

# Condições de representação da planificação de uma Pirâmide Triangular

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA

PROEM - PROGRAMAS DE ESTUDOS E PESQUISAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA DA PUC/SP - ZEZE@PROEM.PUCSP.BR

NELY HARUYO MATSUMURA ARDAYA

PROFESSORA DA E.T.E. PROF. HORÁCIO AUGUSTO DA SILVEIRA E DA E.E. ALBINO CESAR.

*Este trabalho relata o resultado das discussões de uma atividade de planificação apresentada no curso de Geometria do Projeto Pró-Ciências, oferecido pelo PROEM-PUC/SP a professores da rede estadual de educação, em convênio com a FAPESP e a SEE.*

*No estudo de planificação de figuras espaciais, um dos tópicos enfocava as pirâmides de base triangular, ou tetraedros. Em particular, uma das atividades era obter uma planificação de tais pirâmides a partir de dois triângulos: um representando a base e o outro uma das faces. Procurando a solução, um grupo deparou-se com uma figura que não permitia a representação de uma pirâmide no espaço, procurando as respostas para tal impossibilidade o grupo resolveu aprofundar as discussões e, com o auxílio do Cabri II, verificar as condições necessárias para a existência de tal pirâmide.*

## Palavras chave:

Planificação de figuras do espaço. Pirâmides. Cabri II. Formação de professores.

## O PROBLEMA

Em situações anteriores, no curso, concluímos que a planificação de uma pirâmide triangular (figura 1) seria obtida se, nos triângulos que representam as faces laterais da pirâmide, os lados que formam uma mesma aresta tiverem mesma medida e, também, se as retas suportes das alturas desses triângulos se interceptarem num ponto  $V'$ , projeção do vértice da pirâmide sobre o plano da base.

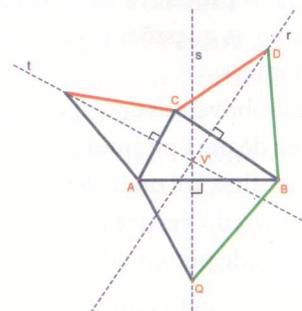


Figura 1

Respeitando essas condições, foi possível representar a planificação de pirâmides a partir de um triângulo

base e de um ponto representando a projeção do vértice (figura 2). Mas, as condições estabelecidas não eram suficientes para garantir a planificação de uma pirâmide triangular (construtível) partindo de dois triângulos: um para a base e outro para uma das faces laterais (figura 3)

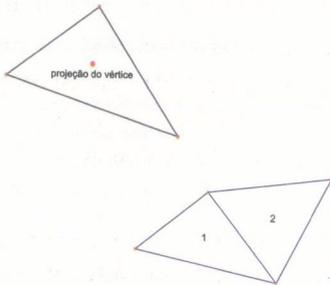


Figura 2 e Figura 3

Considerando o triângulo 1 como base e o triângulo 2 como uma das faces da pirâmide, a hipótese inicial era, que qualquer ponto sobre a reta suporte da altura de um triângulo – face relativa à respectiva aresta da base, poderia representar a projeção do vértice e possibilitar uma infinidade de planificações de pirâmides construtíveis. No entanto, uma das figuras construídas depois de recortada, não permitia a representação de uma pirâmide, os triângulos construídos como faces permaneciam num mesmo plano.

Algo mais precisava ser considerado e algumas questões precisavam ser respondidas:

Por quê obtivemos uma figura plana, em vez de uma pirâmide?

Na planificação, onde deveria estar a projeção do vértice para obtermos a pirâmide pretendida?

### Em Busca de Respostas

Na tentativa de encontrar as respostas foi necessário observar melhor a pirâmide:

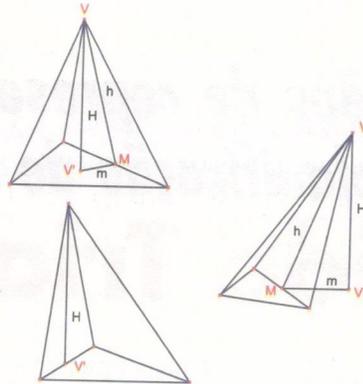


Figura 4

Independente da localização da projeção do vértice da pirâmide (figura 4), percebemos que o triângulo  $VMV'$  é retângulo em  $V'$  e, portanto,  $b_i = H^2 + m_i^2$  ou  $H^2 = b_i^2 - m_i^2$ , com  $i=1,2,3$  pois, para cada face teremos um  $b$  e um  $m$  associados à ela. Assim, para garantir a existência da pirâmide no espaço precisamos observar também a existência de  $H$  e considerar para tal que:  $b_i \neq m_i$  e  $b_i > m_i$ .

Para melhor visualizar a situação (figura 3), a construção da planificação da pirâmide foi feita no Cabri II.

- Inicialmente foi construída a reta  $r$  perpendicular a  $\overline{BC}$  (figura 5), pois  $V' \in r$ ;  $V'$  é projeção do vértice da pirâmide sobre o plano da base.

- Depois, as circunferências de centros: em B e raio BD, em C e raio CA, que garantirão a igualdade das medidas dos lados dos triângulos das faces, que formarão mesmas arestas.

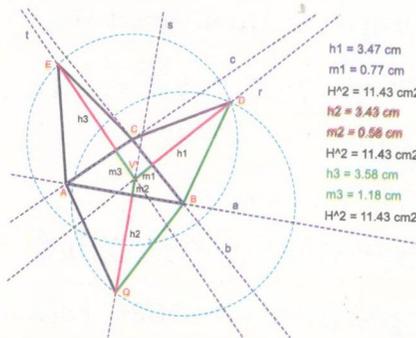


Figura 5

Pudemos notar com o Cabri II que com a manipulação do ponto  $V'$  sobre a reta  $r$ , desaparecia o triângulo  $ABQ$  e com a manipulação do vértice da segunda face desaparecia o triângulo ACE. Com o cálculo do valor de  $H$  a partir das medidas dos segmentos  $b_i$  e  $m_i$ , pudemos constatar que nesses momentos  $H$  nos leva a uma impossibilidade ( $b_i < m_i$ ).

### Aprofundando o Estudo

Resolvemos, então, aprofundar um pouco mais nossas observações sobre a existência da altura da pirâmide ( $H$ ) para obtermos construções consistentes.

1º Caso:  $b_i = m_i$

a) A projeção do vértice da pirâmide coincide com o vértice de um dos triângulos procurados.

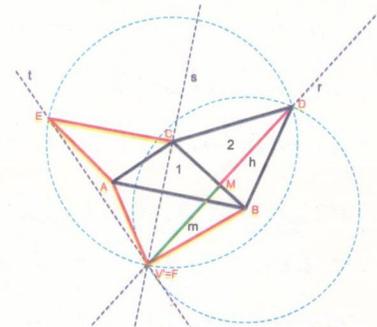


Figura 6

Tomando F como ponto de interseção das duas circunferências, determinamos o triângulo ABF como uma das faces procuradas. Manipulando  $V'$ , sobre a reta  $r$ , para que coincida com F (figura 6) notamos que F é simétrico de D em relação a  $\overline{BC}$ , fazendo  $b = m_i$ , para as faces BCD e ABF.

Substituindo este resultado na nossa relação inicial, teremos  $H=0$  e portanto o triângulo ABF no mesmo plano da base da pirâmide.

Podemos comprovar tal fato ob-

servando que o quadrilátero AFBC é composto pelos triângulos BCF e ACF, que por sua vez são congruentes, respectivamente, aos triângulos BCD e ACE, pois comparando os triângulos BCD e FBC, temos:  $\overline{CB}$  comum aos dois triângulos,  $\overline{DB} = \overline{BF}$  (raios da mesma circunferência de centro B) e  $\overline{DC} = \overline{CF}$  (raios da mesma circunferência de centro C).

Podemos mostrar, igualmente, que os triângulos ACE e ACF são congruentes.

Assim, construindo a planificação com  $b = m$  teremos a planificação de uma pirâmide não-construtível, pois sua altura  $H$  será igual a zero.

**b) A projeção do vértice da pirâmide coincide com o vértice da face dada.**

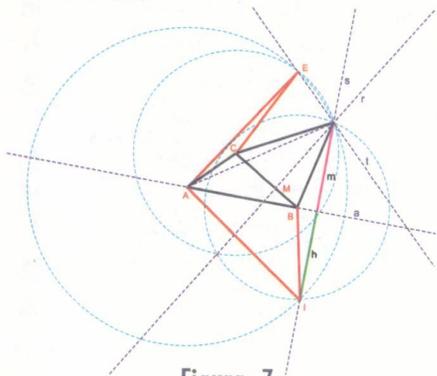


Figura 7

Se movimentarmos  $V'$  até o ponto D, vértice da face dada, (figura 7) obteremos o triângulo BDI isósceles, pois  $\overline{BD}$  e  $\overline{BI}$  são raios da mesma circunferência de centro B, o que nos dará  $b = m$ . Também podemos observar que o ponto I encontra-se na interseção da circunferência de centro B com a reta que passa pelo ponto D (perpendicular à reta AB).

Como fizemos anteriormente, podemos mostrar que o quadrilátero ABDC é uma composição dos triângulos ABD e ACD, congruentes res-

pectivamente aos triângulos ABI e ACE. Também neste caso, teremos a planificação de uma pirâmide não construtível, pois a altura da pirâmide será nula, portanto o triângulo BCD estará no mesmo plano da base da pirâmide.

**2º Caso:  $b < m$ .**

Nos casos anteriores detectamos dois pontos particulares F e I na circunferência de centro B (raio BD) que não permitiam a construção da pirâmide desejada, daqui em diante, a partir da construção do triângulo ABQ, usaremos os pontos F e I como referências para outras conclusões.

**a) Considerando Q à esquerda do ponto F na circunferência de centro B**

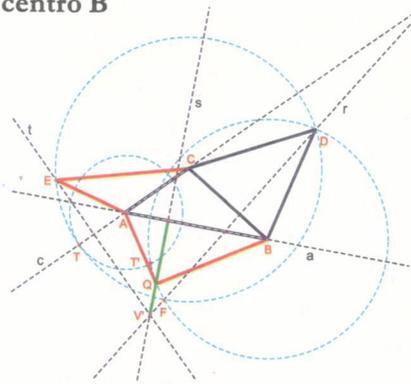


Figura 8

Tomando um ponto  $Q \neq F$  na circunferência de centro B, à esquerda de F (figura 8), determinamos o ponto E, na circunferência de centro C tal que  $AQ = AE$ . Determinando também o ponto T na interseção da circunferência de centro C com a reta AC, notamos que a manipulação do ponto Q (à esquerda de F) faz o ponto E se aproximar de T e quando os dois coincidem o triângulo ACE deixa de existir, pois  $CE = AC + AE$ .

Para delimitar tal situação na circunferência de centro B determinamos o ponto  $T'$  tal que  $AT = AT'$  e assim

concluir que o ponto Q não pode assumir nenhuma posição no arco  $FQT'$ .

A construção da reta s, suporte da altura do triângulo ABQ em relação ao vértice Q, determina o ponto  $V'$  na interseção com a reta r. A manipulação de Q no arco  $FT'$  faz com que o ponto  $V'$  pertença a região externa da circunferência de centro C, o que significa que  $V'$  está a uma distância  $m$ , maior que a altura  $h$ , em relação ao vértice Q, de qualquer triângulo ABQ construído. Teremos  $h < m$  e como consequência a não existência da representação da pirâmide pretendida.

**b) Considerando Q à direita do ponto I na circunferência de centro B**

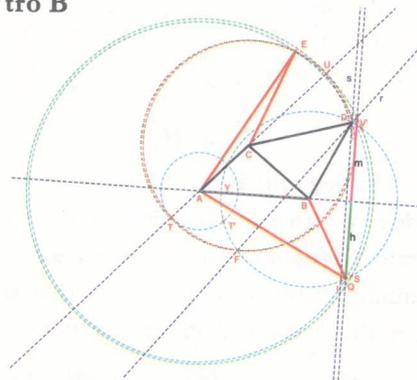


Figura 9

Vamos considerar agora o ponto Q à direita do ponto I, interseção da reta que passa por D e é perpendicular à reta AB. Podemos notar que à direita do ponto I existe um arco na circunferência de centro B em que também  $h < m$ .

Determinando o ponto U na interseção da reta AC com a circunferência de centro C, teremos  $AU = AC + CD$ . A circunferência de centro A e raio AU nos dará o ponto S na circunferência de centro B de tal forma que  $AS = AC + CD$ . Colocando o ponto Q no arco IS, o triângulo ABQ será obtusângulo e a reta suporte

de sua altura em relação ao vértice Q encontrará a reta r no ponto V' na região externa à circunferência de centro B, o que nos dará  $h < m$ .

**3º Caso:  $h_1 = 0$**

Agora vamos observar o que acontece quando movimentamos o ponto Q à esquerda de T' e à direita de S na circunferência de centro B.

**a) Q à esquerda de T' na circunferência de centro B**

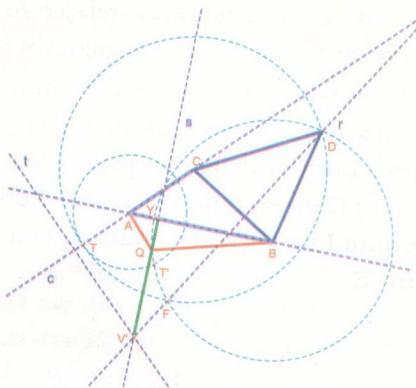


Figura 10

Se determinarmos Y na interseção da circunferência de centro B com a reta AB (figura 10) perceberemos que qualquer ponto Q tomado sobre o arco T'Y, não poderá ser o vértice do triângulo construído sobre  $\overline{AB}$ . Tal escolha resultaria na impossibilidade de construção do triângulo ACE com  $AE=AQ$ , pois a circunferência de centro A e raio AQ não interceptaria a circunferência de centro C. Por outro lado, o ponto E deveria estar na reta t, perpendicular ao lado AC, passando por V', e esta reta não intercepta a circunferência de centro C nos levando a concluir que o triângulo ACE não existe ( $CE > AE + AC$ ).

Neste caso, a não existência do triângulo ACE nos leva a considerar  $h = 0$  e obter  $h < m$ , para o Cabri II o triângulo ACE deixa de existir, bem como o cálculo de  $H^2$  (ver figura 5)

aparece como não existente.

**b) Q à direita de S na circunferência de centro B**



Figura 11

Tomando o ponto J na interseção da circunferência de centro B com a reta AB (figura 11) e o ponto Q sobre o arco SJ, mais uma vez não poderemos determinar o triângulo ACE pois, se  $AQ=AE$  e  $CD=CE$ , obteremos  $AE > AC = CE$ , facilmente verificado quando traçamos a reta t perpendicular à reta AC, passando por V'. No caso em que  $Q \equiv J$ , teremos A, B e Q colineares e, portanto, a não existência do triângulo ABQ.

Assim, pudemos ver que o ponto Q não pode pertencer ao arco SJ, pois aqui também obtemos  $h < m$ .

É evidente, pela própria natureza do problema proposto, que não é necessário pesquisar o ponto Q sobre o arco JDY, pois se o objetivo é obter a planificação de uma pirâmide construtível, o ponto Q só poderá estar no arco já estudado YFJ.

**OBSERVAÇÃO:  $m_1 = 0$**

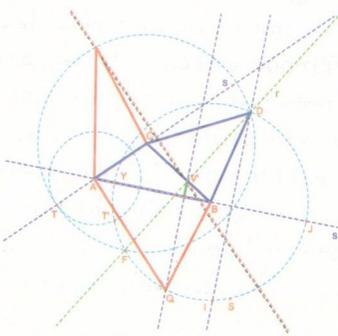


Figura 12

Para que m seja zero, teremos que considerar a projeção do vértice da pirâmide coincidindo com o pé da altura do triângulo da face dada (V' pertence ao segmento CB). Neste caso, a altura da face dada coincide com a altura da pirâmide e uma das faces da pirâmide será perpendicular ao plano de sua base.

Podemos observar que, mesmo não existindo um dos triângulos retângulos (de lados  $h_1, m_1$  e H), pois um dos  $m_i$  é zero, teremos  $h_1 > m_1, h_2 > m_2, h_3 > m_3$  e o ponto Q não pertencerá aos arcos proibidos.

**4. Concluindo o Estudo**

Finalmente, pudemos observar que a planificação de uma pirâmide de base triangular, dados a base ABC e uma das faces CBD, será obtida se tomarmos, para vértice do triângulo ABQ, um ponto Q qualquer, na circunferência de centro B e raio BD, mais precisamente, no arco entre os pontos F e I (a partir de Q constrói-se a face ACE). Estando os triângulos ABQ e ACE assim construídos obtemos a projeção do vértice da pirâmide (V) sobre a reta r entre os pontos F e D.

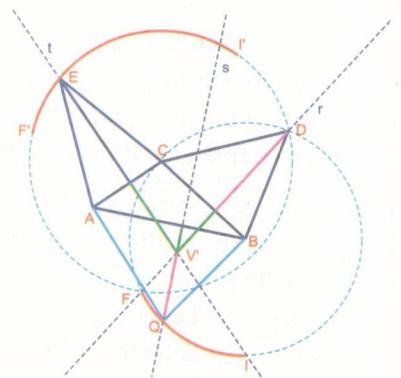


Figura 13

Assim, teremos a planificação de uma pirâmide triangular construtível (figura 13) se:

a) nos triângulos das faces da pi-

râmide, os lados que formam a mesma aresta tiverem a mesma medida ( $CD = CE$ ,  $BD = BQ$  e  $AQ = AE$ );

b) a projeção do vértice sobre o plano da base coincidir com o encontro das retas suportes das alturas dos triângulos das faces e, ainda, pertencer ao segmento  $FD$ ;

c) se for satisfeita a relação  $b^2 = H^2 + m^2$ , em que  $b$  é a altura de cada um das faces em relação ao respectivo lado da base da pirâmide,  $H$  é a altura da pirâmide e  $m$  a distância da projeção do vértice à cada um dos lados do triângulo da base; ou seja,  $b > m$  e  $b \neq 0$ .

Vamos mostrar que, observando essas conclusões, poderemos obter a planificação de uma pirâmide triangular construtível.

• Sendo  $Q$  um ponto qualquer sobre o arco  $FI$ ,  $Q \neq F$  e  $Q \neq I$ , temos:

a)  $BQ = BD$  (raios da mesma circunferência de centro  $B$ ).

$AQ = AE$  (por construção).

$EC = CD$  (raios da mesma circunferência de centro  $C$ ).

b) Sendo  $r, s$  e  $t$ , as retas suportes das alturas dos triângulos das faces:  $BCD, ACE$  e  $ABQ$ , respectivamente, e  $V'$  a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base, vamos mostrar que a interseção dessas retas é o ponto  $V'$ .

Como a projeção do vértice está sobre as retas suportes das alturas das faces, então:

se  $D$  e  $V'$  estão alinhados,  $D$  está em  $r$  e  $V'$  está em  $r$ ,

se  $E$  e  $V'$  estão alinhados,  $E$  está em  $s$  e  $V'$  está em  $s$ ,

se  $Q$  e  $V'$  estão alinhados,  $Q$  está em  $t$  e  $V'$  está em  $t$ . Logo,  $r \cap s \cap t = \{V'\}$ .

c) Qualquer que seja a pirâmide de base triangular (figura 14), sempre

existirá pelo menos dois triângulos  $VVM$  retângulos em  $V'$ . Se  $V'$  é a projeção ortogonal de  $V$  sobre o plano  $\alpha$  da base, sabemos que se  $\overline{VV'}$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então  $\overline{VV'}$  faz ângulo de  $90^\circ$  com qualquer reta que passe por  $V'$  (contida nesse plano).

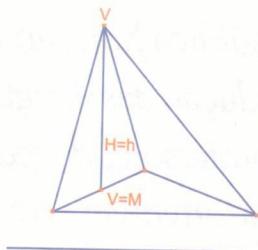
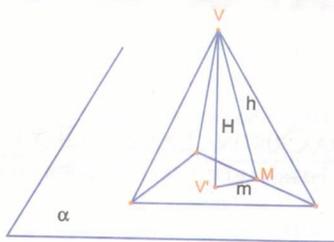


Figura 14

Assim, como  $V' \in \alpha$  e  $M \in \alpha$ , então  $\overline{V'M} \subset \alpha$ , o que garante  $\overline{VV'}$  perpendicular à  $\overline{V'M}$ , sendo o triângulo  $VVM$  retângulo em  $V'$ , vale a relação  $b > m$  pois  $b$  é hipotenusa.

Considerando a reta  $r$  que passa por  $D$  e é perpendicular à reta  $CB$  (figura 15) e considerando, no arco  $FI$ , os pontos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , com  $Q_i \neq F$ ,  $Q_i \neq I$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ) e tomando  $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n$  simétricos respectivamente de  $Q_i$  em relação à reta  $AB$ , sabemos que os segmentos  $Q_i Q'_i, Q'_i Q_i, \dots, Q'_n Q_n, Q_n Q'_n$  são cordas da circunferência de centro  $B$  e raio  $BD$ . Essas cordas interceptam a reta  $AB$  nos pontos  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (pontos médios das cordas) e determinam na reta  $r$ , sobre o segmento  $FD$  os pontos  $V'_1, \dots, V'_n$ . Como as cordas são perpendicu-

lares à reta suporte do lado  $AB$ , temos que  $Q_1 M_1 = b_1, \dots, Q_n M_n = b_n$  representarão as alturas dos triângulos de vértices  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  e que  $V_1 M_1 = m_1, \dots, V_n M_n = m_n$  representarão a distância da projeção do vértice ao lado  $AB$  do triângulo da base.

Assim, os segmentos  $b_i$  e  $m_i$  estão contidos nas cordas da circunferência de centro  $B$  e para as faces  $ABQ_i$ , sempre teremos  $b_i > m_i$ , pois  $b_i$  terá sempre a metade da medida da respectiva corda e  $m_i$  será sempre menor que tal medida.

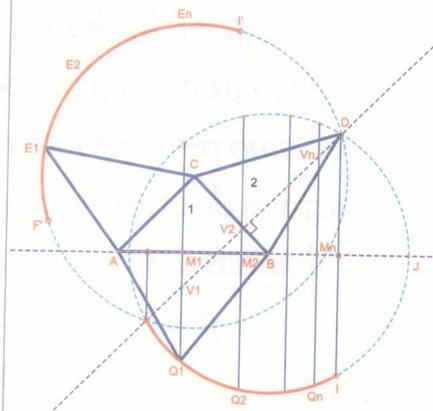


Figura 15

De modo análogo, podemos mostrar que o mesmo ocorre quando tomamos como vértices para o triângulo construído sobre o lado  $AC$  qualquer ponto pertencente ao arco  $F'I'$ , obtido a partir das igualdades:  $AF' = AF$  e  $AI' = AI$ .

Com certeza, outras questões poderão ser colocadas:

- E se a face dada  $CBD$  não fosse um triângulo acutângulo?

- E se a base  $ABC$  fosse um triângulo retângulo ou obtusângulo?

- Será que estas condições também são necessárias para pirâmides que tenham outros polígonos como base?

Mas a partir de agora, a história é outra. Desde já, você está convidado (a) a contar.