

# Geometría con papel\*

**María Consuelo Cañadas Santiago, Francisco Durán Ceacero, Sandra Gallardo Jiménez, Manuel José Martínez-Santaolalla Martínez, María Peñas Troyano y José Luis Villegas Castellanos** (Grupo PI de Investigación en Educación Matemática – Universidad de Granada)

Nivel educativo: E.S.O.

Argumentamos sobre el uso de la papiroflexia como recurso didáctico en el aula de matemáticas. A través de diversas investigaciones sobre las características que un buen material didáctico debe tener se avala la importancia de la papiroflexia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Proporcionamos unas sugerencias didácticas, que invitan a la reflexión sobre el papel de la geometría dentro del currículo. Por último, consideramos el valor de la papiroflexia como estímulo de distintas facultades intelectuales y físicas.

## Introducción

La geometría es, tal vez, la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad. Sin embargo, tenemos la percepción de que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sigue sin atribuírsele la importancia que efectivamente tiene dentro de esta ciencia, fundamentalmente en sus aspectos sintéticos o visuales. Se arrincona al final de un temario, se trabaja casi exclusivamente la geometría analítica y se valoran únicamente sus facetas propedéuticas. Una posible causa de este problema es el poco uso de materiales adecuados (en un sentido que se precisará más adelante) para el tratamiento de la geometría o el desconocimiento de los existentes por una parte del profesorado.

Consideramos que el uso de materiales didácticos manipulativos es fundamental en el proceso de enseñanza de la geometría y es que “el acercamiento a los contenidos matemáticos debe apoyarse en actividades prácticas y en la manipulación de objetos concretos y familiares, para después seguir avanzando hacia formas más figurativas y simbólicas que faciliten la abstracción.” (MEC, 1992, 71).

En esta comunicación expondremos una amplia gama de posibilidades que ofrece el papel y su doblado (papiroflexia) para la enseñanza de la geometría. Asimismo, mostraremos que el papel permite una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar y se convierte en un elemento motivador para el alumno.

## Geometría y papel

Como muestra la insistencia explícita de los currículos más recientes, sigue siendo necesario abogar por la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar, sobre todo en lo relativo al papel que desempeña en la vida cotidiana. Una formación geométrica adecuada per-

---

\* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

mite conseguir un mejor conocimiento del espacio y como fuente de modelos y situaciones problemáticas para el aprendizaje de las matemáticas (Mora, 1995). Además, es innegable la presencia de la geometría en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía). El “lenguaje de las formas” es también un componente esencial del arte, en todas sus manifestaciones visuales, y representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.

Tras esta justificación estimamos que, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la geometría debe tratarse como:

1. Ciencia del espacio.
2. Método de visualización y representación.
3. Punto de encuentro entre la matemática como teoría y la matemática como modelo (Murillo, 2000).

En este proceso el profesor deberá estar involucrado de forma activa, “organizará el curso a su manera, con los ejemplos que estime convenientes, teniendo en cuenta los intereses y preferencias de los alumnos” (Santaló, 1993), quedándole claro, además, que “no hay manera única de producir nuevos conocimientos matemáticos ni un modo único de aprenderlos” (Coriat, 1987).

Es claro que al profesor le queda un amplio margen para el establecimiento reflexivo de la función de un determinado material didáctico, entendiéndose por tales, todos los objetos usados por el profesor o por el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el fin de lograr unos objetivos didácticos programados. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje. Su uso permite una mayor independencia del alumno respecto al profesor, conectar las matemáticas escolares con el entorno físico del alumno, favorecer un clima de participación en el aula y el trabajo en equipo de los alumnos.

Consideramos que el papel, como material didáctico manipulativo, proporciona una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar ya que la manipulación “constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático” (Segovia y Rico, 2001, p. 86), y además, así el estudiante “adquiere una percepción más dinámica de las ideas” (Mora, 1995, p.104).

Asimismo, el doblado de papel cumple con las “condiciones generales” que Coriat (1997, p. 159) señala como adecuadas para los materiales didácticos:

1. Disponibilidad en el momento que se decide usar.
2. Equipamiento suficiente para todos los alumnos.
3. Cierta práctica<sup>1</sup> por parte del profesor y de los alumnos en el manejo antes de empezar a razonar matemáticamente con ellos.

<sup>1</sup>. Entendemos por “cierta práctica” el hecho de que todo el mundo ha manipulado papel y lo ha doblado alguna vez en su vida, ya sea para introducir un folio en un sobre o para construir una simple pajarita.

4. Temporalización adecuada que permita extraer consecuencias a la mayoría de los alumnos en los momentos previstos.

Además, el papel es un material económico y está al alcance de todos. Su uso permite la manipulación de los objetos geométricos, un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio y los procesos de construcción implicados son lógicos, eficientes y económicos.

## El arte del doblado del papel

La papiroflexia, también llamada origami, es una tradición milenaria que, originalmente, estaba reservada a la nobleza y los samuráis japoneses. Hace relativamente pocos años se introdujo en Europa y en América, tomando un gran impulso en el siglo pasado.

La papiroflexia se puede definir como la creación de figuras fácilmente reconocibles a partir de una hoja de papel. Una simple hoja de papel y algo de paciencia y maña son los requisitos fundamentales para desarrollar esta disciplina.

Existen cuatro criterios para la clasificación de las distintas modalidades de origami: finalidad (artístico, educativo), forma del papel utilizado (papel completo, tiras), cantidad de piezas implicadas (tradicional, modular) y reglas de uso (se permite o no cortar y pegar, se permite el uso de más de una pieza).

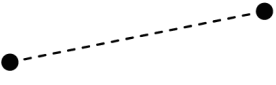

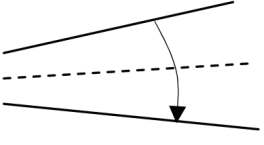
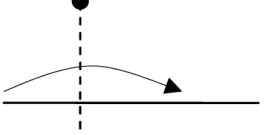
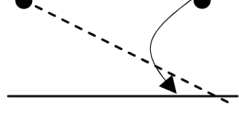
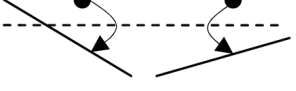
## Axiomas de la papiroflexia

La papiroflexia ha sido considerada en ocasiones como “arte-ciencia” y los matemáticos han sido de los científicos que más profusamente la han estudiado. Existen varias propuestas de axiomas (o reglas del juego) para la papiroflexia. Para los propósitos del trabajo realizado, hemos escogido la propuesta del matemático japonés Humiaki Huzita, aunque hay otras posibles, como las de Beitia o Alperín<sup>2</sup>.

Hemos completado la tabla siguiente, extraída de la propuesta de Humiaki Huzita, con una columna que incluye el objeto matemático construido por el doblado que postula cada axioma.

En cada uno de los axiomas está implicada una forma posible de plegado del papel, pero también un objeto matemático construible. Es aquí donde comienza la tarea del profesor y su habilidad para organizar la enseñanza de la geometría, con los ejemplos que estime convenientes. Por tanto, el profesor puede desarrollar, a partir de los axiomas anteriores, actividades que supongan la construcción de representaciones de objetos matemáticos, teniendo en cuenta, por supuesto, los intereses y conocimientos previos de los alumnos.

<sup>2</sup>. <http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html>

Axioma	Gráfico <sup>3</sup>	Objeto Matemático
Dados dos puntos $p_1$ y $p_2$ , se puede realizar un pliegue que los conecte.		Recta que pasa por dos puntos
Dados dos puntos $p_1$ y $p_2$ , se puede realizar un pliegue que los conecte.		Mediatriz del segmento $P_1P_2$
Dadas dos rectas $l_1$ y $l_2$ , podemos plegar $l_1$ sobre $l_2$ .		Bisectriz del ángulo formado por las rectas $l_1$ y $l_2$ .
Dado un punto $p$ y una recta $l$ , podemos hacer un pliegue perpendicular a $l$ que pase por $p$ .		Recta perpendicular a otra que pasa por $p$ . Segmento de longitud mínima que une un punto de $l$ y $p$ . Distancia de $p$ a $l$ .
Dados dos puntos $p_1$ y $p_2$ y una recta $l$ , podemos hacer un pliegue que haga corresponder a $p_1$ , con un punto de $l$ y que pase por $p_2$ .		Repitiéndolo, se obtiene la envolvente de una parábola.
Dados dos puntos $p_1$ y $p_2$ y dos rectas $l_1$ y $l_2$ , podemos hacer un pliegue que haga corresponder a $p_1$ , con un punto de $l_1$ y $p_2$ con un punto de $l_2$ .		Permite resolver ecuaciones cúbicas <sup>4</sup>

## Implementación en el aula

Debemos tener en cuenta que la papiroflexia es un medio, no un fin: no es suficiente proporcionar un “manual ilustrado”; la riqueza va más allá: cuestionando, estudiando propiedades, observando, analizando y conjeturando.

<sup>3</sup>. La línea discontinua corresponde al pliegue que se postula construable.

<sup>4</sup>. <http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html>

Mostraremos algunos ejemplos de actividades que pueden realizarse mediante el plegado de papel. La tabla en sí proporciona una orientación sobre las posibilidades didácticas que ofrece la papiroflexia en el aula de matemáticas.

Tipo de Tarea	Descripción	Contenidos implicados
Doblado de elementos geométricos básicos.	Doblar: Un cuadrado a partir de un folio A4. Un cuadrado a partir de un trozo irregular de papel. Cuadriláteros de distintos tipos. Un triángulo equilátero. Un hexágono. Un pentágono regular. Otros polígonos (regulares e irregulares).	Cuadriláteros, perpendicularidad, paralelismo, geometría del triángulo, clasificación de polígonos.
Simetría	Calcula el simétrico de un punto respecto de otro punto. Calcula el simétrico de un punto respecto de una recta.	Simetría plana.
Lugares geométricos	Doblar: La bisectriz de un ángulo. La mediatriz de un segmento. Las cónicas.	Geometría sintética elemental. Lugares geométricos.
Proporcionalidad, semejanza.	Doblar: Un rectángulo de proporciones 1:2. Un rectángulo 1:3. Un rectángulo $(1:\sqrt{2})$ . Un rectángulo $(1:\sqrt{3})$ . Dos triángulos semejantes. Construye dos polígonos semejantes. Divide un segmento dado en n partes iguales doblando papel.	Cuadriláteros, proporcionalidad, números racionales e irracionales, semejanza, teorema de Thales
Geometría del espacio.	Doblar: Un poliedro regular (cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro). Un ditetraedro. Un icosaedro estrellado.	Poliedros
Problemas	Problemas diversos.	Resolución de problemas.

## Comentarios

1. Varias de las actividades anteriores han sido propuestas en un taller sobre materiales didácticos (Grupo PI, 2002).
2. La actividad del doblado de cuadriláteros y otros polígonos admite muchas otras tareas relacionadas con procedimientos de identificación y clasificación de figuras geométricas.
3. La construcción de los poliedros forma parte de la papiroflexia modular. Implica, por tanto, dos fases: construcción de la pieza base, lo que conlleva nociones de paralelismo, perpendicularidad, simetría...; y construcción del poliedro a partir de los módulos o piezas base, actividad en la que está fuertemente implicado el razonamiento espacial y otras capacidades geométricas. Por otra parte, los poliedros de papel así construidos, en su calidad de modelos, admiten otro buen número de actividades significativas.
4. El último bloque de actividades, sintetizado con el epígrafe "Problemas diversos", incluye problemas de distinto tipo en los que resulta de ayuda el doblado de papel. Sirvan como ejemplo el doblado del triángulo de área máxima contenido en un cuadrado (optimización) o el recuento del número de dobleces marcados en una tira de papel que se dobla sobre sí misma (inducción).

## Conclusión

En esta comunicación hemos pretendido mostrar las posibilidades de la papiroflexia para el estudio de la geometría, así como su gran versatilidad como material didáctico. Hay que resaltar que su práctica desarrolla diferentes tipos de habilidades mentales, entre otras, potenciar la visión geométrica plana y espacial, fomentar la creatividad y desarrollar la intuición (Ledesma, 1992).

Dentro del campo de la geometría, la papiroflexia desarrolla la comprensión de conceptos como diagonal, mediana, vértice, bisectriz, etc, y favorece la visualización de cuerpos geométricos. El proceso de creación y ejecución de una figura de papiroflexia implica, en mayor o menor grado dependiendo de su complejidad, análisis e imaginación. Además, se fomenta el desarrollo de estrategias útiles en la resolución de problemas.

Al mismo tiempo la papiroflexia desarrolla en el alumno aspectos como la habilidad manual, la concepción volumétrica, la coordinación de movimientos y la psicomotricidad fina. Igualmente, enseña a seguir instrucciones, cumplir normas y ayuda a desarrollar la cooperación.

Actualmente, la papiroflexia se está estudiando como medio de representación de objetos matemáticos en general y geométricos en particular. Existen estudios relativos a la papiroflexia en relación con sus axiomas y teoremas; algoritmos desarrollados a partir del trabajo realizado con este medio; y otros estudios más generales, relacionados con la topología, los poliedros, las geodésicas, la modelización, la teoría del caos o los números construibles.

## Bibliografía

- **CORIAT, M.** (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En **RICO, L.** (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- **GRUPO PI** (2002). Materiales en la resolución de problemas. En **CARDEÑOSO, CASTRO, MORENO Y PEÑAS** (Eds.). *Resolución de Problemas*. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- **HUMIAKI HUZITA** (1992). Understanding Geometry through Origami Axioms. En **J. SMITH** (Ed), *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy*, British Origami Society.
- **LEDESMA, A.** (1992). Geometría con un folio. *Épsilon*, 24.
- **MORA, J.A.** (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *UNO*, 3.
- **SANTALÓ L.A.** (1993). *La Geometría en la Formación de Profesores*. Buenos Aires: Red Olímpica.