

A metodologia do percurso de estudo e pesquisa adaptada à formação inicial e continuada de professores de matemática.

Methodology of the study and research performance adapted to initial and continued training of mathematics teachers.

FERNANDO CARDOSO DE MATOS¹

JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA²

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES³

RENATO BORGES GUERRA⁴

SADDO AG ALMOULOU⁵

Resumo

Neste artigo objetivamos explicitar alguns aspectos metodológicos das noções originais do Percurso de Estudo e Pesquisa (PER), que os dois primeiros autores adaptaram como parte da metodologia de suas pesquisas de teses. As discussões teóricas são as que constam nos textos originais, na Língua Francesa, dos quais traduzimos alguns trechos. As noções teóricas dos dispositivos didáticos de Trabalho Pessoais Orientados, Atividades de Estudo e Pesquisa e Percurso de Estudo e Pesquisa norteiam o corpo textual do artigo. expomos as adaptações metodológicas do PER, que conduziram as pesquisas das duas teses doutorais. As conclusões indicaram que a metodologia do PER, com as devidas adaptações, possibilita um processo de formação inicial e continuada de professores de matemática intermediado pela pedagogia do questionamento, conforme prever esse dispositivo didático e metodológico.

***Palavras-chave:** Didática da Matemática, Dispositivos Metodológicos e Didáticos, Metodologia do Percurso de Estudo e Pesquisa, Formação de Professores.*

Abstract

In this article we aim to explain some methodological aspects of the original notions of the Study and Research Path (PER), which the first two authors adapted as part of their thesis research methodology. The theoretical discussions are those that appear in the

¹ Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática: Instituto Federal do Pará, Departamento de Matemática – matos2001@gmail.com.

² Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática: Instituto Federal do Pará, Departamento de Matemática – jsouzaper@gmail.com.

³ Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática: Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica – messildo@ufpa.br.

⁴ Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas. Atualmente é professor titular da Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica – rguerra@ufpa.br.

⁵ Doutor em Mathematiques et Applications pela Universite de Rennes França: Coordenador do Programa de estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP - saddoag@pucsp.br.

original texts, in the French language, of which we translate some sections. The theoretical notions of didactic devices of Guided Personal Work, Study and Research Activities and Study and Research Path guide the textual body of the article. we present the methodological adaptations of the PER that led the researches of the two doctoral theses. The conclusions indicated that the methodology of the PER, with the appropriate adaptations, allows an initial and continuous formation process of teachers of mathematics intermediated by the pedagogy of questioning, as predicted by this didactic and methodological device.

Keywords: *Didactics of mathematics, methodological and Didactic Devices, Methodology of the course of study and research, Training of teachers professed formation.*

Introdução

O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) (CHEVALLARD, 2011) é um dispositivo didático e metodológico que tem sua origem no sistema de ensino francês, principalmente, nos colégios e liceus franceses. Possui regulamentação institucional e é norteado pelas Atividades de Estudo e Pesquisas (AEP), proposto por (CHEVALLARD, 2011). Em conformidade com as ideias originais, em francês, do PEP e AEP, usaremos as siglas PER e AER. Essa escolha nos permite expor a compreensão que temos do PER e das AER, bem como, a adaptação que fizemos para o processo de formação inicial e continuada de professores de matemática. Essas duas formações ocorreram de forma independente uma da outra, mas com um fim convergente, a produção de duas teses de doutoramento sobre o ensino da Álgebra.

No processo de formação inicial de professores de matemática, o objetivo é o ensino da Álgebra Linear, num curso de licenciatura em matemática, no âmbito de um Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia. Na formação continuada de professores de matemática, o objetivo é o ensino da Álgebra Escolar no Ensino Básico. Nessas duas formações a metodologia do PER foi ajustada para que esses dois processos de formação ocorressem de forma satisfatória. Em termos de discussões, trataremos aqui, parcialmente, dos elementos metodológicos do PER que conduziram esses dois estudos e nortearam as duas pesquisas de teses doutorais. Além disso, o nosso objetivo neste artigo, é explicitar alguns aspectos metodológicos das noções originais do PER (CHEVALLARD, 2009a, 2009b, 2009c), que os dois primeiros autores adaptaram como parte da metodologia de suas pesquisas.

As ideias metodológicas do PER, no contexto espanhol e argentino, estão presentes em algumas pesquisas, nessas pesquisas o dispositivo recebe a denominação de “Recorridos de Estudio e Investigación” (REI) (FONSECA et al., 2009; LLANOS; OTERO; GAZZOLA, 2013). No contexto espanhol a metodologia do PER avança na perspectiva do ensino universitário, enquanto no argentino está próxima do sistema de ensino francês, ou seja, no âmbito institucional da escola secundária. Porém, neste artigo, nossas discussões convergem ao contexto francês, devido à maioria dos textos originais estarem em Língua Francesa. Assim, as traduções foram inevitáveis, conforme veremos nas duas sessões a seguir, mas com maior intensidade na primeira.

Noções teóricas sobre o percurso de estudo e pesquisa

As ideias primárias sobre o PER surgem por meio dos Trabalhos Pessoais Orientados (TPO) (daqui em diante usaremos a sigla TPE, do original em francês). Os TPE são atividades escolares obrigatórias, no sistema de ensino francês, principalmente, nos liceus (instituição com ensino médio e tecnológico) (CHEVALLARD, 2001). Os TPE aparecem no currículo do sistema de ensino francês, no início do ano letivo de 2000, num momento conflituoso de “luta” entre professores e o Ministro francês de Educação.

Desde o início de 2000, os TPE fazem parte do emprego do tempo dos alunos. Esta introdução, feita sem consulta prévia, num contexto de luta com o Ministro da época e ao mesmo tempo uma redução de horas de matemática, provocou a insatisfação da maioria de nós e a violenta rejeição dos outros [...] (ANDRAL et al., 2003, p. 97, tradução nossa).

Vemos que a inserção dos TPE no sistema de ensino francês é imposta e, em um momento que o ensino de matemática passa por uma redução de carga horária. Porém, esses mesmos autores (da citação), veem nos TPE algo propício para “[...] aquisição de qualidades de análise e de síntese, que não são (ou pouco) trabalhadas no âmbito dos cursos tradicionais” (Ibidem, 2003, p. 97, tradução nossa).

Para Fortin (2004, p. 61, tradução nossa): “A descompartmentalização das disciplinas aparece como o ponto nodal do dispositivo dos TPE. Sua aplicação leva a uma recontextualização dos conhecimentos disciplinares em torno de uma problemática dada”. É essa problemática, às vezes, não tão bem compreendida, que motivou o surgimento de vários estudos sobre o dispositivo dos TPE, inclusive por Chevallard (2001) no artigo

“Les TPE comme problème didactique” [Os TPE como problema didático], no qual Chevallard aborda as seguintes questões:

Como, então, pensar o surgimento dos TPE na cultura didática escolar e os efeitos que podem ter sobre a Escola como operadora de disseminação de conhecimentos? Os TPE, não seriam, a exemplo de outros dispositivos, apenas uma simples verruga sobre o rosto inchado de um currículo? Ou haveria neles, sem que todos estivessem lá, lições mais profundas para entender? Em quais condições tal ensino poderá ocorrer? E qual destino ele promete à matemática, para aqueles que a ensinam e para aqueles que também estudam a didática? [...] (CHEVALLARD, 2001, p. 1, tradução nossa).

As questões anunciadas por Chevallard (2001) não serão explicitadas neste artigo, deixamo-las a livre curiosidade do leitor que quiser estudá-las no artigo original, em francês. Porém, elas nos direcionam para esclarecer de forma breve o que são os TPE, conforme está em Chevallard (2001, p. 1): O projeto oficial para pôr em prática, nas classes iniciais das séries gerais (S, ES e L), os **Trabalhos Pessoais Orientados** (TPE) visa criar um novo tipo de sistemas didáticos escolares. Na criação desses sistemas didáticos escolares, por intermédio dos TPE, inicia-se a gênese do PER (CHEVALLARD, 2009a).

E como são produzidos esses TPE? Os TPE seguem uma orientação nacional do Ministério da Educação francês. Eles são produzidos com base nas temáticas propostas por esse ministério. Para 2015-2016 e 2016-2017, as temáticas são as que constam no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1. Lista dos temas relativos aos TPE em vigor para as classes iniciais das séries gerais.

	Série econômica e social	Série literária	Série científica
Temas comuns	O aleatório, o insólito, o previsível Ética e responsabilidade Individual e coletivo	O aleatório, o insólito, o previsível Ética e responsabilidade Individual e coletivo	O aleatório, o insólito, o previsível Ética e responsabilidade Individual e coletivo
Temas específicos	As desigualdades Crise e progresso O dinheiro	O jogo Heróis e personagens Luz, luzes	Estruturas A medida Matéria e forma

Fonte: http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=90682.

O Quadro 1 mostra os diversos temas propostos à constituição de um TPE pelos alunos dos liceus franceses. O aspecto interdisciplinar dos temas nos parece evidente, mas não sabemos de que forma isso ocorre. Porém, no site, <http://www.ac-strasbourg.fr/pedagogie/tpe/ressources-pedagogiques/>, há dois documentos que norteiam o desenvolvimento dos TPE, um para os professores e outro para os alunos. No Quadro 2, traduzimos tópicos do documento que orientam os professores franceses.

Quadro 2. Tradução de partes do documento que orienta os professores, na França, na organização dos TPE.

OS TPE: DOCUMENTO PARA O USO DOS PROFESSORES.

1) ORGANIZAÇÃO GERAL:

Os grupos de TPE são constituídos no máximo de 4 alunos.

Deve-se incentivar os alunos a privilegiarem a constituição de grupos de pelo menos 2 alunos, porque os TPE devem ser um trabalho de grupo e a avaliação reflete o trabalho em equipe.

O TPE deve, obrigatoriamente, ser escrito em um dos **temas nacionais** fixados pelo ministério.

O caderno de anotações constitui o registro escrito do progresso do grupo e de cada aluno. Ele não será a forma de avaliação, mas permitirá que os professores orientem os grupos a seguirem progredindo.

Poder-se-á anotar, sessão após sessão:

- o trabalho do grupo de alunos,
- o trabalho de cada aluno (parte do trabalho),
- as referências precisas dos documentos consultados, as pessoas encontradas, os lugares visitados,
- os protocolos experimentais e os resultados obtidos,
- as informações relevantes contidas,
- os problemas encontrados,
- as questões que o aluno / o grupo levantaram,
- as necessidades / plano para as próximas sessões.

Assegurar a coerência entre o seu caderno de anotações e o conteúdo da síntese individual.

As equipes podem optar por um caderno de anotações para o aluno ou para o grupo.

2) A ESCOLHA DA PROBLEMÁTICA:

A problemática é o resultado de uma reflexão acentuada sobre o tema escolhido. Antes de formulá-la, deve-se recordar que o **TPE, obrigatoriamente, envolve duas disciplinas**. Um equilíbrio entre as duas disciplinas é esperado [...].

Se uma das disciplinas é uma língua viva, ela não deve ser apenas um objeto de tradução.

É desejável que as duas disciplinas sejam escolhidas pelos alunos e não impostas.(.....)

Fonte: <http://www.ac-strasbourg.fr/pedagogie/tpe/ressources-pedagogiques/>.

Temos, no Quadro 2, as informações metodológicas iniciais de como os professores franceses devem proceder para organizar e orientar os TPE. Vemos que o caráter bidisciplinar é obrigatório, indicativo da interdisciplinaridade. Além disso, a escolha de uma problemática para nortear um TPE exige uma reflexão compreensível do tema escolhido e, em conformidade com os temas nacionais. Na composição da problemática para um TPE ocorre a formulação de uma questão a ser respondida, que guiará o desenvolvimento desse TPE. De forma similar, essa metodologia se estende para um AER e, conseqüentemente, num PER.

Segundo Chevallard (2001), para se estudar a praticidade dos TPE, deve-se considerar a hierarquia dos níveis de determinação de uma organização didática (sociedade → sistema escolar → disciplina → domínio → setor → tema → assunto) e, principalmente, o nível do sistema escolar que contém o pedagógico. Nesse pedagógico, as condições oferecidas e as restrições impostas no âmbito do sistema escolar existente – entenda-se isso como a **infraestrutura didática**⁶ desse sistema – implicam no estudo de tipo de sistemas didáticos S e de uma questão Q qualquer. O estudo de tipos de sistemas didáticos S e de uma questão Q qualquer, constitui a pedagogia do PER, mas antes de tratarmos desse dispositivo didático, explicitaremos de forma breve o que é um sistema didático S .

Um sistema didático S possui três elementos principais, uma equipe X (alunos de uma classe, professores em formação inicial ou continuada, etc.), uma equipe Y (professores formadores, pesquisadores de um grupo de cientistas, etc.) e uma questão Q . Denota-se

⁶ Chevallard enfatiza, que na pedagogia AER (Activité d'Enseignement et d'Étudde) e PER, exige-se que os professores revisem sua relação com o saber matemático. Ele afirma que quando um currículo é construído em torno de uma pedagogia dada, é formada uma infraestrutura educacional, didática/matemática ou matemática/didática, que permite a implementação desta pedagogia. Ele chama de infraestrutura didática as condições de ensino e restrições que a maioria das organizações matemáticas explora dentro das limitações impostas pelo sistema [...] (ALMOULOU; SILVA, 2012, 39-40).

esse sistema didático por: $S(X, Y, Q)$. Compreenda-se que X é uma equipe que estuda a questão Q e, orientando o estudo da equipe X , em relação Q , está a equipe de diretores de estudo Y . Para Chevallard (2001, p. 5, tradução nossa): “O funcionamento de $S(X, Y, Q)$ gera então **uma resposta R** , fragmento de uma organização em construção: $S(X; Y; Q) \mapsto R$ ”. A elaboração da resposta R mobiliza saberes antigos e novos, geralmente, respostas de obras O (livros textos, artigos, dissertações, teses doutorais, etc.): R_1, \dots, R_n (CHEVALLARD, 2001). As obras O constituem um *milieu* [meio] para elaboração de R . Após essa breve explicação sobre um sistema didático S , podemos iniciar nossas discussões direcionadas a pedagogia e a metodologia do *parcours d'étude et de recherche* (PER) [percurso de estudo e pesquisa (PEP)] (CHEVALLARD, 2009a, 2009b, 2011).

A pedagogia do PER está envolta com as *Activités d'Étude et de Recherche* (AER) [Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP)] (BARACHET; DEMICHEL; NOIRFALISE, 2007). As AER são as propulsoras de estudos em matemática. Segundo Chevallard (2009b) a pedagogia das AER tem sua essência na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, apoiada na noção de **situação fundamental**⁷. Chevallard (2009b, p. 7, tradução nossa) ainda esclarece que: “O recurso a uma situação fundamental, neste sentido, é uma exigência epistemológica estabelecida, que define um projeto de elaboração de uma infraestrutura matemática, didaticamente, adaptada a uma pedagogia das AER [...]”. Nessa infraestrutura matemática, uma organização matemática pontual (OMP), denotada por $[T/\tau/\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 2009b), cumpre um papel decisivo com o tipo de tarefas T , a técnica τ , a tecnologia θ e a teoria Θ . Os Quatro elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) alimentam os sistemas didáticos S , em dois blocos dialéticos, o do saber-fazer (ou da práxis), constituído pelo tipo de tarefas T e a técnica τ (denotado por $[T/\tau]$). O segundo bloco é o do saber (ou do logos), composto pela tecnologia θ e a teoria Θ (denotado por $[\theta/\Theta]$). São esses dois blocos que regem a pedagogia das AER e do PER.

Nas AER, os tipos de tarefas T (ou tipos de tarefas T_i , com $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$) são elementos metodológicos motivadores para o estudo da questão Q (ou de várias questões) durante a

⁷ É um esquema de situação capaz de gerar pelo jogo de variáveis didáticas que a determinam, o conjunto das situações que correspondem a um determinado saber [...] (CHEVALLARD, 2009b, p. 6-7., tradução nossa).

efetiva realização dessas AER. Para ilustrar alguns tipos de tarefas T , citamos algumas da obra de Barachet, Demichel e Noirfalise (2007, p. 35-36, tradução nossa):

Tipos de tarefas:

T_1 : *Calcular as grandezas geométricas: comprimentos, áreas, volumes [...]*

T_2 : *Determinar as secções planas dos sólidos.*

T_3 : *Representação plana de um sólido do espaço.*

T_4 : *Construir um molde de sólido e um sólido a partir de um molde.*

Esses quatro tipos de tarefas T permitiu aos autores (BARACHET; DEMICHEL; NOIRFALISE, 2007) desenvolverem três AER. A primeira AER sob a denominação de “*réalisation d'un patron de pyramide à partir d'une représentation en perspective cavalière*” [obtenção de um molde de pirâmide a partir de uma representação em perspectiva de Cavalieri] (p. 37); a segunda, nomeada de *construire une pyramide régulière de base carrée et de volume maximal* [construir uma pirâmide regular de base quadrada e volume máximo] (p. 42) e, a terceira, intitulada de *la coupe d'une pyramide par un plan* [o corte de uma pirâmide por um plano] (p. 43). Não analisaremos aqui o desenvolvimento dessas três AER, mas sugerimos consultar o artigo original em francês.

Chevallard (2009b, p. 7, tradução nossa) indica que o estudo de um tipo de tarefas T deve levar a uma fundamentação desse tipo de tarefas: “Seja um tipo de tarefas T cujo estudo está programado. A AER pela qual a OMP [$T/\tau/\theta/\Theta$] será posta na classe deve, **em primeiro lugar**, fundamentar o tipo de tarefas T , exibindo pelo menos uma de suas **razões de ser**”. Essa proposição de Chevallard a compreendemos como metodológica, porque motiva estudar as tarefas t que constituem T ($t \in T$) e, nesse estudo, uma técnica τ pode instituir uma dimensão didática na OMP. Na vertente pedagógica das AER, haverá tipos de tarefas T^* problemáticos com extensão as tarefas t^* ($t^* \in T^*$) (CHEVALLARD, 2009b). Desse modo, para se estudar um certo tipo de tarefas T^* e as tarefas t^* , deve-se formular certa questão Q : “[...] como realizar tarefas t^* (de maneira compreensível e justificada) de certo tipo de tarefas T^* ? [...]” (CHEVALLARD, 2009b, p. 8, tradução nossa).

A pedagogia das AER quando aplicada, no ensino de matemática, requer uma infraestrutura didática (ou seja, didático-matemática) adequada à metodologia que conduzirá as atividades de estudo pesquisa dos objetos matemáticos escolares. Na compreensão de Chevallard (2009b, p. 8, tradução nossa):

[...] uma pedagogia das AER, em matemática, pede uma infraestrutura didático-matemática colocada a serviço da didática e que evidencie as razões de ser das noções matemáticas de ângulos, de retas paralelas, de retas secantes, de semirretas, de segmentos de retas, de número decimal, do desenvolvimento de uma expressão algébrica, da redução de uma fração, etc.[...]

A infraestrutura didático-matemática, na pedagogia das AER (ou “das situações”) converge para o uso desse dispositivo didático na pedagogia do PER (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Porém, tudo começou com os TPE, conforme anuncia Chevallard (2009a, p. 2, tradução nossa): “A noção do PER surgiu *fora da classe de matemática*, em conexão com a noção “institucional” de TPE, que se instala nas primeiras classes iniciais, no início de 2000[...]”. Nessa conexão TPE com PER, notamos que a metodologia inicial desse dispositivo didático agrega várias AER, ou seja, a pedagogia da pergunta, motivada pela questão Q e pelos tipos de tarefas T , norteiam as atividades de pesquisa da equipe X no estudo da questão Q e de suas derivadas: $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$.

Inicialmente, o PER surge monodisciplinar ou bidisciplinar, associado ao esquema herbatiano⁸: $(S(X; Y; Q) \rightsquigarrow M) \rightsquigarrow R^\heartsuit$. Essa é a forma não desenvolvida desse esquema, que contém o sistema didático S , o *milieu*⁹ M e a resposta esperada R^\heartsuit (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Na metodologia do PER, o esquema herbatiano é aplicado em sua forma desenvolvida: $[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, R_{n+1}^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$. Nessa forma, o esquema herbatiano revela a complexidade do *milieu* $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, R_{n+1}^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}$. Os R^\diamond (“ R contraste”) são respostas prontas e legitimadas institucionalmente, na TAD, diz-se que elas receberam um “selo” institucional. A análise das repostas $R^\diamond = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, R_{n+1}^\diamond\}$ poderá levar à elaboração da resposta esperada R^\heartsuit (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Entretanto, há as respostas R provenientes das obras $O = \{O_{n+1}, \dots, O_m\}$, da cultura. Da análise dessas obras O podemos ter $R = R^\diamond$ e, por conseguinte, elaborar a resposta esperada R^\heartsuit (CHEVALLARD, 2009a, 2009b).

Os elementos do esquema herbatiano desenvolvido, propõem uma metodologia da **didática da investigação codisciplinar**, cujo o centro das atenções é a questão Q , que dever ser respondida por X (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de

⁸ Em homenagem ao filósofo alemão Johann Friedrich Herbart.

⁹ A tradução de *milieu*, em Língua Portuguesa, é **meio**, mas a compreensão e significado de um *milieu*, na Didática da Matemática francesa, é muito mais amplo, ultrapassando a compreensão e significado quando traduzida à Língua Portuguesa.

pesquisadores, etc.) mediante a elaboração de uma resposta R , mas sob a orientação de Y (diretor ou conjunto de diretores de estudo) (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Em algumas investigações, o sistema didático do PER assume a forma $\mathcal{S}(X; \emptyset; Q)$, ou seja, $Y = \emptyset$. É nesse tipo de sistema didático que a metodologia do PER confere legitimidade ao pesquisador, quando este estuda as obras O , necessárias, para fundamentar uma pesquisa em desenvolvimento, assim teremos $X = \{x_I\}$. Essa configuração de $Y = \emptyset$ e $X = \{x_I\}$, compreendemos como a metodologia de um PER “solitário”. Esse PER “solitário”, ocorre, principalmente, durante a elaboração de um anteprojeto de pesquisa para a seleção de Mestrado ou Doutorado.

Chevallard (2009a) dá um indicativo sobre a metodologia do PER: “A noção de PER permite subordinar um conjunto mais ou menos desigual de práticas sociais de conhecimento: pesquisa científica, investigação policial ou jornalística, etc. [...]” (p. 2, tradução nossa). Tomamos por base esse indicativo de Chevallard (2009a) para expormos na próxima sessão, as adaptações que fizemos para conduzir as nossas pesquisas doutorais.

A metodologia do percurso de estudo e pesquisa na formação inicial e continuada de professores de matemática

Nossa intenção, nesta sessão, é expor, sinteticamente, as ideias parciais das adaptações que fizemos para aplicar a metodologia do PER, em duas formações de professores de matemática, no âmbito de duas Instituições de Ensino Superior (IES). Além disso, essas duas formações compõem a coleta de informações que culminaram na produção das teses doutorais dos dois primeiros autores deste artigo.

A primeira formação ocorreu no âmbito institucional de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. O público alvo foram graduandos do quarto semestre do Curso de Licenciatura em Matemática. A disciplina a qual a metodologia do PER seguiu em aplicação é Álgebra Linear. Esse PER se caracterizou como monodisciplinar e foi adaptado¹⁰. O ensino dessa disciplina aconteceu por meio de um Modelo Epistemológico

¹⁰ Consideramos um PER adaptado, pois ocorreu em um curso de formação inicial de Licenciatura em Matemática, as tarefas foram encaminhadas a partir do MER, tornando-se um modelo epistemológico alternativo, de certa forma prontas tiveram que ser encaminhadas previamente aos alunos devido ao tempo, conforme **Silva, Nunes, Guerra (2016), que é uma restrição, para que os alunos movimentassem seus EP; partimos de uma questão geratriz, que** diferente dos moldes franceses, foi colocado para a turma de graduandos, e não discutido previamente com eles; seguimos as ideias do PER de (BON, 2007; BON e

de Referencia (MER)¹¹ elaborado para questionar e analisar o ensino da Álgebra Linear, que é realizado por intermédio das obras O de Álgebra Linear, legitimadas nessa IES.

O PER nessa formação inicial assumiu três principais sistemas didáticos auxiliares, que denotaremos por S_1 , S_2 e S_3 . O Sistema auxiliar S_1 orienta os estudos do pesquisador na elaboração do MER, dizemos que é do tipo $S_1(X; \emptyset; Q_1)$, no qual $X = \{x_I\}$ e x_I simboliza o pesquisador estudando, elaborando o MER e onde o aluno é hipotético.

A potencialidade de nosso modelo, que propõe a reformulação de fenômenos transpositivos sobre o ensino de alguns objetos da disciplina Álgebra Linear, revelou-nos a possibilidade de sustentar um desenho e experimentar alguns itinerários didáticos a partir de sistemas de tarefas, desencadeadas pelo gênero de tarefas que é estudar qualitativamente sistemas lineares. Nossa investigação em didática nos fez criar um MER, em conexão com objetos do Ensino Médio, para desenvolver o estudo de Álgebra Linear, sem estarmos sujeitados a instituições dominantes, como os livros didáticos, mas a fontes históricas, as quais nos deram bons indícios de como (re) construir essa Organização Matemática e Didática.

O MER cumpre funções na análise didática que são menos conhecidas e, portanto, menos estudadas e que queríamos abordar de um modo mais prático e menos formal. O estudo se justifica por meio de tarefas com sistemas lineares, que é a grande tecnologia que justifica às técnicas, já que a partir do estudo qualitativo desse objeto, permeamos o estudo dos espaços vetoriais, combinações lineares, linearmente dependente e independente até transformações lineares.

Em nosso MER a questão Q_1 compreende uma família de questões do tipo: $Q_{1,0}$: **Como elaborar um modelo epistemológico de referência para questionar e analisar o modelo dominante da Álgebra Linear institucionalizado na formação inicial de**

CASAS, 2009, e BON, PEREIRA e CASAS, 2009); sendo o percurso caracterizado como um PER finalizado.

¹¹ [...] en la formulación de un problema didáctico cualquiera el didacta siempre utiliza, aunque sólo sea implícitamente, una descripción y una interpretación (esto es, un modelo epistemológico) del ámbito matemático que está en juego. La TAD ha subrayado desde el principio la necesidad de explicitar dicho modelo y utilizarlo como *referencia* para analizar los hechos didáctico-matemáticos (GASCÓN 1993, 1994-1995, 1998, 1999a, 2001). Se le llama modelo epistemológico de referencia (MER) y tiene un carácter siempre provisional. Es el instrumento con el cual el didacta puede deconstruir y reconstruir las praxeologías cuya difusión intrainstitucional e interinstitucional pretende analizar. Por esta razón el MER constituye un instrumento de emancipación del didacta y de la ciencia didáctica puesto que permite cuestionar la forma como las instituciones involucradas en la problemática didáctica interpretan el saber matemático [...] (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 4-5).

professores de matemáticas? $Q_{1,1}$: Por que questiono esse modelo dominante? $Q_{1,2}$: Quais as obras que tenho que estudar? $Q_{1,3}$: Quais condições e restrições tenho para elaborar esse MER? $Q_{1,4}$: Quais tipos de tarefas T são problemáticos? $Q_{1,5}$: Quais técnicas τ devo recorrer ou elaborar para solucionar as tarefas t pertencentes ao tipo T ? As questões aqui indicadas norteiam as atividades do pesquisador (diretor de estudo) nas etapas iniciais da metodologia do PER.

No processo de modelização do MER foi possível verificar que a técnica referente ao método da substituição e eliminação (tecnologia) justifica os métodos da adição e substituição, a gênese das matrizes e suas operações, o estudo dos espaços e subespaços vetoriais.

O sistema didático auxiliar S_2 constituiu as etapas de sala de aula, que se deu em 20 sessões, no âmbito do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), entre os anos de 2014 e 2015, em uma turma com 14 alunos graduandos em Licenciatura em Matemática. Denotamos esse sistema didático por: $S_2(X; Y; Q_2)$. Nesse sistema didático, $X = \{x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; \dots; x_{2,n}\}$, são os alunos em formação inicial; $Y = \{y_1\}$, representa o professor ministrante da disciplina Álgebra Linear (diretor de estudo). A questão Q_2 , desdobra-se em questões $Q_{2,0}, Q_{2,1}, Q_{2,2}$, etc. A questão Q_2 e suas auxiliares, foram formuladas durante as sessões de estudo (aulas) em sala de aula. Além disso, são essas questões que auxiliaram o pesquisador a formular a resposta ótima (esperada) R^\forall de sua tese doutoral, cujo sistema didático, denota-se por $S(X; Y; Q)$, no qual $X = \{x_1\} =$ doutorando, $Y = \{y_1\} =$ orientador e $Q =$ questão norteadora da tese doutoral (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Nossa questão Q é equivalente a questão geratriz Q_0 : *Qual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação de professores de matemática?*

Inicialmente questionamos os componentes de X de S_2 , do que trata a disciplina Álgebra Linear e eles responderam tratar do estudo dos vetores no espaço. Em seguida, propusemos tarefas como a aplicação do Teorema de Tales e assim resgatar a passagem da geometria para a álgebra até chegarmos na equação da reta.

A partir da 3ª sessão começamos a alimentar o *milieu* com obras que nos serviram de construtos históricos e epistemológicos na proposição deste PER adaptado, que tinha

como objetivo tratar dos objetos da Álgebra Linear com pouca abstração e os sistemas lineares nos permitiam isto, portanto, as tarefas de um modo geral trataram do estudo qualitativo deste objeto. Do momento do primeiro encontro aos momentos do trabalho da técnica e exploratório da técnica, apareciam na institucionalização de **Y** os objetos da Álgebra Linear. Questionamentos surgiram, por parte dos membros de **X** de **S**₂, como a Q_{2.3}: Há alguma relação entre os métodos? Deixamos que estes buscassem as respostas, porque isso é previsto na metodologia do PER.

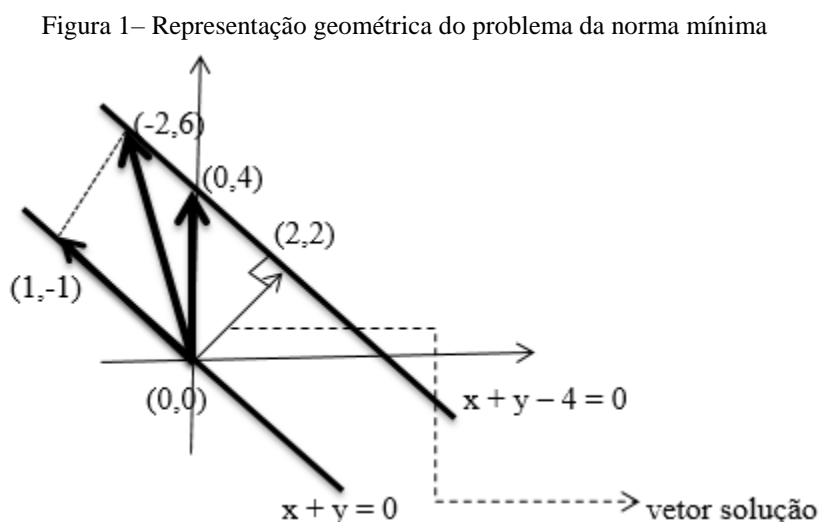
Nas sessões do PER, propomos tarefas aos alunos, que desencadeassem na resolução de sistemas lineares pelo método da substituição e eliminação, de forma que estes solucionassem tarefas com sistemas lineares genéricos, como, por exemplo,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases} .$$

Estas tarefas, pouco aparecem ou não estão presentes na

escola, mas revela a gênese do método do escalonamento de Gauss.

A partir de representações no plano cartesiano das soluções de sistemas lineares, esse registro geométrico serviu de motivação para trabalharmos com a ideia de vetor, em conexão com a ideia da resolução de menor tamanho ou problema de norma mínima (Figura 1).



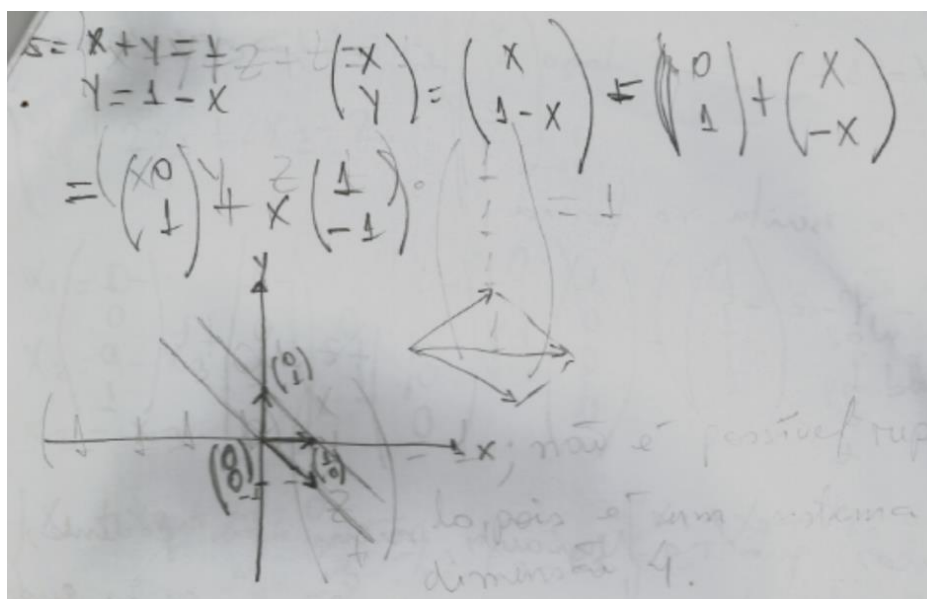
Fonte: Elaborada pelo primeiro autor, 2015.

A solução geral (S) do sistema passou a ser trabalhada como a solução particular (S_P) mais a solução do homogêneo associado (S_H), ou seja, $S = S_P + S_H$. O registro geométrico

colaborou com a aprendizagem desta tarefa, conforme a resposta “carimbada” pelo aluno, denotado por A₇, referente a tarefa t₆₂ (Como você interpreta a solução do sistema na solução matricial e com motivação geométrica?), R_x^{t62}: “[...] a solução matricial com motivação geométrica ajudou no entendimento da noção de vetor. Dado um sistema de infinitas soluções, temos uma solução do homogêneo associado a solução de um sistema principal”.

Com a motivação gráfica que fizemos, segundo nossa proposta de MER, obra presente no *milieu*, foi possível visualizar as diversas soluções do homogêneo adicionado à solução particular, que é única e que a partir destas, podemos determinar as diversas soluções do sistema, enfim revelamos um espaço formado por vetores. Vemos essa compreensão na Figura 2, que possui a resposta R_x⁰⁷⁵, elaborada pelo aluno A₅, para a tarefa t₇₅: Dado o sistema $x + y = 1$ de uma única equação de duas variáveis, escreva-o na forma matricial. Podemos representa-lo geometricamente?

Figura 2 - A resposta carimbada R_x⁰⁷⁵ dada por A₅



Fonte: Produção de A₅, 2015.

A ideia de transformações lineares foi introduzida a partir do questionamento Q₂₁: Então todo o sistema linear, ou ainda toda matriz é uma transformação linear. Uma das respostas para esse questionamento está denotada por R_x^{Q21}: “[...] sim, pois leva uma coisa noutra coisa. Ao substituímos valores nas variáveis determinamos as suas imagens”.

O terceiro sistema didático auxiliar, $S_3(X; Y; Q_3)$, possibilitou ao diretor de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer ($[T, \tau]$) da TAD. A questão está assim anunciada: Q_3 : Como esses futuros professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra Linear no Ensino Superior? (Etapa final do processo de formação).

Os 4 grupos apresentaram em 2 sessões uma atividade, sendo que 3 dos grupos utilizaram as ideias do MER como forma de construção de suas praxeologias e um grupo utilizou matrizes a partir de tabelas e não articulou com o estudo de sistemas lineares.

Em várias falas de alunos, sujeitos do processo de formação inicial, podemos compreender que as práticas com os sistemas lineares e o estudo das combinações lineares tem um amplo alcance, são objetos potentes, pois no caso dos sistemas lineares, tema de domínio dos graduandos de matemática, que estava apenas limitado ao estudo do próprio sistema, ganhou novas dimensões praxeológicas para o ensino da Álgebra Linear.

Enfim, a resposta ótima (esperada) R^\heartsuit de nosso percurso de estudo, cujo sistema didático, denotou-se por S_2 e S_3 , evidenciou que estudar sistemas lineares é estudar a própria Álgebra Linear, isto é, por meio de praxeologias com tarefas e técnicas integradas, em um nível de complexidade crescente, onde permeou a tecnologia, entendida como sendo o estudo qualitativo de sistemas lineares.

A segunda formação esteve vinculada ao projeto de formação continuada de professores de matemática do Ensino Básico (Ensino Fundamental e Médio), interligado as pesquisas a nível doutoral do “Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM)”, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA). O público alvo dessa formação continuada foram professores de matemática do ensino básico, principalmente, os das escolas públicas.

A formação continuada, aqui relatada, provém do primeiro módulo de formação do projeto de formação mencionado acima. Esse módulo teve como temática: “**Modelo Epistemológico Alternativo para o Ensino da Álgebra Básica Articulada à Aritmética**”. A temática explorada na formação continuada se interliga a dissertação de mestrado do segundo autor, na qual ele propõe um **Modelo Epistemológico Alternativo**

(MEA)¹² para o ensino da álgebra escolar, no Ensino Fundamental, articulada as ideias aritméticas do sistema de numeração posicional de base dez (PEREIRA, 2012). As ideias do MEA proposto por Pereira (2012) não serão expostas nesta seção, porque nossa intenção segue direcionada a metodologia do PER, adaptada a formação continuada de professores de matemática.

O PER que desenvolvemos possui 11 (onze) sessões com duração média de 1 (uma hora) e 40 (quarenta) minutos cada uma. Todas as sessões foram filmadas e gravadas, que, posteriormente, passaram por uma formatação acústica e transcrições parciais dos melhores áudios. As sessões seguiram um planejamento prévio para os dias de Sábado, mas ajustável conforme ocorressem imprevistos e interrupções no calendário institucional. O PER seguiu um plano de formação continuada norteada pelos recursos materiais disponíveis e acessíveis pela classe $[X, Y]$ (X = professores de matemática, Y = diretores de estudos), classe que integra o sistema didático principal $S(X; Y; Q)$ (CHEVALLARD, 2009d). A topogênese¹³ nesse PER esteve associada aos topos¹⁴ dos professores em formação e o topo do professor formador (diretor de estudo ocupante da posição principal no processo de formação).

As sessões do PER foram modeladas em conformidade com os sistemas didáticos $S(X; Y; Q)$, $S_0(X; Y; Q_0)$, $S_1(X; Y; Q_1)$, $S_2(X; Y; Q_2)$ e $\mathcal{S}(X; Y; Q_x)$. Entenda-se que os sistemas didáticos S_0 , S_1 e S_2 são auxiliares de $S(X; Y; Q)$. No sistema S_0 temos: $X_0 = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ = professores de matemática selecionados à formação continuada; $Y = \{y_1, y_2\}$ = orientador (y_1) e doutorando (y_2) (diretores de estudo); Q_0 : **Qual é o modelo epistemológico da Álgebra Escolar predominante no equipamento praxeológico do professor de Matemática quando este se torna professor da Escola Elementar?** A questão Q_0 orientou as observações dos diretores de estudo y_1 e y_2 , durante as sessões do

¹² Nossa compreensão sobre um MEA decorre a partir de um MER, ou seja, o MEA é o MER após ser aplicado no ensino institucionalizado. Pode-se dizer que se experimentaram os tipos de Tarefas T, as tarefas $t \in T$, por meio de uma ou mais técnica τ . Além disso, justificou-se o uso da técnica τ pela tecnologia θ e, por conseguinte, a teoria Θ justificou a tecnologia θ . Na TAD, temos uma organização praxeológica (CHEVALLARD, 1999, 2009c), constituída de uma organização matemática (OM) e de uma organização didática (OD).

¹³ Topogênese. Gênese dos equipamentos praxeológicos (e das relações institucionais associadas) de acordo com as posições do aluno e professor durante a construção praxeológica. Os topos (o lugar, em grego antigo), do estudante (respectivamente do professor) é aquela parte da posição do aluno (respectivamente do professor) que se refere às entidades praxeológica construídas ou em construção na classe (CHEVALLARD, 2009e, p. 5, tradução nossa).

¹⁴ Relações institucionais existentes no equipamento praxeológico desses professores, provenientes de sua formação inicial e de suas práticas docentes.

PER. Alertamos que a questão Q_0 possui certa complexidade, porque sua formulação vem com ideias de pesquisas já realizadas no contexto da TAD, portanto, modelo epistemológico, álgebra escolar, **equipamento praxeológico**¹⁵ e escola elementar, são algumas dessas. A questão Q_0 possibilitou aos diretores de estudo abordar a formação inicial desses professores.

O sistema didático auxiliar, $S_1(X; Y; Q_1)$, mobilizou o equipamento praxeológico, dos professores de matemática, nas sessões do PER, no primeiro módulo da formação continuada. A formulação de Q_1 segue a matiz de S_1 : Q_1 : **Quais tipos de técnicas τ são mobilizados pelos professores de Matemática do Ensino Básico quando explicam os tipos de tarefas T da Álgebra Escolar?** Essa questão permitiu aos diretores de estudo conhecerem as práticas que os professores de matemática mobilizam no ensino da álgebra escolar, nas diferentes instituições I (escola pública, escola particular, universidades, institutos federais, etc.), onde esses professores exercem suas atividades docentes (CHEVALLARD, 2009c).

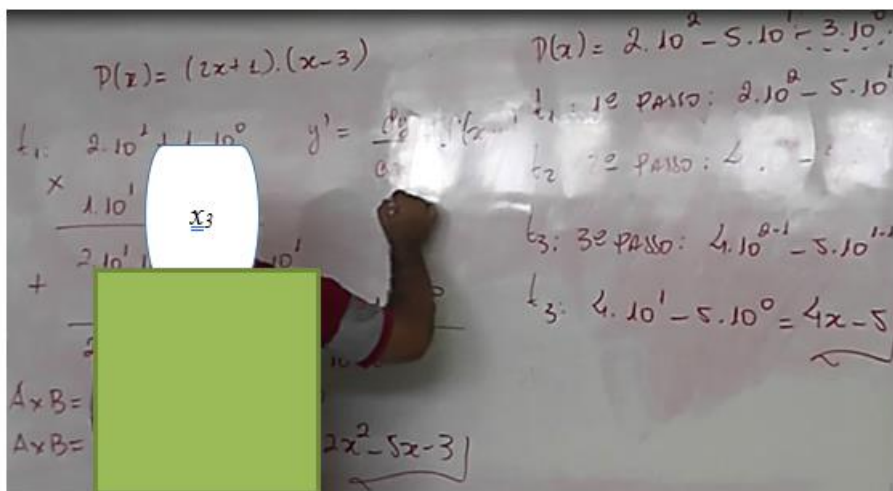
O terceiro sistema didático auxiliar, $S_2(X_2; Y; Q_2)$, possibilitou aos diretores de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer ($[T, \tau]$) da TAD. A questão está assim anunciada: Q_2 : **Como esses professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra no Ensino Fundamental e quais técnicas predominam nessa fase do Ensino Básico?** Com esse sistema didático o PER já avançou e o *milieu M* está estabelecido, existe a confiança entre o conjunto X_2 e Y . As sessões presseguiram, porque a questão norteadora Q (**Quais alterações e recombinações praxeológicas ocorrem, no equipamento praxeológico objetivado do professor de Matemática do Ensino Básico, durante o decurso de um PER por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar?**) engloba as três questões já anunciadas (Q_0 , Q_1 e Q_2) e oportunizou a formulação de outras questões no decurso das sessões do PER. Questões estas, que vieram, prioritariamente, dos professores de matemática em formação continuada. Assim, as repostas para as questões dos sistemas didáticos S_0 , S_1 e S_2 , estiveram sujeitas a organização de um *milieu* de trabalho M , o qual reuniu o conjunto de recursos antigos e novos que X e Y utilizaram. Entre esses recursos, alguns são obras O_k (livros didáticos de

¹⁵ [...] conjunto praxeologias dos quais a pessoa dispõe, da qual é equipada [...]: é o que nomeio de *equipamento praxeológico* da pessoa (CHEVALLARD, 2009c, p. 6, tradução nossa). O equipamento praxeológico compreende o conjunto de práticas que o professor de matemática possui para ensinar, por exemplo, as operações polinomiais no oitavo ano do Ensino Fundamental. Isso remete as técnicas τ , que são aplicadas na resolução das tarefas $t \in T$.

matemática, artigos, dissertações, etc.) possuíam respostas “prontas” para Q_0 , Q_1 , e Q_2 , que se denota por R^\diamond (CHEVALLARD, 2008, 2009b). Da análise das respostas R^\diamond (“ R autenticado”), $Y = \{y_1, y_2\}$ obteve o material para construção da resposta R^\heartsuit (resposta ótima). Porém, esse material precisou de um refinamento metodológico para fazer parte do *milieu* M do sistema didático principal $S(X; Y; Q)$. Nesse refinamento metodológico ocorreu a construção da resposta ótima (R^\heartsuit) para Q . Dessa forma, a resposta R^\heartsuit indicou a confirmação das hipóteses da tese doutoral do segundo autor.

A atividade final dos professores de matemática do Ensino Básico em formação continuada, consistiu na elaboração de uma proposta de aula para ensinar algum conteúdo de Álgebra do Ensino Fundamental II ou do Ensino Médio. Essas propostas de aulas contribuíram para a elaboração da resposta R^\heartsuit . A Figura 3 exibe o professor x_3 explicando sua proposta de aula a partir dos estudos desenvolvidos nas sessões do PER.

Figura 3 – Professor x_3 expondo sua proposta de aula



Fonte: Elaborada pelo segundo autor, 2016.

Além do professor x_3 , os professores x_1 , x_4 , x_5 , x_7 e x_8 , também expuseram suas propostas de aulas. A Figura 4 mostra a proposta de aula do professor x_7 .

Figura 4 – Esboço da proposta de aula do professor do x_7

Atividade 1

Calcular a adição entre os números do sistema de numeração decimal 23558 e 52376.

t₁: Decompor estes números em forma de numeração decimal, mostrando seu valor relativo.

t₂: Reescrever estes números em forma polinomial em potência de base dez.

t₃: Calcular a adição destes números reescritos em forma de potência de base dez.

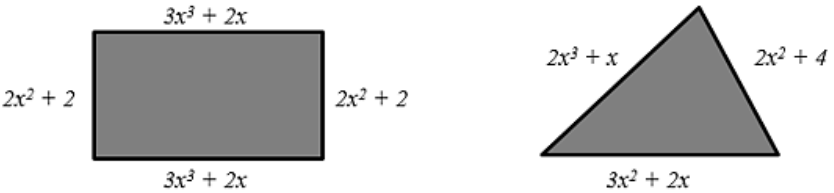
Atividade 2

Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas mostradas a seguir.

t₁: Escrever uma expressão polinomial que representa o perímetro de cada figura plana.

t₂: Calcular o perímetro de cada figura geométrica plana, utilizando potência de base dez (fazendo $x = 10$).

t₃: Calcular a soma dos perímetros das figuras geométricas planas, utilizando potência de base dez (fazendo $x = 10$).



Fonte: Elaborada pelo segundo autor, 2017.

As adaptações que aqui expusemos não fogem das noções teóricas originais do PER anunciadas na seção anterior. Os desdobramentos das ideias defendidas nesta seção estão nas teses de doutoramento dos dois primeiros autores.

Considerações finais

O objetivo principal das discussões deste artigo foi explicitar alguns aspectos metodológicos das noções originais do PER (CHEVALLARD, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e), que os dois primeiros autores adaptaram como parte da metodologia de suas pesquisas de teses doutorais. Para isso, expusemos na primeira seção algumas noções teóricas que se aplicam no contexto do sistema de ensino francês.

Vimos que a noção de TPE (*Travaux Personnels Encadrés*) é a gênese do PER (*parcours d'étude et de recherche*) (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Compreendemos que os TPE são dispositivos didáticos próprios do sistema de ensino francês, aplicados nas instituições de ensino secundário, colégios e liceus franceses. Esses dispositivos didáticos possuem regulamentação nacional do Ministério de Educação Francês. Funcionam por temáticas, conforme expostas no Quadro 1 (2015-2016 e 2016-2017). Possuem caráter interdisciplinar e visa à autônoma do aluno no desenvolvimento de suas habilidades e competências intelectuais. Nos TPE os professores assumem o papel de orientadores durante o ano letivo. Esse dispositivo assenta-se na formulação de uma questão **Q**, que

deve ser respondida a partir da escolha de um assunto pertinente às temáticas nacionais indicadas.

As AER (Activité d'étude et de recherche) segue próximas da pedagogia dos TPE, mas podemos dizer que são atividades mais “curtas”. Em matemática elas se aplicam muito bem, pois possuem um vínculo acentuado com os tipos de tarefas T (BARACHET; DEMICHEL; NOIRFALISE, 2007). Essa convergência, com os tipos de tarefas T , leva a formulação de uma questão Q . Na busca da resposta para essa questão Q , as tarefas $t \in T$, recorrem a técnica τ , que, por conseguinte precisa ser justificada pela tecnologia θ . A tecnologia θ carece de uma justificação teórica Θ para ser legitimada. Dá junção desses elementos cernes da Teoria Antropológica do Didático (TAD) surge uma organização matemática pontual (OMP) (CHEVALLARD, 2009a, 2009b), denotada por: $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Notamos que há uma dialética entre os TPE e as AER. Essa dialética vem por intermédio do sistema didático S , denotado por: $S(X, Y, Q)$. Nesse sistema didático temos a equipe X que estuda a questão Q (alunos, pesquisadores, professores, etc.) e a equipe Y (diretor (es) de estudo) que orienta o estudo de X na construção de uma resposta para Q (CHEVALLARD, 2001). Esse princípio metodológico dos TPE e das AER se expande na pedagogia da investigação do dispositivo do PER.

Nas teses doutorais dos dois primeiros autores deste artigo, a pedagogia da investigação proveniente do PER é a metodologia que alicerçou a coleta de informações durante o processo de formação inicial e continuada de professores de matemática. São duas teses, voltadas para o ensino da Álgebra, a do primeiro autor para o ensino da Álgebra Linear e a do segundo autor volta-se ao ensino da Álgebra Escolar.

Os construtos teóricos no que se refere ao estudo de saberes docentes estudados são reconstruídos a partir das interações com o diretor de estudo e demais alunos que compõe o *milieu*, pois a partir das análises do percurso de estudo que desenvolvemos, constatamos mudança no modo de fazer dos graduandos, pois as práticas apresentadas por eles quase não apresentaram o formalismo muito comum no ensino de Álgebra Linear e no ensino superior, foram bastante significativas, pois alunos nos disseram que trabalhar com que o aluno já tem internalizado em seu equipamento praxeológico, tornou mais simples o entendimento das articulações das práticas.

Queremos destacar que um dos resultados do processo de formação continuada está nos procedimentos didáticos que os professores, x_3 e x_7 , revelaram nas Figuras 3 e 4, principalmente, no aspecto praxeológico de elaboração de tipo de tarefas e tarefas, conforme o modelo teórico da TAD, em relação ao ensino e aprendizagem dos objetos da álgebra escolar.

Enfatizamos que na construção da resposta esperada R^\heartsuit (**reposta ótima** para as questões Q das duas teses), há as R^\diamond (“ R autenticado”) que vieram das obras O_k instituídas culturalmente, que forneceram ferramentas à análise das repostas R^\diamond . Entre essas obras O_k estão os livros de Álgebra Linear e a dissertação de Pereira (2012). Desse modo, o nosso sistema didático assumiu o esquema herbatiano desenvolvido: $[(S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{R^\diamond_1, R^\diamond_2, \dots, R^\diamond_n, O_{n+1}, \dots, O_m\}) \rightsquigarrow R^\heartsuit]$. Nesse esquema herbatiano o sistema didático S , o *milieu* $M = \{R^\diamond_1, R^\diamond_2, \dots, R^\diamond_n, O_{n+1}, \dots, O_m\}$ foram adaptados para os PER de formação de professores de matemática. Nessa adaptação, as questões Q assumem várias problemáticas: $Q_{1,0}$: **Como elaborar um modelo epistemológico de referência para questionar e analisar o modelo dominante da Álgebra Linear institucionalizado na formação inicial de professores de matemáticas?** $Q_{1,2}$: **Quais as obras que tenho que estudar?** Q_2 : **Como esses professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra no Ensino Fundamental e quais técnicas predominam nessa fase do Ensino Básico?** Assim, a construção das repostas ótimas R^\heartsuit para as questões Q das duas teses, envolveu o esquema herbatiano desenvolvido e os sistemas didáticos auxiliares $S_k(x; Y; Q_x; P_k)$, no qual P_k são as praxeologias (ANDRADE, 2012) que motivaram x formular as questões Q_x . Portanto, a pedagogia da investigação do PER, aqui descrita e adaptada aos objetivos das duas pesquisas doutorais, indicam a pertinência metodológica do PER às pesquisas em Educação Matemática.

Referências

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. Ag; SILVA, M. J. F. *Engenharia didática: evolução e diversidade*. In: *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: < <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat> > Acesso em: 24 jun. 2013.

ANDRADE, R. C. D. *A noção de Tarefa Fundamental como Dispositivo Didático para um Percorso de Formação de Professores: o caso da geometria*. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2012.

ANDRAL, Luc et al. *Mathematiques et TPE : un enjeu importante*. In: Repères – IREM, n. 52, 2003. Disponível em: < <http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24>>. Acesso em: 26 out. 2014.

BARACHET, F.; DEMICHEL, Y.; NOIRFALISE, R. *Activites D'etude et de Recherche (AER) pour Dynamiser L'etude de la Geometrie dans L'espace en Classe de Seconde*. In: Petit x, n. 75, p. 34-49, 2007. Disponível em: < <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>> Acesso em: 26 out. 2014.

BON, C. F., PEREIRA, A., CASAS, J. M.. *Diseño de un REI para la docencia práctica de matemáticas en una escuela de Ingeniería*. Actas 17 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, CUIEET. 2009.

CHEVALLARD, Y. *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martínéz Montañes, Sevilla. Disponível em: < <http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF>>. Acesso em: 18 abr. 2012.

_____. *Les TPE comme problème didactique*. 2001. Disponível em: < <http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 26 out. 2014.

_____. *Symposium: “Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche*. In: Colloque international “Efficacité et Équité en Éducation”. 2008. Disponível em: < http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf>. Acesso em: 14 set. 2012.

_____. *La notion de PER : problèmes et avancées*. 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acesso em: 24 jun. 2013.

_____. *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155>. Acesso em: 24 jun. 2013.

_____. *La TAD face au professeur de mathématiques*. 2009c. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2011.

_____. *À propos des PER*. In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 1; pp. 7-23, 2009d. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-20010-1.pdf>>. Acesso em: 27 mar. 2016.

_____. « *Le fait de la recherche* ». In: Journal du Seminaire TAD/IDD – 3; pp. 1-8, 2009e. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf>>. Acesso em: 27 mar. 2016.

_____. *Introduction à la théorie anthropologique du didactique / Introdução à teoria antropológica do didático*. Slides bilíngue: Francês/ português. 2011. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 24 jun. 2013

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática*. In: Educação. Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013. Disponível em : < <http://revistas.pucsp.br/emp> > . Acesso em : 21 jun. 2014.

FONSECA, C. *et al. Diseño de un Recorrido de Estudio e Investigación en los Problemas de Modelización*. 2009. Disponível em: <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/DidMatDisCientifica/Fonseca_Casas_Bosch_Gascon_R.pdf >. Acesso em: 24 jun. 2013.

FORTIN, C. *Travaux Personnels Enquadrés ou L'effet Causal de L'interdisciplinarité*. In: Aster - Recherches en didactiques des sciences et des technologies, n. 39, 2004. Disponível em: < http://ife.ens-lyon.fr/edition-electronique/archives/aster/web/fascicule.php?num_fas=457 >. Acesso em: 26 out. 2014.

PEREIRA, J. C. S. *Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R.; GAZZOLA, M. P. *Parcours d'étude et de recherche dans l'école secondaire : une étude longitudinale*. 2013. Disponível em: <http://www.researchgate.net/publication/236004532_Parcours_dtude_et_de_recherche_dans_lcole_secondaire_une_tude_longitudinale >. Acesso em: 26 out. 2014.

SILVA, R., NUNES, J. M. V., GUERRA, R. B. G. *Relação entre tempo didático e currículo em um ambiente multisseriado*. Perspectivas da Educação Matemática. 2016. Disponível em: <<http://200.129.202.50/ojs/index.php/pedmat/article/viewFile/1561/2247>>. Acesso em 09 jan, 2017.

Texto recebido: 03/05/2017

Texto aprovado: 20 /10/2017