-se a perspectiva, nesta pesquisa, de que estratégias didáticas preparadas de forma consistente precisam coordenar, em uma iniciativa de ensino, a articulação entre o conhecimento requerido para a compreensão do objeto, a manipulação de suas representações e os meios pelos quais este trabalho pode ser feito. Em síntese, é dizer que o emprego de tecnologias de forma descolada em relação às estratégias didáticas pode apresentar resultados decepcionantes.

De outro modo, porém, se é certo que o conhecimento matemático deve orientar o processo, a constituição de certa desenvoltura nas interfaces tecnológicas solicitadas não deve ser desprezada. Quando há a mobilização de uma mídia nova em um processo de construção de conhecimento, surgem desafios a superar. Neste sentido, os esforços em torno da construção de habilidades específicas em relação às tecnologias eleitas independem da natureza das mesmas, o que equivale dizer que mesmo instrumentos vistos como mais “simples” ou portadores de menor potencial de dinamismo, como esquadros, transferidores, réguas, lápis-e-papel, entre outros, não prescindem daquilo que Oliveira (2013) chama *de fluência no uso das mídias*.

O autor elenca um conjunto de categorias que devem ser desenvolvidas em uma progressão interativa e não linear, com o objetivo de fazer com que o usuário domine os elementos da interface. A questão da fluência, posta pelo autor, desdobra-se em outras duas etapas, as quais se comunicam e abrem espaço às fases seguintes previstas pelo estudo mencionado, que compreendem a *exploração dos elementos da interface* e a *apropriação da lógica da interface em uso* (Oliveira, 2013; Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015; Oliveira, 2015).

A *exploração* tem por objetivo familiarizar o indivíduo com os instrumentos disponíveis na interface, e a *apropriação da lógica* pretende fazer progredir essa familiaridade e estabelecer as primeiras relações destes elementos com o saber matemático em jogo, necessário para a resolução de um problema.

A relevância da fluência na tecnologia escolhida para um processo de ensino pode ser de tal ordem que, se não desenvolvida de forma adequada, pode oportunizar que a interface concorra mais para atrapalhar do que para subsidiar o processo de construção do conhecimento matemático pelo sujeito, inclusive surgindo para impedir o desenvolvimento das conjecturas necessárias à investigação matemática. Sobre isto, Oliveira (2013, p. 6) destaca que "facilitar a construção de conhecimento é muito mais uma questão do percurso intelectual do sujeito e da estratégia didática docente". Neste sentido, então, "a fluência tecnológica (por si só) não garante o aprendizado"; ainda assim, e apesar destas observações, dificuldades neste percurso de aprendizagem podem estar vinculadas com a insuficiência desta fluência.

A expectativa é que a fluência nas tecnologias colabore para alcançar os efeitos apontados por Borba e Villarreal (2005) e Tikhomirov (1981), de modo que, por meio das interações com as mídias, sejam possíveis, em relação ao movimento de compreender, certas reorganizações do pensamento. Tais reorganizações tendem se consolidar à medida que o docente passa a agregar na sua prática a tecnologia digital sobre a qual desenvolveu certo nível de fluência.

Nesse meio tempo em que essas reorganizações ocorrem, os sujeitos têm a oportunidade de desenvolver desde o início deste ciclo, a partir da experimentação e a visualização por meio do dinamismo que o software proporciona, em conjunto com as situações propostas pelo docente, um pensar com tecnologias, à partir do incremento de seus "meios de raciocinar e conjecturar, o que pode ampliar possibilidades de uso dos conhecimentos matemáticos presentes em sua estrutura cognitiva, aprendendo a partir deles, mas não de maneira limitada a eles" (OLIVEIRA, 2013, p.10).

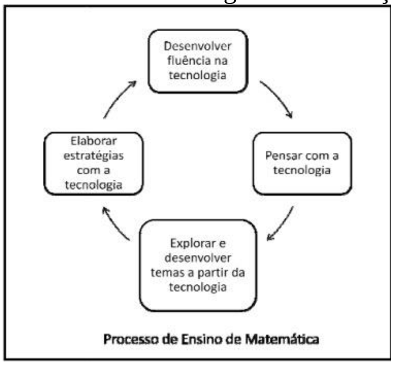
A terceira etapa deste ciclo, no qual o aprendiz se engaja a partir de sua adesão a um processo de aprendizagem, trata de explorar e desenvolver temas a partir da tecnologia empregada, ou seja, no caso deste trabalho, por exemplo, a partir do dinamismo oferecido pelo GeoGebra, proporcionar uma ampliação dos meios pelos quais se exploram os objetos matemáticos, ao integrar um conhecimento para a resolução de um problema, uma proposta investigativa que permita avançar em uma atividade e o seu espaço de experimentação. Nisto, espera-se que o aprendiz possa "visualizar suas propostas e refletir sobre as mesmas, de acordo com seus conhecimentos prévios e avançar em relação a eles" (OLIVEIRA, 2013, p.10), partindo, por exemplo, do ato de argumentar sobre condições de existência no contexto de um problema e alcançar uma generalização ou demonstração para o mesmo, na qual possa empregar a tecnologia como veículo de expressão para o seu pensamento3.

A quarta etapa consiste em elaborar estratégias com a tecnologia empregada. Segundo Oliveira (2013, p.11), ao elaborarem estratégias didáticas com o emprego de tecnologias, deve-se levar em consideração os níveis de aprofundamento de cada etapa da investigação matemática por meio das mídias escolhidas e os momentos necessários das intervenções do docente, de acordo com dificuldades que possam emergir no processo e no desenrolar das atividades que mobilizarão o objeto em questão.

A cadeia de eventos descrita nos passos anteriores não se encerra após o cumprimento de suas etapas, mas configura um ciclo, o qual se repete de formas distintas e não lineares, partindo da fluência até a elaboração de estratégias didáticas, para o ensino de outros objetos matemáticos que demandem o uso de outras tecnologias ou das mesmas, mas de outro modo, como pode ser visto no diagrama contido na Figura 2.

[3]Nos PCN (BRASIL, 1998, p.86) há uma citação quanto a esta possibilidade, ou seja, da passagem de um processo de argumentação para uma demonstração: "o refinamento das argumentações produzidas ocorre gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações".

Figura 2 - Ciclo de uso das tecnologias em Educação Matemática



Fonte: Oliveira, 2013, p.8

Assim, nas atividades descritas neste artigo, os aportes teóricos aqui explicitados pretenderam oferecer subsídios para análises que levantassem a relevância dos movimentos constituídos pelos sujeitos a partir das simulações computacionais, modeladas por eles com uso do software Geogebra, o que foi possível a partir de determinado nível de fluência sobre a interface em questão. Para atender a estes pressupostos, uma organização metodológica foi engendrada, conforme se descreve agora.

Aportes metodológicos

Características da investigação e descrições dos sujeitos e do ambiente

A investigação aqui descrita tem delineamento qualitativo, caracterizado pela importância do caráter processual de sua trajetória e pela relevância posta na interpretação das falas, escritos e construções geométricas propostas pelos sujeitos. As referências, em relação a este caráter interpretativo, permaneceram atreladas ao marco teórico empregado e ao saber matemático (geométrico) formal.

Participaram da pesquisa nove professores[4] da escola pública básica, os quais cursavam, no momento da pesquisa, o Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP. Os sujeitos participantes, na sua maior parte, atuavam na rede pública estadual de São Paulo ou municipal da capital paulista. Apenas três destes não atuavam, efetivamente, no momento da pesquisa, como professores, ainda que já o tivessem feito, ou possuíam menos de cinco anos de formados em suas licenciaturas de Matemática ou em Pedagogia, o que configura um perfil experiente, na sua maioria, na prática de sala de aula. As idades dos voluntários

[4] Os participantes da pesquisa foram identificados de P1 a P9, de modo a preservar o anonimato dos mesmos.

variavam entre 25 e 48 anos. O estudo foi realizado como uma das inciativas do grupo PEA-MAT (Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática)[5] e a adesão dos sujeitos ocorreu de forma voluntária, a partir de convite formulado pelos pesquisadores.

A coleta de dados previa e empregou duas formas distintas de interação: participações assíncronas por meio da ferramenta Fórum de discussão da plataforma Moodle e três encontros presenciais, realizados em sessões de duas horas cada, aos sábados, na sala de estudos do PEA-MAT no campus Consolação da PUC/SP. Tais encontros permitiram efetuar registros de áudio e vídeo, com prévio consentimento dos participantes, bem como recolher produções escritas dos sujeitos.

Em relação ao Moodle, caracterizado como um ambiente virtual de aprendizagem, seu emprego no âmbito da investigação permitiu que as atividades fossem compartilhadas, quanto à resolução, e que um processo colaborativo, ainda que tímido, tivesse lugar. Do ponto de vista deste estudo, considerou-se que o uso de tecnologias permanecia a serviço da estratégia didática planejada, que tinha por base as atividades descritas neste artigo. Desta forma, entende-se que tais atividades foram realizadas a partir de um regime de convergência de mídias e temporalidades (Oliveira, 2013; Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015), o que confere igual importância às interações que usaram ambientes virtuais ou presenciais, assim como interfaces digitais ou não digitais. Assim, ao longo das análises, não se faz distinção entre meios e momentos nos quais ocorreram as conjecturas e propostas de resolução pelos sujeitos.

Do ponto de vista das interfaces disponíveis para o trabalho dos sujeitos, os mesmos poderiam empregar tanto os meios tecnológicos vistos como tradicionais (lápis, papel, compasso) como o software de matemática dinâmica GeoGebra, que tem algumas vantagens consideráveis, como sua gratuidade e a relativa facilidade com que se pode aprender a usar seus recursos[6], além, evidentemente, de possibilitar o uso de alguns dos conceitos ligados às tecnologias digitais e que compuseram a base teórica deste trabalho, como as ideias ligadas à visualização, à experimentação e ao dinamismo.

[5] Esta pesquisa faz parte das investigações promovidas no âmbito do projeto "Tecnologias e Educação Matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces" – processo CNPq no. 477783/2013-9.

[6] Quer-se crer que o Geogebra já seja bastante conhecido na comunidade de pesquisa e prática em Educação Matemática. No entanto, mais informações sobre seu uso e conceitos podem ser obtidas em www.geogebra.org.

Descrição das atividades

Neste artigo, são analisadas duas dentre as seis atividades elaboradas para a investigação original, que estavam divididas em dois blocos, chamados de "fluência e o teorema fundamental da proporcionalidade" e "proporcionalidade, homotetia e relações com os casos de semelhança de triângulos". No primeiro bloco, foram elaboradas as seguintes atividades, que previam o GeoGebra como interface de resolução:

1. *Construção de um triângulo equilátero de medida dos lados igual a 3 cm; descrição dos argumentos matemáticos que poderiam garantir as propriedades da construção; exploração da interface do software de modo a fundamentar as argumentações empregadas;*
2. *Construção de um triângulo equilátero de medida dos lados igual a x cm, sendo possível alterar x de forma a manter a estabilidade da construção (ou seja, o triângulo continuaria sendo equilátero); comentários acerca das estratégias utilizadas; discussão envolvendo as conjecturas e propostas dos pares;*
3. *Construção de duas circunferências a partir de três pontos colineares em uma reta (marcando-se dois pontos A e B com a ferramenta Ponto, traçando uma reta r que os contenha, marcando um ponto C sobre r e traçando as circunferências c e d, ambas com centros em A, com a ferramenta Compasso): exploração de regularidades e de um caso de proporcionalidade.*

As atividades previstas no primeiro bloco, que são apenas mencionadas neste trabalho, exploraram as condições iniciais relativas à fluência no GeoGebra e as noções de proporcionalidade. Eram fundamentais à investigação aqui descrita no sentido de permitirem discussões entre os sujeitos, mediadas pelos pesquisadores, que encaminharam ressignificações em relação ao conteúdo matemático envolvido e alguns alinhamentos em relação ao uso do software. De certa forma, viabilizavam a construção de conjecturas usando o GeoGebra ligadas ao segundo bloco, que continha atividades as quais, por sua vez, envolviam homotetia e que mobilizavam casos de semelhança que podiam ser empregados na justificativa das perguntas componentes dos problemas a seguir. Duas dentre estas outras intervenções, localizadas no segundo bloco, são objeto de análise aqui.

Na primeira das construções analisadas neste artigo, esperava-se que os participantes empregassem conjecturas que poderiam emergir a partir da visualização e da experimentação no software dinâmico, bem como quando formulassem uma argumentação que justificasse as ações tomadas no curso das referidas construções. Na segunda, propunha-se uma generalização dos casos de semelhança de triângulos por meio de uma homotetia aliada à noção de proporcionalidade, o que trazia à cena uma etapa de exploração do tema de semelhança (OLIVEIRA, 2013). Além disso, ainda nesta atividade, era esperado o emprego da noção de proporcionalidade para o estudo de outros tópicos relacionados à semelhança, como a homotetia e semelhança de triângulos. As atividades partiam da ampliação de um segmento, componente de um triângulo, com uma razão de semelhança igual a dois. Em seguida, propunha-se uma redução desse triângulo, com uma razão de semelhança igual a dois terços. Esperava-se, neste ponto, que os participantes começassem a justificar seus argumentos sobre as construções feitas quanto à questão da proporcionalidade entre os segmentos componentes dos triângulos, garantida por meio do paralelismo das retas que suportam estes segmentos, e sobre a forma semelhante destes, no que tange à congruência dos ângulos correspondentes do triângulo inicial e à manutenção de sua projeção, já que estas seriam as condições para que a semelhança fosse comprovada entre eles.

Na construção seguinte, também explicada em detalhes a seguir, esperava-se que os sujeitos utilizassem as noções desenvolvidas até aquele momento com a finalidade de elaborar uma resolução na qual exibissem ao menos um dos casos de semelhança de triângulos para um triângulo qualquer, em uma homotetia de centro *A*.

Os sujeitos precisariam perceber e definir os elementos que garantiriam a confiabilidade da construção, ou seja, partindo da ideia desenvolvida pelos casos nos quais se atribuíam valores à razão de semelhança, esperava-se que os participantes percebessem uma homotetia entre os vértices do triângulo inicial e sua projeção. Portanto, haveria ao menos um dos pontos, localizado sobre uma das retas suporte dos vértices do triângulo original alinhados com o centro da homotetia *A*, que definiria um dos vértices da figura projetada desejada. Deste ponto homólogo, para preservar a congruência dos ângulos correspondentes entre o triângulo inicial e a sua projeção, o participante traçaria retas paralelas às arestas do triângulo inicial, partindo do ponto homólogo do vértice escolhido da figura mencionada, e, por meio da interseção destas paralelas com as retas suporte que passavam por *A* e pelos demais vértices não escolhidos inicialmente do triângulo inicial, determinariam os outros dois pontos homólogos, os quais formariam a projeção desejada. À medida que as etapas das construções fossem completadas, esperava-se que os participantes, ao chegarem ao modelo geral construído, quando movessem os pontos do triângulo inicial por meio do dinamismo que o Geogebra proporciona, visualizassem as mesmas alterações na sua projeção, preservando sua forma. Ao moverem o vértice homólogo que determinaria os outros vértices da projeção a partir do triângulo inicial, esperava-se que os alunos reconhecessem, a partir desta ação, uma ampliação, uma identidade ou uma redução, de acordo com a razão de semelhança. Caso este ponto homólogo fosse arrastado além dos limites do segmento limitado pelo centro da homotetia *A* e o vértice correspondente a ele na figura inicial, na direção de *A*, o participante poderia observar uma inversão da projeção gerada.

Esclarecidos os objetivos e expectativas em relação à construção das respostas, explora-se, a seguir, por meio da descrição e das análises, os resultados alcançados por esta investigação.

Análises e discussões

Primeira construção

De maneira mais específica, a primeira atividade visava promover uma discussão sobre as construções que utilizam a proporcionalidade, além de induzir a ideia de homotetia para estudar semelhanças a partir de razões com valores discretos, partindo, em seguida, para o caso geral. No primeiro item, o enunciado era o seguinte:

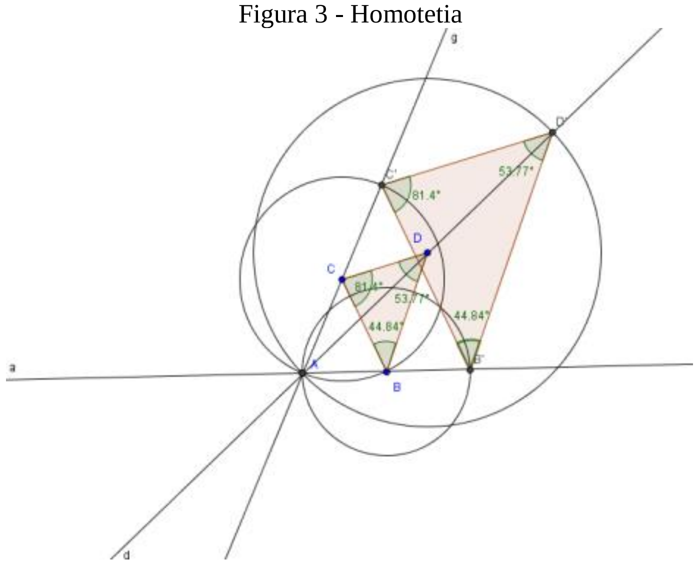
a) "Construa, a partir de um segmento qualquer *AB*, que está contido sobre uma reta *a*, outro segmento *AB′*, também sobre a, que tenha o dobro da medida de *AB*. Movimente *B* sobre *a* e descreva o que acontece com *B′*. Marque dois pontos *A* e *B* com a ferramenta Ponto. Trace uma reta que os contenha, denominada *a*, com a ferramenta Reta. Na sequência, com a ferramenta Compasso, trace uma circunferência *c* com centro em *B* e raio *AB*. O ponto de interseção de *c* com *a* será o ponto *B′*: basta marcá-lo com precisão usando a ferramenta Interseção entre dois objetos. Em relação ao ponto *B′*, o software vai nomeá-lo, provavelmente, como *C*. Basta renomear este ponto, clicando com o botão direito do mouse sobre ele, indo até a opção renomear e atribuindo a notação desejada. Outra observação fica por conta do uso da ferramenta Interseção entre dois objetos: utilize-a sempre que precisar marcar algum ponto de difícil acesso, com precisão".

Em relação à resposta esperada, após o movimento de *B* sobre *a*, o Geogebra ajusta a distância de *B′* para preservar a relação $AB' = 2.AB$.

b) "Agora, marque outros dois pontos não contidos em *a*, quais sejam *C*, contido em uma reta *d*, que passa por *A*, e *D*, contido em uma reta *g*, que também passa por *A*. Assim, *C* e *D* determinam com *B* um triângulo qualquer *CDB*. Utilize o mesmo princípio do item anterior para marcar pontos *C′* e *D′* que sejam também determinados pelo dobro da medida de *AC* e *AD*, sobre as retas *d* e *g*, respectivamente. Marque o triângulo *B′C′D′* com a ferramenta polígono e descreva o que percebe. Há alguma regularidade quando se compara este triângulo com o triângulo *BCD*? Quais propriedades observadas na figura garantem sua argumentação? Movimente os pontos, observe e relate o ocorrido. O que concorre para preservar a integridade das propriedades relativas à construção realizada nesta atividade? ".

Partindo do princípio da proporcionalidade, à medida que os participantes determinassem *C'* e *D'* de acordo com o proposto, poderiam perceber que estariam construindo *B'C'D'* e que se trata de uma ampliação de *BCD* com razão de semelhança igual a 2 (ampliação), de acordo com as proporções entre suas arestas. Além disto, tratam-se de triângulos semelhantes pelo caso *LLL*, pois, a partir do procedimento de transferência de medidas, esta já estabeleceria uma relação entre os pontos *BCD* e os homólogos *B'C'D'*, tais que *B'C' = 2.BC*, *C'D' = 2.CD* e *D'B' = 2.DB*. Quanto à congruência dos ângulos correspondentes, esta é garantida pelo paralelismo das arestas de *BCD* e *B'C'D'*. A proposta pode ser vista, como exemplo, na figura 3.

Figura 3 - Homotetia



Fonte: elaborado pelos autores

Neste caso, as ferramentas do GeoGebra utilizadas poderiam ser Ponto, Reta, Compasso, Polígono, Ponto de interseção, Ângulo (para conferência dos resultados). Por meio do Geogebra, o movimento do ponto A (centro da homotetia) em qualquer direção permite perceber a projeção de *B'C'D'* em um sentido sempre oposto ao dele, conquanto o triângulo original *BCD* mantenha também sua forma e não altere sua posição na tela. De igual maneira, a movimentação dos pontos *B*, *C* e/ou *D* altera a forma de *BCD* por conta da alteração dos ângulos internos, bem como a forma *B'C'D'*, de maneira semelhante.

Em relação às respostas apresentadas, os participantes que finalizaram as atividades chegaram à mesma conclusão, como previsto neste estudo. Dentre as observações feitas por eles, destacam-se:

> *P7: Pessoal, boa noite. Segue minha construção. Espero que esteja correta. Resposta dos questionamentos: Observo que ao movimentar o ponto B ocorre a redução ou ampliação dos*

triângulos conservando a proporcionalidade entre seus lados. Esses novos triângulos não são equiláteros, são escalenos. Utilizei a ferramenta para medir os lados desses triângulos e observei que: C'B' = 2CB; C'D' = 2CD; D'B' = 2DB. Abraços.

Nota-se que P7 relacionou a resposta do item a (ou comentário, como parece ser mais o caso) aos triângulos construídos como resposta ao item b, e não ao segmento AB. Isto não pode ser considerado um equívoco, pois as asserções contidas nas afirmações feitas possuem validade e são da mesma natureza da resposta pretendida inicialmente. Além disso, menciona a proporcionalidade, conhecimento que se pretendia ver relacionado à construção. Ao argumentar acerca da redução e da ampliação dos triângulos, P7 indica empregar a interface computacional por meio da experimentação, movimento que vai sendo mediado por sucessivas visualizações dos resultados por assim dizer parciais das diversas configurações obtidas a partir do dinamismo. Esta descrição possibilita ver uma configuração do tipo "pessoas-com-Geogebra", em uma dinâmica desenvolvida a partir da fluência em relação à interface, mas que já configura o que Oliveira (2013) denomina como pensar com tecnologias.

Na sequência, outro participante descreveu:

P5: Estou na construção 1. A parte (a) do roteiro já fiz, mas na parte (b), fiquei com a seguinte dúvida: o roteiro (b) diz: não contidos em na reta a (?!) ... a minha dúvida é: então posso escolher qualquer um que esteja dentro, fora ou pertença a circunferência? Eu tentei entender, daí acabei olhando o da P7. Mas fiquei com a dúvida mencionada acima.

Entretanto, após observar a construção do colega e manipular o software como pôde, apoiou-se sobre as mídias que dominava melhor, ou seja, lápis e papel, para, na sequência, utilizar o software para testar a validade da sua construção. Fica evidenciado aqui que o que está em jogo é a mídia proporcionar ao usuário esses momentos de reflexão, e não ser um fator impeditivo, obrigatório ou limitante. Surge, então, uma observação a ser feita, em torno da convergência entre as mídias, de modo que cada uma delas sobre a qual se tenha algum tipo de fluência e com a qual se possa reorganizar o pensamento de forma mais adequada possa ser integrada em uma configuração de "pessoas-com-mídias-resolvendo-problemas". A questão da não substituição, mas da readequação e reposicionamento do uso de diversas interfaces, já destaca por Lévy (1993), torna a surgir neste ponto:

P5: Aleluia!!! Finalmente consegui...estou feliz, mas preciso deixar registrado que tentei "n" vezes pelo Geogebra e não obtive sucesso, então "apelei", ou seja, fiz usando folha, régua e compasso. Após isso consegui enxergar o que o roteiro está direcionando... homotetia. Como ficou certo no papel, apenas reproduzi o resultado no software.

Longe de representar qualquer contrassenso em relação aos pressupostos teóricos assumidos nesta pesquisa, reconhece-se que a convergência entre mídias de diferentes constituições e naturezas é fator preponderante para a garantia de que o aprendiz se sinta confortável para relacionar, na configuração da qual faz parte, a tecnologia julgada mais adequada, qualquer que seja o polo no qual se integre (oralidade, escrita ou informática – Lévy, 1993). Neste aspecto, reconhecem Oliveira e Marcelino (2015):

> Ao mesmo tempo, é preciso admitir que certas perspectivas somente se confirmam, quando se fala em aprender matemática, a partir da associação daquele que aprende com alguma tecnologia que lhe suporte ou lhe assessore o pensamento. O dinamismo na observação do comportamento de uma função dados diferentes (e muitos) coeficientes, por exemplo, ou a observação da manutenção das propriedades de uma construção geométrica em dadas condições é bastante difícil sem o uso de softwares específicos. Claro que lápis e papel também representam tecnologias, assim como réguas, transferidores, compassos, esquadros e outros instrumentos equivalentes (p. 820).

É importante destacar que P5 emprega os elementos destacados na fala dos autores supramencionados: usa as tecnologias vistas como tradicionais, mas busca validar a construção por meio do uso do Geogebra, ambiente no qual a tríade dinamismo-visualização-experimentação permanece disponível de forma intensiva.

Em relação às demais respostas apresentadas, devem-se destacar as seguintes:

> *P5: [Há alguma regularidade quando se compara este triângulo com o triângulo BCD?] Sim, o segundo é a ampliação do primeiro. Quando um aumenta ou diminui o mesmo acontece com o outro;*
>
> *[Quais propriedades observadas na figura garantem sua argumentação?] A origem A vale para todos os pontos. Os novos pontos B', C' e D' estão contidos nas retas suporte dos pontos originais B,C,D. A propriedade matemática acho que é a reflexão dos pontos (eu acho ?!)" [Aqui, parece que P5 quis fazer menção ao princípio de paralelismo].*
>
> *P5: [Movimente os pontos, observe e relate o ocorrido. O que preserva a integridade das propriedades relativas à construção realizada nesta atividade?] As retas estão na origem A que é um ponto fixo (centro da homotetia), e os pontos "originais e novos" deslizam pelas suas respectivas retas".*

Nitidamente, P5 trouxe a resposta esperada em relação à primeira pergunta, indicando a ocorrência de uma ampliação. Ainda que o sujeito não tenha, neste ponto, mencionado a proporção, ele já o havia feito anteriormente. Deve-se notar que a resposta traz uma sutileza que revela um pouco de seu processo: o participante menciona que a manipulação de um triângulo ("aumento"/"diminuição") implica em efeito semelhante no outro, o que pode indicar que esta afirmação parte da observação do caráter dinâmico da construção, permitindo uma série de experimentações que reforçariam, por meio da visualização, a criação da conjectura apresentada (BORBA; VILLARREAL, 2005; OLIVEIRA, 2013). Neste aspecto, a construção assume o caráter de modelo digital, da forma como indicada por Lévy (1993), que entende esta possibilidade como um elemento interativo de exploração, contrapondo-se ao modelo analógico e estático: em sua versão digital, este elemento seria "essencialmente plástico, dinâmico, dotado de certa autonomia de ação e reação” (LÉVY, 1993, p. 121). A intervenção no modelo digital, neste caso, subsidia a conjectura apresentada pelo sujeito, que emprega a tecnologia como elemento que encaminha uma reorganização de suas ideias.

Na resposta seguinte, que solicitava indicar as propriedades matemáticas observadas, nota-se que, ao mencionar o posicionamento dos pontos *B'*, *C'* e *D'* nas mesmas retas que *B*, *C* e *D*, P5 se referia ao princípio de paralelismo, ainda mais quando menciona *A* como ponto comum entre as retas suporte. Resta destacar que, em resposta anterior, o participante revela ter medido as arestas dos dois triângulos e constatado a relação entre elas em termos gerais, ou seja, a proporção, relacionada às propriedades que se mantêm estáveis quando se alteram as medidas. Supõe-se, aqui, que o sujeito tenha baseado, pelo menos em parte, suas conjecturas nas manipulações que realizou por meio do software Geogebra nas questões anteriores. Ainda assim, seria desejável que fosse feita menção ao caso *LLL* de semelhança de triângulos, o que não ocorreu.

Em relação à terceira resposta, o sujeito se refere, de maneira informal, tendo por base as experimentações realizadas no ambiente dinâmico, aos princípios de proporcionalidade e paralelismo, os quais, de acordo com a análise já indicada anteriormente, garantem a estabilidade e o acerto, em termos matemáticos, da construção. Evidentemente, contam de forma decisiva a fluência na tecnologia empregada e o alinhamento da resolução com um pensar com tecnologia: dada a sequência de atividades e o uso intensivo da interface, as construções se integram ao que Lévy (1993) chama de condicionamento tecnológico, ou seja, o sujeito condiciona as conjecturas que provê e as resoluções que propõe ao uso da tecnologia a partir da qual seu pensamento se reconfigurou – qualquer tecnologia (lápis e papel, computador, calculadora, etc.). Isto não quer dizer determinismo, ou seja, claro que ainda é possível proceder sem o uso de determinada tecnologia quando aquele saber está consolidado na estrutura cognitiva do indivíduo, mas não é necessário fazê-lo. Isto implica em dizer que, sem o conhecimento (matemático, no caso), pouco importa qual tecnologia ou quão sofisticada ela seja: para pensar com tecnologias, as pessoas partem de um conhecimento que detêm ou que vão construindo como resposta ao problema sobre o qual se debruçam.

Neste item, P7 limitou-se a concordar com as respostas supramencionadas, apoiando o colega em relação às afirmações que fazia e ajudando-o em relação às construções providas no Geogebra, caracterizando, segundo nossa análise, um procedimento de cooperação.

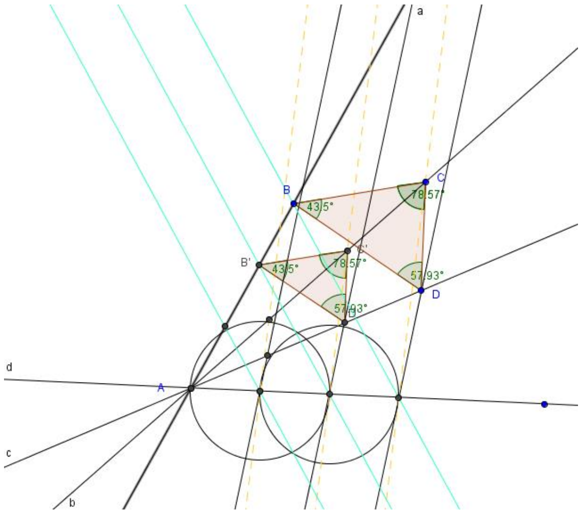
Em continuidade, outro item foi proposto:

c) "Realize o mesmo processo da construção anterior, mas, desta vez, marque os pontos *B'*, *C'* e *D'* de modo que sejam determinados por dois terços da medida *AB, AC* e *AD* sobre as retas *a, g* e *d*, respectivamente. Relate aos colegas o que observou, comparando a construção do item anterior a esta, considerando o processo que empregou para desenvolver a sua construção. Há algum elemento novo? O que pode afirmar quanto aos dois triângulos que estão nesta construção? A partir deste e do percurso adotado no item b, pode se afirmar que estas etapas já consistem um método geral para ampliar e reduzir figuras? Por quê?".

Aqui, espera-se que os participantes percebam que, após dividirem os três segmentos *AB*, *AC* e *AD*, cada qual sobre uma reta correspondente, como no enunciado, em 3 partes congruentes em relação a uma reta suporte *d*, por exemplo, estas divisões são garantidas a partir do paralelismo e do princípio de proporcionalidade (figura 4).

Em termos do conhecimento matemático necessário à construção solicitada, poderia se ter o seguinte raciocínio: seja *AB* um segmento qualquer a ser dividido em *n* partes idênticas. Admite-se, então, uma reta concorrente *d* (com ângulo menor que 90º) a um dos extremos deste segmento de modo que, usando uma medida arbitrária *p*, esta seja projetada (transferência de medida via compasso) *n* vezes sobre *d*. Disto, a partir do último ponto projetado por este procedimento, traça-se uma reta até o outro extremo do segmento. Para cada um dos pontos de interseção determinados sobre *d* nas transferências da medida *p* sobre *d*, traçam-se paralelas até que se esgotem todos estes pontos. A justificativa para a precisão deste método está justamente no teorema de Tales, no qual duas retas transversais a um conjunto de paralelas determinam segmentos proporcionais e correspondentes sobre elas. Por fim, sobre a reta escolhida, consegue-se dividir o segmento em *n* partes iguais, e, tomando-se duas destas partes, tem-se um ponto homólogo de forma que o segmento determinado por ele e *A* seja tal que AB' = r.AB = $=\frac{2}{3}$.AB (RESENDE; QUEIROZ, 2002).

Figura 4 – Item *c* da primeira construção



Fonte: dados da pesquisa

Repete-se este procedimento para cada um dos outros vértices de *BCD*, no caso *C* e *D*, de modo que se localizem *C'* e *D'*, tais que $AC' = r.AC = = \frac{2}{3}.AC$ e $AD' = r.AD = = \frac{2}{3}.AD$. Isto mostra que as arestas de *B'C'D'* são proporcionais as de *BCD*; logo, pelo teorema *LLL* de semelhança, *BCD* e *B'C'D'* são semelhantes.

O elemento "novo" desta construção é o uso de uma razão de proporção racional ao invés de inteira, como utilizada até o momento, o que poderia causar uma discussão acerca de como construir um segmento dividido desta forma e o princípio do paralelismo, mais uma vez necessário para a atividade.

Quanto à última das perguntas, esperava-se que os participantes dissessem que não, pois a razão de semelhança entre as figuras é dada em ambos os casos e não é variável, o que pode ser observado caso se movimente o centro da homotetia e se observe que a projeção não altera sua forma nem proporções. Um contraexemplo poderia ser outra figura reduzida, mantida (identidade) ou ampliada em relação à original, com razões de semelhança distintas da inicial.

Para esta construção, as ferramentas do Geogebra necessárias são Ponto, Reta, Compasso, Polígono, Ponto de interseção, Ângulo (para conferência) e Reta Paralela (para a construção dos pontos à distância de dois terços da medida do centro da homotetia até cada vértice da figura original).

Em relação ao dinamismo do software, os sujeitos poderiam compreender que o centro da homotetia, *A*, ao ser movimentado, reflete sobre a construção os mesmos comportamentos apontados no caso anterior (idem para os vértices de *BCD*). Por conta de a razão de semelhança estar no intervalo $0 < r < 1$, aos participantes restará a visualização de uma projeção "menor" e "mais próxima" de *A* do que a figura original. Neste item, podem ser destacadas as seguintes respostas:

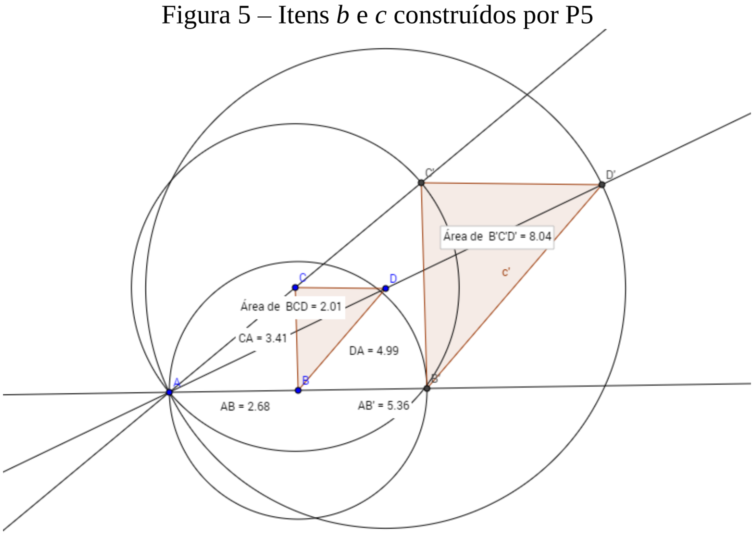
> *P5: Quando movimento o ponto B, o segmento AB' aumenta ou diminui na mesma razão (proporção). Ele segue a razão 2 coeficiente de proporção (homotetia), ou seja, o dobro. Então o segmento aumenta e diminui, sim, na mesma proporção;*
>
> *[Há algum elemento novo?] Não tem elemento novo...acho relevante comentar apenas que a reta a, antes era suporte do segmento AB, mas agora ela compõe a formação da figura para fazer a homotetia... não a considero como elemento novo [Na verdade, o sujeito não percebeu o valor da razão, alterado para dois terços do original e não faz menção em quanto isso altera o resultado na tela. No item b, a atividade propiciava uma ampliação, e neste, uma redução];*
>
> *[O que pode afirmar quanto aos dois triângulos que estão nesta construção?] As áreas dos triângulos estão aumentando ou diminuindo na razão de 4, mas as características originais são preservadas. [Neste ponto, ainda fazia menção ao exemplo da homotetia de razão 2];*
>
> *[A partir deste e do percurso adotado no item b, pode-se afirmar que estas etapas já consistem um método geral para ampliar e reduzir figuras? Por quê?] Este é sim um método de ampliação e redução, pois os novos pontos B', C' e D', fazem parte das retas suporte dos pontos originais.*

Estas respostas de P5 revelam que as atividades eram, de fato, realizadas por uma configuração constituída por pessoas-com-GeoGebra, formada a partir da construção de fluência em relação à tecnologia e revelando maneiras de pensar de forma integrada com os dispositivos computacionais: o sujeito revela perceber a proporcionalidade existente na proposta quando movimenta o ponto *B* (experimentação e visualização, proporcionadas pelo dinamismo do ambiente). Em relação à não percepção do “elemento novo” constante da atividade, é preciso reconhecer que talvez o enunciado não tenha provocado o entendimento desejado, ou seja, a percepção de que se tratava de outra razão, a qual, por sua vez, teria como resultado uma redução, no lugar de uma ampliação, como feito anteriormente. Talvez também por isso a resposta seguinte tenha sido baseada na homotetia de razão 2. De todo modo, até aqui, ainda que tenha havido alguma dificuldade na comunicação, percebe-se que os conceitos emergem de forma consistente nas respostas fornecidas.

Na última resposta, P5 parece acreditar que o método em questão representa um caso geral de homotetia, ignorando que as razões empregadas nas atividades em questão não são variáveis. Ainda que várias características da construção assumam distintos valores, mantendo as propriedades, mudando dinamicamente a partir da ação de clicar-e-arrastar, o aspecto invariável da razão impede que se trate esta atividade como um caso geral. Aqui, pode-se aventar que o participante em questão não tenha percebido o caráter constante da razão ou que detenha uma ideia equivocada de generalização.

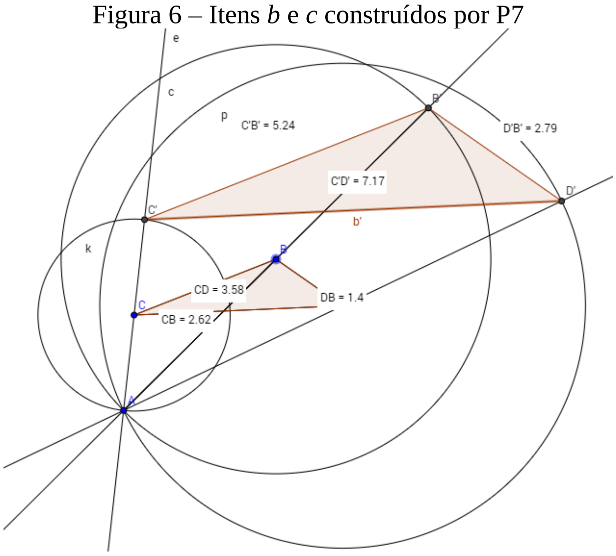
Em relação às respostas providas neste item, seguem as figuras 5 e 6 com as construções realizadas pelos sujeitos P5 e P7, respectivamente.

Figura 5 – Itens *b* e *c* construídos por P5



Fonte: dados da pesquisa

Figura 6 – Itens *b* e *c* construídos por P7



Fonte: dados da pesquisa

Segunda construção: homotetia e a relação da semelhança nos triângulos

O objetivo desta atividade consiste em expandir o emprego da homotetia nos estudos aqui realizados e fazer com que os participantes concluam que toda homotetia entre dois triângulos determina uma semelhança entre eles, e que, a partir desse princípio, os mesmos podem resolver problemas que necessitem deste conceito na construção e na argumentação.

a) "Construa um triângulo qualquer *BCD*. A partir das construções feitas até agora, utilize os conceitos que foram trabalhados para determinar um triângulo *B'C'D'* tal que a razão entre as

> medidas das arestas destes dois triângulos seja a mesma, de valor qualquer, estabelecida por vocês. Explorem possibilidades quanto às regularidades apuradas nas construções anteriores, compartilhem com os colegas o processo de construção que empregaram e as justificativas geométricas que puderem listar e que foram percebidas e mobilizadas. Não deixe de comentar as construções dos colegas, e caso tenham imaginado alguma outra construção que seja válida para a resolução do problema, compartilhem com o grupo".

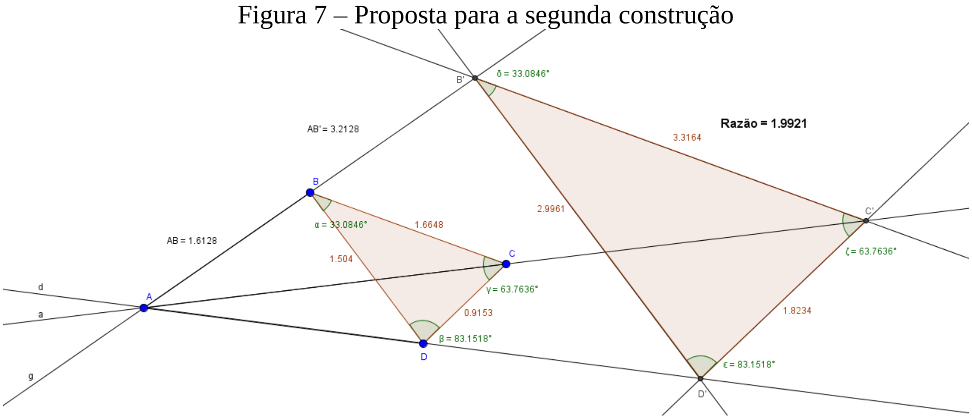
Quanto à resposta esperada, a partir das construções anteriores, os participantes poderiam notar a relação que indica onde se encontram os pontos tais que, a partir da homotetia entre *BCD* e *B'C'D'*, determinam a razão de semelhança entre elas.

Alguns fatos a partir deste enunciado: no caso, a homotetia determina dois segmentos, *AB* e *AB'*, que são proporcionais a uma razão de semelhança *r*, partindo do ponto do centro de homotetia *A*, resultando em uma ampliação (se $r > 1$), uma identidade (se $r = 1$) ou uma redução da imagem (quando $0 < r < 1$). Isto é possível considerando uma simples verificação, à medida que, a partir de *A* e de 3 pontos não colineares simultaneamente, *BCD*, forma-se um triângulo, e a partir de um de seus vértices, por exemplo *B*, no prolongamento da reta suporte do segmento *AB*, seu homólogo *B'* se encontra contido.

A partir de *B'*, caso sejam traçadas retas paralelas às arestas do triângulo *BCD*, determinam-se pontos de interseção entre essas paralelas e as retas de suporte dos demais vértices *C* e *D* que determinam seus homólogos *C'* e *D'* tais que, quando se movimenta *B*, o princípio do paralelismo faz com que ele reproduza os resultados visuais supracitados. Caso *B'* seja movimentado sobre sua reta suporte (a mesma de *A*) e o extrapole, este determina uma homotetia inversa, tal que $r<0$ (ver figura 7).

A semelhança entre o triângulo inicial *BCD* e seu homólogo *B'C'D'* pode ser justificada das formas apuradas de semelhanças de triângulos desde o estudo do objeto matemático, ou seja, por *LLL* (caso sejam apuradas a razão de semelhança *r* entre as medidas das arestas), por meio de um caso *AAA* (por conta da conservação da congruência dos ângulos correspondentes destes por meio do paralelismo entre as suas arestas), ou, ainda, por um caso *LAL* (a partir do momento que se usa um ponto homólogo *B'*, seu ângulo correspondente e congruente com o original, *B*, e duas arestas consecutivas que partem destes e que são proporcionais entre si pela razão de semelhança).

Figura 7 – Proposta para a segunda construção

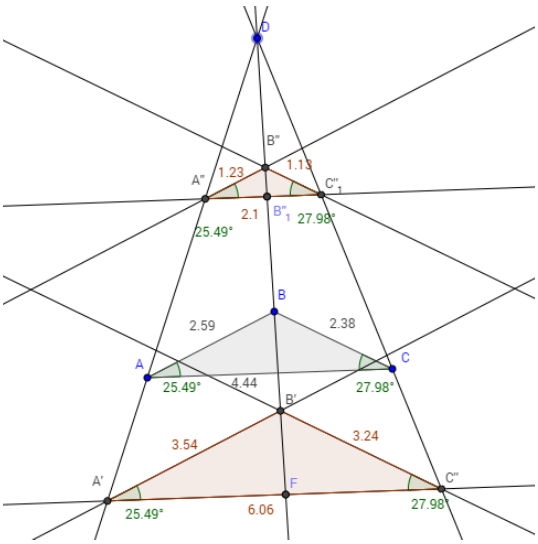


Fonte: elaborado pelos autores

As ferramentas do software que permitiriam trabalhar com estes procedimentos seriam Ponto, Reta, Compasso, Polígono, Ponto de interseção, Ângulo e retas paralelas (para a construção dos pontos homólogos de cada vértice da figura original que comporão a projeção de *BCD*, *B'C'D'*).

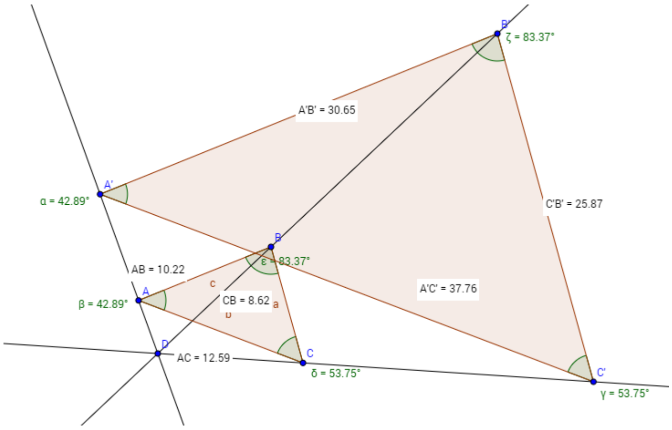
De todas as construções relativas a esta investigação, esta foi a única para a qual não houve propostas que pudessem ser consideradas corretas, do ponto de vista do rigor matemático. As dificuldades experimentadas na resolução do item c da primeira construção acarretaram a inexistência de uma experiência anterior que pudesse permitir uma associação com a atividade aqui proposta. Da mesma forma como cogitado em relação ao item anterior mencionado, não fica claro em qual dos aspectos houve falha, se em relação ao conhecimento matemático, à compreensão da questão ou à fluência na mídia, ou, ainda, uma falha na estratégia didática por não ter sido considerado que haveria, neste momento, problemas quanto às construções propostas.

Figura 8 – Segunda construção por P5



Fonte: dados da pesquisa

Figura 9 – Segunda construção por P7



Fonte: dados da pesquisa

As construções propostas por P5 e P7 são exibidas, respectivamente, nas figuras 8 e 9. Nota-se que as propostas mencionadas não permitem determinar um caso geral, a partir do qual se pudesse, como na construção da figura 5, que a variação do ponto A mantivesse válida a homotetia, variando a razão de acordo com a experimentação proposta pelo sujeito.

Considerações finais

Ao final do estudo, compreendendo as sessões presenciais e as intervenções no Moodle, um dos pesquisadores apresentou, para os sujeitos envolvidos, resoluções das atividades propostas que visavam consolidar o conhecimento matemático formal sobre o tema "homotetia" em um movimento que teve como base as próprias conjecturas e propostas levantadas pelos sujeitos ao longo das experimentações. Neste sentido, foi possível analisar e posicionar eventuais equívocos cometidos e avançar no sentido de ressignificar o conhecimento acerca deste e de outros conhecimentos em matemática que se fizeram importantes para o desenvolvimento do estudo aqui descrito. Parece importante destacar que iniciativas com esta configuração possuem o potencial de movimentar o interesse dos docentes em torno da própria formação continuada, à medida que exploram os aspectos didático, epistemológico e tecnológico do conhecimento para a prática, no caso, em matemática. Os sujeitos, neste sentido, puderam perceber em quais estratégias didáticas estavam envolvidos e a forma como a construção do conhecimento era proposta. Não é descabido concluir que, com as devidas adaptações, semelhantes procedimentos podem passar a compor suas atuações em sala de aula.

Um ponto importante a ser destacado nestas últimas considerações se refere ao fato de que a organização do estudo facultou acompanhar as trajetórias dos participantes ao longo de uma experiência que permitiu a apropriação de uma nova forma de pensar – e de reorganizar o pensamento – acerca de temas matemáticos fortemente interligados (paralelismo, proporcionalidade, semelhança e homotetia), e que se deu a partir do uso de tecnologias digitais e não digitais. Esta trajetória que elencou momentos de convergência e de uso intensivo da interface computacional marcou de forma bastante distintiva o papel da construção de fluência dos dispositivos empregados como uma importante etapa de consolidação de processos cognitivos. A fluência, por sua vez, apoiou o movimento por meio do qual se deu a reorganização do pensamento e o pensar com tecnologias. Foi possível observar como isto acontecia a partir do discurso dos sujeitos, da forma distinta como se expressavam à medida que iam ganhando maior desenvoltura no Geogebra.

As justificativas apresentadas para as conjecturas vinham predominantemente calcadas no trinômio "dinamismo – experimentação – visualização", ou melhor, em um tipo de experimentação possibilitado por um tipo de dinamismo e que permite um tipo de visualização. Isto quer dizer que o dinamismo do Geogebra, materializador do "tempo real" e da "interface reativa" dos sistemas modeladores, como destacado por Lévy (1993), permitiu construir uma relação com o conhecimento matemático que tem lugar quando experimentações intensivas, sucessivas e virtualmente numerosas podem ocorrer.

Outro é o tipo de dinamismo e outra é a experimentação quando se recorre ao lápis e ao papel, por exemplo: este estudo levanta a possibilidade de que a manipulação dos chamados "recursos tecnológicos tradicionais" pode ser marcada por algum dinamismo – mexer o papel, mudar o olhar, variar o ângulo do desenho em relação à folha com o lápis – e alguma experimentação – desenhar ao lado de um diagrama inicial, rabiscar. Nos dois casos, possibilidades de visualização são abertas, com mais subsídios e recursos na versão digital, mas, às vezes, de uma forma mais familiar ao sujeito, na versão não digital. De todo modo, a estimular a conjectura das tecnologias como reorganizadoras do pensamento, e da resolução das atividades por pessoas-com-tecnologias (ou pessoas-que-pensam-com-tecnologias), percebe-se o recurso a elas em todas as circunstâncias da investigação aqui descrita, bem como a forma como convergem, quando necessário, para subsidiar a construção do conhecimento.

Com base nisto, o discurso dos sujeitos surgia povoado por termos como "- Quando movimentei a construção, observei que as figuras eram proporcionais...", "- Alterei o tamanho do segmento e as propriedades se mantiveram...", "- Quando uma construção tem seu tamanho aumentado, a outra diminui...", "- Mudando a razão, as propriedades se mantêm...". As falas apontam, então, de maneira inequívoca, raciocínios e conjecturas em torno de pensamentos-com-tecnologias. Reconhece-se, é claro, que não se tratam de demonstrações – como limitação do estudo, aliás, deve-se dizer que mesmo a busca de casos gerais representou grande dificuldade para os participantes. No entanto, estas possibilidades podem encaminhar outras, reservando ao emprego de estratégias didáticas com tecnologias um papel importante na elaboração de propostas de resolução de atividades e problemas matemáticos. Os aspectos relativos às generalizações e/ou demonstrações ficam, no que se refere a este estudo, como potenciais inquietações, pedindo novas pesquisas.

Referências

BORBA, M. C.; VILLAREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Ed. Springer, 2005. 229 p.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir ensigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CURI, E.; PIRES, C.M.C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educação Matemática Pesquisa**, v.10, n. 1, 2008. p. 151 – 189.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. Belo Horizonte: SBM, 1991.

LUIS, S. R. **Concepção de uma sequência de ensino para o estudo de Semelhança**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2006.

MOISE, E.E.; DOWNS, F. L. **Geometria moderna**. São Paulo: Edgard Blucher, 1971.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D.; MARQUETTI, C. Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n. 3, 2015. p. 472 – 489.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Estratégias didáticas com o software Superlogo: adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n. 4, 2015. p. 816 – 842.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com o Superlogo e o GeoGebra. **Anais do CIBEM 2013.** Disponível em:

<http://www.cibem.org/extensos/256_1375850044_05082013_artigo_cibem2.docx/>. Acesso dia 27/11/2017.

RESENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000, p.261.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 1986. p. 4-14.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: **The Concept of Activity in Soviet Psychology**. J. V. Wertsch, ed., M.E. Sharpe Inc., New York, pp. 256-278, 1981.

Texto recebido: 7/11/2017

Texto aprovado: 15/03/2018