

La Enseñanza de la Probabilidad Condicional

LADY ARISMENDY
ANGELA PULIDO

Introducción

La teoría de la probabilidad es una rama importante dentro del desarrollo del pensamiento aleatorio, y en general, de la educación matemática, pues promueve el uso de heurísticas para realizar predicciones y tomar decisiones en torno a una situación del diario vivir. Si bien, en los lineamientos curriculares y en los estándares básicos de calidad se citan conceptos y temáticas en relación con la probabilidad que deben ser abordadas en las aulas de clase, las formas usuales de enseñanza ponen en evidencia el énfasis determinista que recae en la cultura escolar.

Este trabajo surge de un constante interrogar sobre la enseñanza de la probabilidad y particularmente de la probabilidad condicional, ya que enseñarla como una actividad de modelización y no como un conjunto de fórmulas resulta un reto bastante ambicioso y más aún cuando se sabe que son muy pocas las investigaciones realizadas en torno a esta temática, lo cual conlleva a la insuficiencia de trabajos relacionados con el diseño de secuencias didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento probabilístico.

Distintos autores como Huerta y Lonjeda (2003) han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos y conductas estereotipadas persistentes en la toma de decisiones por parte de los individuos ante situaciones donde se usa la probabilidad condicional: *“Algunos de estos errores son de tipo psicológico, y una mera exposición de las leyes teóricas de la probabilidad puede no ser suficiente para superarlos. Incluso la existencia en el alumno de estos sesgos puede dificultar la asimilación de los conceptos formales”*. Así, resulta necesario indagar y construir actividades que sean llamativas y apropiativas para el estudiante con el fin de contextualizar conceptos que muchas veces en los libros de texto aparecen sueltos y desligados, sin ninguna significación.

Con este enfoque se presentan algunas situaciones de enseñanza diseñadas bajo los fundamentos de la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986).

De este modo se elaboró una secuencia didáctica que giró en torno a la situación fundamental: *¿Quién es el culpable?* y la cual reflejaba que la probabilidad condicional resulta decisiva para la correcta interpretación y la toma de decisiones sobre un delito, para este caso, un asesinato.

La situación fundamental que se presentó a los estudiantes fue la siguiente:

Situación fundamental:

¿Quién es el culpable?

“Antes de ocurrir tan nefasto hecho, Garagoa era un pueblo donde reinaba la paz y la prosperidad. La gente era muy cálida y procuraban el bienestar común. Sin embargo y por las circunstancias presentadas ese día, un trágico crimen conmocionó a toda la gente. Pero, ¿qué fue lo que ocurrió en realidad?

Eran las 12:00 m cuando el Padre Amaro se disponía a oficiarse la misa, pero esto nunca ocurrió ya que fue violentamente asesinado. Los feligreses conmocionados por este hecho, se preguntaban: ¿por qué habrían de matar al Padre? ¿Cómo lo mataron? Pero en aquel momento la gente, en medio del asombro, se limitaba a observar el cuerpo sin vida del Padre.

Dentro de las pruebas que recopiló la policía en el momento del asesinato se encuentra el testimonio de una de las feligreses quien afirmó que el asesino era una persona que tenía dos características: pelo castaño y por su apariencia física tenía entre 25 y 35 años.

De otro lado, el pueblo está conformado por 1300 habitantes de los cuales 750 son mujeres y el resto son hombres. De las 1300 personas 270 son niños entre los cero y doce años; 168 muchachos entre los 13 y 17 años, 213 son personas entre los 18 y 27 años; 487 están entre los 28 y los 40. El resto de la población son mayores de 40 años.

Se sabe que la gente del pueblo realiza diversas actividades dentro de las cuales el 45% de los hombres y el 20% de las mujeres se dedican a la agricultura; el 30% de los hombres y el 40% de las mujeres se dedican al comercio. El 25% de los hombres restantes se dedican a la pesca y el 40% de las mujeres a las labores del hogar.

Finalmente la mitad de la población tiene cabello castaño, $\frac{2}{5}$ son de cabello negro, $\frac{1}{13}$ son rubios y el resto son pelirrojos”.

¿Cuál es la probabilidad de que el asesino sea quien mencionó la feligrés?

A partir de ésta, se desarrollaron las demás fases del proceso de enseñanza-aprendizaje (dos sesiones de clase por cada una), de las cuales presentamos una breve descripción:

En la **situación de acción**, *“Relato del crimen”*, se planteó al estudiante preguntas relacionadas con nociones de azar y probabilidad. Se trató de poner a los estudiantes en estado de construir un modelo probabilístico implícito, por medio de previsiones o

decisiones. De igual manera, el estudiante experimentó con la situación un conflicto cognitivo en el intento de hallar la probabilidad de encontrar el asesino sabiendo que era castaño y tenía entre 25 y 35 años de edad.

A su vez, se consideró preciso que el estudiante expresara el modelo intuido en la fase de acción intercambiando información con otros compañeros, lo cual conlleva al diseño de la **situación de formulación**, “*Buscando culpables*”, en la que unos alumnos hacían el papel de emisores y otros de receptores. Fue así como en esta situación los estudiantes generaron nuevos razonamientos, conocimientos e ideas para comprender la situación, obteniendo una mejor información en cuanto a lo ocurrido el día del asesinato. Del mismo modo, la generación de espacios de socialización favoreció en los estudiantes la creación de un vocabulario apropiado, el cual les permitiera formular comprobaciones en relación con la identificación de sucesos, la asignación de probabilidades y la utilización de registros tabulares.

Luego de la difícil tarea de poner por escrito las distintas hipótesis y concepciones con respecto a la solución de la situación, se implementa la **situación de validación**, “*Tras las pruebas: la ruta del asesino*” en la que se pretendió que el estudiante diera un paso más avanzado en el proceso de matematización, calculando probabilidades correctamente y haciendo uso de la regla de la multiplicación, con el fin de probar la validez de su solución ante sus compañeros. Es decir, tratando de comprobar si la persona que cree haber cometido el asesinato lo es, dado que es castaño y tiene entre 25 y 35 años.

Con el objetivo de dar una adecuada finalización al proceso de enseñanza, involucrando todos los aspectos y nociones trabajadas se plantea la **situación de institucionalización**, “*El ADN descubre el asesino*”, en la cual se institucionalizó el conocimiento construido en clase, mostrando nuevas ideas, generalizaciones e interrelaciones entre diversos conceptos asociados al entendimiento de la probabilidad condicional.

Este es un pequeño esquema de la secuencia y de algunas actividades:

ACTIVIDAD	TEMÁTICA	ORGANIZACIÓN DE AULA	ROLES
ACTIVIDAD DIAGNOSTICO Y DE ACCION PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN FUNDAMENTAL: RELATO DEL CRIMEN	<ul style="list-style-type: none"> Conjuntos. Razón y proporción. Experimento aleatorio y determinista. Sucesos y sus tipos. 	<p>El trabajo se realizara de manera individual. A cada uno se le entregara el material (guía) correspondiente.</p> <p>En esta fase el estudiante tendrá la oportunidad de poner en juego los conocimientos previos que tienen en torno a las nociones de probabilidad. Además de esto se dará gran importancia al uso de representaciones para relacionar datos.</p>	<p>Del profesor:</p> <ul style="list-style-type: none"> Reconocer la idea intuitiva que tienen los estudiantes en torno a las nociones de azar y probabilidad, conjuntos y proporción. Familiarizar a los estudiantes con situaciones cotidianas en las que se involucre el azar. <p>Del estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> Utilizar diversas estrategias para tomar decisiones frente a la situación planteada.
ACTIVIDAD DE FORMULACIÓN BUSCANDO CULPABLES	<ul style="list-style-type: none"> Noción frecuencial de probabilidad. Asignación de probabilidade s. Frecuencias relativas y marginales. Dependencia e independenci a de sucesos. Sistemas de representació n: tabular, diagramas, etc. 	<p>El intercambiar información sobre la estrategia generada será un elemento esencial en la puesta en común ya que se permitirá un mayor acercamiento a las nociones trabajadas ; así como una mejor comprensión..</p> <p>El trabajo en el aula será exclusivamente grupal (4 o 5 personas)</p> <p>A cada grupo se le entregara un tablero simulando un monopolio en el que se encontrara dibujada la iglesia: lugar donde ocurrió el asesinato. Cada estudiante tendría su respectivo material: fichas, tarjetas y dados.</p>	<p>Del profesor:</p> <ul style="list-style-type: none"> Generar en el estudiante nuevos razonamientos para comprender la situación desde otro punto de vista. Permitir que los estudiantes experimenten con la situación problema. <p>Del estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> Construir registros tabulares en los que se recopilen los resultados obtenidos en el desarrollo del experimento.

Resultados y Conclusiones

Para analizar las respuestas dadas por los estudiantes y observar el proceso que siguieron para construir el conocimiento que se quería llevar al aula, en cada actividad se realizaron instrumentos de análisis de acuerdo con la intencionalidad de la misma .En este reporte presentamos, un bosquejo del instrumento general con el que se evaluó el trabajo hecho por los estudiantes en todas las actividades (categorías 1,2,7,10).

CATEGORÍAS DE CLASIFICACIÓN GENERAL

cat 1	Utiliza la probabilidad para tomar decisiones en determinado contexto. De igual manera, se apoya en diversas representaciones tales como las tablas de contingencia y los diagramas de árbol.
cat 2	Se apoya en las tablas de contingencia para calcular probabilidades conjuntas, marginales y condicionales. aunque diferencie un suceso simple de uno compuesto, no le resulta clara la regla de la multiplicación su operatividad, resulta incorrecta
cat 7	Realiza comparaciones cualitativas de probabilidades; es decir, no asigna valores numéricos. de igual manera, describe aspectos planteados en la situación, los cuales no le permiten entender claramente el planteamiento de la situación
cat 10	Otras.

De igual manera, se realizaron unas parrillas con los indicadores de evaluación las cuales permitieron llevar un registro completo del accionar de los estudiantes. A grandes rasgos, presentamos una de estas:

	ACT. ACCION.			ACT. FORMUL.			ACT. VALIDAC.			ACT. INSTITUC.		
	Rec.	Int.	Apl.	Rec.	Int.	Apl.	Rec.	Int.	Apl.	Rec.	Int.	Apl.
Alarcón montero Julián David	P	P	P	T	P	N	P	N	N	P	P	P
Ortiz Lemus oscar Eduardo	P	P	P	T	P	P	T	T	P	T	T	T
González huentas José David	P	P	N	P	N	N	T	T	P	T	T	P

Rec. *indicador de reconocimiento*: expresa gráficamente datos empíricos obtenidos del experimento Aleatorio.

Int. *indicador de interpretación*: compara probabilidades condicionales inversas: $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

Apl. *Indicador de aplicación*: utiliza correctamente la regla de Laplace.

P. Parcial **T.** Total **N.** Nada

Con estos instrumentos podemos decir lo siguiente:

Encontramos que algunos estudiantes han razonado de forma aritmética y esto debido a la forma en que las cantidades se han presentado:

- La gran mayoría de estudiantes intentan resolver el problema involucrado en la situación mediante la utilización de tablas de doble entrada. Para afirmar esto nos hemos basado en que un 60% de los estudiantes compara frecuencias relativas marginales y condicionadas en dichas tablas:

Ejemplo 1

1300 habitantes	750 mujeres	550 hombres
edad	600 no tienen edad	700 tienen edad
Cabello	650 castaño	650 no castaño
Desparejada	300 no tatuada	1000 tatuada

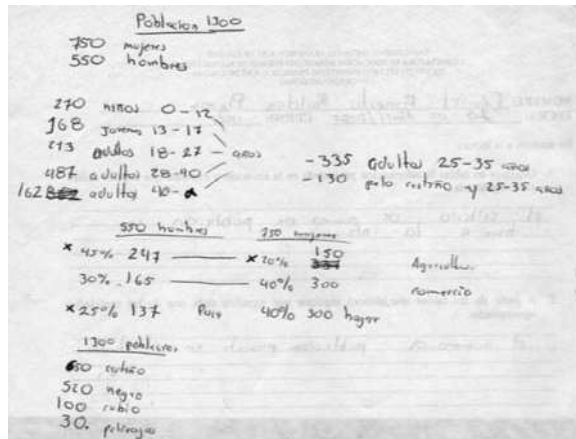
Ejemplo 2

- Los estudiantes resuelven la situación como si

Total 1300		Mujeres		Hombres	
edad	edad	Trabajo	%	Trabajo	%
270	0-12	aprendiz	25	medicinal	45
118	13-17	comercio	40	campesino	30
175	18-27	hablar	40	pasca	25
487	28-40	Total	100%	Total	100%
162	41-65	Edu. de la		Porcentaje	
1300 = Total		castaño	50%	80	
		negro	40%	520	
		rubios	2,69%	100	
		pelirrojos	2,61%	30	

el problema fuera de asignación. Para ello trabajan con la aritmética, empleando para ello la regla de Tres.

Ejemplo3



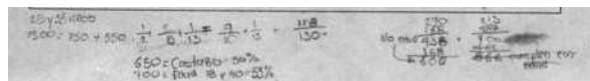
- El 90% de los estudiantes presentan confusión entre las probabilidades $P(A/B)$ y $P(B/A)$, denominada por Falk (1988) como la confusión de la inversa.

Ejemplo 4



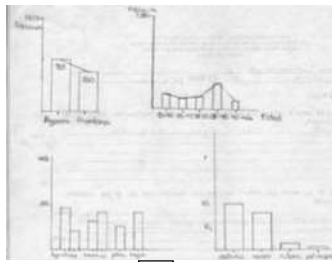
- La gran mayoría, intenta establecer relaciones entre las cantidades involucradas y expresadas de diversas maneras; razón, proporción, etc. (Ver situación fundamental)

Ejemplo 5



- De igual manera se evidencia confusiones entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional.
- Un 20% de los estudiantes solo utiliza la información proporcionada para construir gráficos estadísticos los cuales solo permiten leer las cantidades presentadas sin tener en cuenta el planteamiento de la situación y la decisión que deben tomar.

Ejemplo 6



2. A partir de las tablas que elaboró explique qué significa cada una de las cantidades representadas.
 La probabilidad es de que el 50% el caso sea hombre y el 50% el caso sea mujer. El 50% de la población tiene el cabello oscuro. En otro caso se conoce de diferentes colores. La probabilidad que pudo haber cometido el crimen de acuerdo a su investigación. Es del 50% pues en la cantidad que estaba investigando para cometer el crimen.

Si bien el énfasis principal al realizar esta experiencia era el aportar elementos conceptuales a los estudiantes, es de resaltar la influencia de la cultura determinista, la cual generó diversas dificultades para el entendimiento de la probabilidad condicional, sin embargo, podemos afirmar que la implementación de esta secuencia permitió a los estudiantes tomar conciencia de la presencia de la probabilidad condicional en diversas situaciones de la vida cotidiana, aunque le resultara difícil cambiar sus concepciones, pues de uno u otro modo están influenciadas por la cultura escolar que por lo general es determinista.

Ejemplo 7



Queda a consideración cambiar o complementar los parámetros utilizados, ya que nos centramos en un solo nivel escolar (grado undécimo) y un período de tiempo (Feb. - Jul. / 2005).

Referencias bibliográficas

HUERTA M., LONJEDO A. La resolución de problemas de probabilidad condicional. En Castro Flores. Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Universidad de Granada. 2003.

HUERTA M., LONJEDO A. Los problemas de probabilidad condicional en la enseñanza secundaria. Comunicación presentada en las IX jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (JAEM). 2003.

HUERTA M., LONJEDO A. La resolución de problemas de probabilidad condicional: Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato. Universidad de Valencia.

MEN. Estándares curriculares (2002) y Lineamientos curriculares (1998). Diseño curricular para la enseñanza en educación media y vocacional.

ORTIZ de HARO, J. La probabilidad en los libros de texto. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Grupo de educación estadística. 2002

ROMERO, y otros. Matemáticas para todos. El sentido de la profesión profesor(a) de matemáticas. Centro de investigaciones y desarrollo científico. Bogotá, Colombia. 2002.

SERRANO, L. Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Departamento de didáctica de la matemática. Granada. 1996.

Una propuesta didáctica sobre la enseñanza de la proporcionalidad directa

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MARÍA FERNANDA DUEÑAS
LADY JAHINE HERNÁNDEZ

Introducción

Dentro de los currículos en las escuelas se encuentra el tratamiento de situaciones problemáticas cuya solución involucra una multiplicación y/o una división, sin embargo, no se concibe que dichas situaciones comprendan más que simples operaciones y además que estas se encuentren ligadas con más de un significado. Es a partir de esto que surge la necesidad de involucrar al estudiante con situaciones que le permitan adquirir los diferentes significados de la multiplicación (Vergnaud, 1990).

Los problemas que necesitan de la regla de tres para obtener una solución, además de involucrar la multiplicación y la división, permiten el desarrollo del concepto de proporción, lo que permite evidenciar a nivel estructural y conceptual relaciones inmersas dentro de las situaciones que implican la proporcionalidad. Es a partir de dichos niveles que el estudiante logra diferenciar situaciones de tipo proporcional de situaciones multiplicativas de otro tipo.

Razonamiento proporcional

Dentro de las prácticas pedagógicas propuestas en el plan de estudios diseñamos e implementamos en un colegio del distrito capital, una secuencia de actividades que tenía como fin principal abordar nociones que posibilitarán en los estudiantes el desarrollo del razonamiento proporcional, sin embargo, hasta el momento no es claro que entendemos por este. A continuación expondremos de forma