EQUAÇÃO DO 2º GRAU: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

Wagner da Cunha Fragoso

Resumo

Esse artigo descreve um breve histórico do desenvolvimento da equação polinomial do 2º grau, em termos de representação e de resolução. Inicialmente, são apresentadas as civilizações antigas que contribuíram de forma direta para o aperfeiçoamento da escrita e solução de equações desse tipo. Paralelamente, apresentamos as soluções e representações de alguns eminentes matemáticos, de forma a valorizarmos todo o desenvolvimento. Evidenciamos algumas construções geométricas feitas por Descartes, Leslie e Staudt de modo a salientar a precisão de métodos geométricos de resolução. Este artigo visa a fornecer uma valiosa ajuda didática a todos os interessados no ensino e aprendizagem da Matemática, sobretudo, da equação polinomial do 2º grau.

Palavras-chave: equação, polinomial, Bháskara.

Introdução

Leia o texto, e conclua se é ficção ou realidade.

Um aluno na 8ª série, de uma determinada escola, fez as seguintes perguntas a seu professor de Matemática:

Como surgiu a Equação do 2º grau?

Como descobriram a fórmula de Bháskara?

Obteve como resposta:

Sinceramente! eu não sei, mas no 2º grau você obterá a resposta que deseja.

No ano posterior, já na 1ª série do 2º grau, todo entusiasmado, novamente as perguntas foram feitas ao seu novo professor de Matemática, e a resposta obtida foi :

Não sei! mas se você continuar seus estudos em Matemática com certeza encontrará as respostas que deseja, caso contrário, isto não terá a mínima importância, além do que, não é matéria de prova.

Depois de ter concluído o 2º grau, resolveu prestar exames para o curso de Matemática e, por obra do destino, e de seus esforços, ingressou no curso de Licenciatura; assim que teve contato com alguns professores fez as perguntas que o acompanhavam a tantos anos obtendo a devastadora resposta:

Você deveria ter aprendido isso lá no primeiro grau!

Talvez este texto acima contenha uma certa dose de exagero.

Talvez não, contudo, será que todos os professores de Matemática do 1º, 2º ou 3º grau, conseguem responder as perguntas deste ansioso aluno?

Seja qual for a resposta, acreditamos que a abordagem histórica sobre a equação polinomial do 2º grau, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, que será apresentada sucintamente, venha a esclarecer algumas dúvidas a respeito desse tópico de alta importância no estudo da Matemática, em qualquer nível.

Abordagem Histórica

A princípio, quando pensamos em História da Matemática, o pensamento volta-se para as civilizações antigas. Logo, a abordagem histórica que apresentaremos buscou evidenciar o desenvolvimento desse conteúdo matemático desde o Egito antigo até os dias atuais.

Egito

Apesar dos egípcios terem desenvolvido técnicas para o tratamento de alguns problemas envolvendo frações de numerador unitário[2], áreas de algumas figuras planas, volumes de alguns sólidos e uma curiosa técnica de resolução de equações polinomiais do 1º grau, denominada pelos europeus de "método da falsa *posição*", como esta registrado nos papiros de Rhind[3], de Moscou, entre outros papiros de ordem matemática não encontramos registros do tratamento da equação polinomial do 2º grau.

Os pesquisadores e historiadores matemáticos mantêm viva a suspeita de que essa civilização tenha desenvolvido alguma técnica de resolução, mesmo não havendo registros deste assunto. Essa crença baseia-se na resolução, pelo método da falsa posição, encontrada no papiro de Kahun, da equação do 2º grau da forma $x^2 + y^2 = k$, sendo k um número positivo.

1 Licenciado em Matemática pela UFMG e Especialista em Matemática pela UFSM. Atualmente é professor no Colégio Militar de Santa Maria – RS. (0xx55) 221-1253.* e-mail: wagner.aquarius@zipmail.com.br

2 Exceção a regra é a fração dois terços, única fração de denominador não unitário envolvida no tratamento fracionário egípcio. Fonte: Boyer 1996, p.10.

3 Maior fonte de informações da matemática egípcia, possuindo 5 m de comprimento por 0,30 m de largura.

Problema 21

Qual é a pressão atmosférica que suporta um ponto que está a 0,5 km do nível do mar?

E um ponto a 2,5 km de altitude, a que pressão atmosférica ele está submetido?

Qual é a altitude de um ponto onde a pressão atmosférica é a metade da pressão ao nível do mar?

Em qual altitude a pressão atmosférica será 0,59049 atm?

Se as pressões nos pontos A e B são respectivamente 0,7 atm e 0,5 atm, determine a pressão em C, cuja altitude é a soma das altitudes de A e B.

Entre esses problemas, o que proporcionou maior grau de liberdade para estender o conceito de potência é o problema 21, devido à lei geral que ele encerra: $\mathbf{p = 0{,}9^h}$. Durante as discussões sobre "todos" os valores que h pode assumir, percebemos que para certos alunos ,"todos os valores" significava um conjunto de números racionais de certo tipo ou, na melhor das hipóteses, todos os números racionais; mas os irracionais foram completamente desconsiderados por eles, o que nos leva a concluir que "**a pressão atmosférica num ponto cuja altitude é $\sqrt{2}$ km**" não tem qualquer sentido para eles. Tanto o estudo da continuidade de funções reais, em Cálculo, como a construção geométrica de um segmento com $\sqrt{2}$ unidades de comprimento, auxiliaram esses alunos a conferir algum significado à afirmação anterior.

A partir da resolução desses problemas, esse trabalho levou os alunos a:

- caracterizar uma função exponencial, analisar e interpretar gráficos de função exponencial em contextos de outros campos do conhecimento, identificar equações e inequações exponenciais e resolvê-las, lidar com problemas em que a determinação de expoentes não poderia ser feita a partir da resolução de equações exponenciais, isto é, lidar com logaritmos, por aproximações, muito antes de qualquer definição.

Os processos de generalização, o estudo de funções a partir da variação de grandezas, a elaboração e análise de gráficos de funções que descrevem fenômenos reais em outras áreas do conhecimento, foram algumas das características desse trabalho, desenvolvido por meio da resolução de problemas, levando os alunos a pensarem sobre as situações a partir de seus próprios conhecimentos, muito antes de qualquer formalização, que invariavelmente vinha no final de cada etapa, quando necessário.

Os estudantes desse curso foram avaliados continuamente no trabalho diário, desenvolvido em classe;

- nos trabalhos individuais extra classe, quando tinham oportunidade e tempo de refletir individualmente sobre as questões propostas;
- nas provas individuais, momento em que foram incentivados a se colocarem frente ao saber que tinham construído;
- nos trabalhos em grupo, feitos em classe, quando a argumentação de cada um em defesa de seu ponto de vista foi a ação mais significativa.

Como a intenção foi sempre a de verificar

- a compreensão que os estudantes tinham sobre idéias, conceitos e procedimentos matemáticos;
- se eles desenvolveram e adquiriram competências e habilidades como a capacidade de fazer representações e de se comunicar, de investigar, compreender, questionar, argumentar,

em nenhum momento foi exigido deles algum tipo de memorização e mecanização sem prévia compreensão. Desse modo todos os trabalhos desenvolvidos por eles foram feitos com consulta a livros, a textos, a cadernos, ao professor. Assim, foi um pouco menos difícil perceber a evolução de cada aluno, não só em relação a seu saber matemático, mas também em relação a suas atitudes frente a ação de aprender, como mostrar interesse no intercâmbio de idéias, argumentar em favor de suas idéias, enfrentar com confiança situações novas, ter curiosidade e gosto em aprender, ter iniciativa na busca de informações, trabalhar em grupo, partilhando saberes e responsabilidades etc.

BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva. *Padrões numéricos e seqüências*. São Paulo: Moderna, 1997.

____________. *Padrões numéricos e funções*. São Paulo: Moderna, 1998.

HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. Trad. de Regina Szwarcfiter. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1982.

KATIA, ROKU. *Matemática*. São Paulo: Saraiva, 1998.

MORETTIN, Pedro A., HAZZAN, Samuel., BUSSAB, Wilton O. *Cálculo: Funções de uma variável*.São Paulo: Atual, 1987.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação.*Proposta curricular para o ensino de matemática - 2º grau*. São Paulo: SE/CENP, 1995.

____________. *Subsídios para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau*. Vol, 1. São Paulo: SE/CENP, 1980.

TROTTA, IMENES, JAKUBOVIC. *Matemática aplicada*. São Paulo: Moderna, 1979.

O trabalho com os conceitos de função e funções polinomiais do 1º e 2º graus foi complementado com o estudo da variação exponencial de grandezas, desembocando no estudo da função exponencial.

Ainda com o objetivo de levar os alunos a ultrapassarem a visão intuitiva da linearidade, em que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(kx) = k.f(x)$, várias situações foram propostas para análise e resolução. Algumas delas foram do tipo:

17. Considere uma cultura de bactérias cuja população, num certo instante, é de 1 000 indivíduos. Considere, também, que cada indivíduo dessa cultura, por um tipo especial de divisão celular, dá origem a dois novos indivíduos idênticos por hora., Determine o tamanho aproximado da população dessa cultura, cinco horas após aquele instante, supondo que nenhum indivíduo morra nesse intervalo de tempo.

18. No esquema seguinte pode-se ler a palavra AMO de várias maneiras. Vamos estabelecer que:

1º) A leitura começa da letra A.

2º) Após termos lido uma letra qualquer da palavra, a próxima letra a ser lida deverá estar imediatamente à direita, ou imediatamente abaixo daquela letra.

A M O
M O
O

a) De quantas maneiras distintas podemos ler "AMO" no esquema?

b) De quantas maneiras diferentes podemos ler as palavras AMOR, AMORA, AMORAS e AMOREIRAS nos esquemas abaixo, seguindo as mesmas regras de leitura?

AMOR
MOR
OR
O

AMORA
MORA
ORA
RA
A

AMORAS
MORAS
ORAS
RAS
AS
A

AMOREIRAS
MOREIRAS
OREIRAS
REIRAS
EIRAS
IRAS
RAS
AS
A

19. Dez pessoas fundam um clube. Um dos regulamentos do regimento interno do clube prevê que cada sócio pode convidar dois novos sócios ao final de cada ano. Calcule o número máximo de sócios que esse clube poderá ter ao fim de:

a) 1 ano.
b) 2 anos.
c) 3 anos.
d) 10 anos.
e) n anos (n inteiro, $n \geq 0$)

20. No primeiro dia útil de 1988 (data que será chamada de "data-base"), um pequeno investidor tem o saldo de R$ 10 000,00 em caderneta de poupança (estamos supondo que os rendimentos do último período que antecedeu à data-base já tenham sido creditados).

Durante os próximos meses, são pagos a esse investidor rendimentos a uma taxa de 15% ao mês.

Supondo que a partir da data-base não foram feitos nem depósitos nem retiradas, calcule o saldo dessa conta com relação à data-base, após:

a) 1 mês;
b) 2 meses;
c) 3 meses;
d) 12 meses;
e) n meses (n inteiro, $n \geq 0$).

21. A pressão atmosférica ao nível do mar é igual a 1 atm.

Suponha que, ao se elevar um objeto de um ponto A a um ponto B, de modo que a altitude de B tenha 1 km a mais que a altitude em A, a pressão atmosférica em B seja 90% da pressão em A.

Nessas condições, determine a pressão atmosférica com relação ao nível do mar, num ponto cuja altitude é:

a) 0 km;
b) 1 km;
b) 2 km;
c) 3 km;
d) 4 km;
e) 9 km;
g) h quilômetros.

Problemas retirados da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 2º grau, SE do Estado de São Paulo.

A partir da resolução desses problemas, entre outros, foi estendido o conceito de potência para expoente racional e real, mediante questionamentos que foram feitos durante a resolução, como por exemplo:

Problema 17

Após quantas horas essa população tinha 1 024 000 indivíduos?

Após um certo número de horas é possível que essa população tivesse 300 000 bactérias?

Problema 18

De quantas maneiras diferentes é possível ler uma palavra com **n** letras, escrita no esquema dado, com as mesmas regras para sua leitura?

Quantas letras tem uma palavra escrita nesse esquema, se ela pode ser lida de 512 maneiras diferentes?

É possível que uma palavra colocada no esquema dado seja lida de 2 064 maneiras diferentes, obedecendo as regras de leitura descritas?

Problema 19

Após quantos anos, o número máximo de sócios desse clube será 21870?

O número máximo de sócios desse clube poderá ser de 65 000, caso cada sócio traga dois novos sócios ao final de cada ano? Por quê?

A partir de que ano o número máximo de sócios desse clube será maior que 200 000?

Até que ano o número máximo de sócios desse clube foi menor que 8.000?

Problema 20

Quantos meses após a data-base o saldo será de R$ 46523,91?

É possível que o saldo, após um certo número de meses seja de R$ 5000,00?

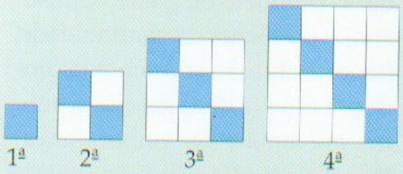
A partir de que mês após a data-base, o saldo será de R$ 100 000,00?

No decorrer desse processo de aprendizagem, além de analisar e apreender idéias e conceitos matemáticos, os alunos começaram a se apoderar de ferramentas conceituais e procedimentais que lhes dão suporte em outras áreas do conhecimento.

Inicialmente, os alunos foram incentivados a buscar entre todos os problemas já resolvidos aqueles que envolviam funções, cuja lei, expressa algebricamente, eram do 2º grau. Além de analisar coeficientes, gráficos cartesianos, analisaram também para que valores de **x**, no contexto do problema, **f(x)** tinha interpretação prática.

A seguir, encontram-se alguns dos problemas que, na seqüência, viabilizaram o trabalho com a função quadrática.

11. Observe esta sucessão de figuras:



Expresse algebricamente a lei que fornece

a) o total dos menores quadradinhos da n-ésima figura,

b) o total dos menores quadradinhos brancos da n-ésima figura.

c) Que lugar ocupa, nessa sucessão, uma figura que tem 110 menores quadradinhos brancos? E a que tem 328 menores quadradinhos brancos?

12. Uma pedra é lançada ao ar. Suponha que altura **h**, em metros, em relação ao ponto de lançamento, **t** segundos após o lançamento, seja $\mathbf{h = -5t^2 + 10t}$.

a) Qual é a altura atingida pela pedra meio segundo após o lançamento?

b) No contexto do problema, para que valores de **t** a função **h** tem interpretação prática?

c) Esboce o gráfico da função **h**, ressalte nele a parte que corresponde aos valores de **t** do item anterior. Identifique a altura máxima atingida por essa pedra e o momento que ela a atinge.

13. Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. Se a potência **P**, em Watts, que um gerador lança num circuito elétrico é dada por $\mathbf{P = 20\,i - 5\,i^2}$, onde **i** é a intensidade da corrente elétrica que atravessa o gerador, em Ampères, então:

a) para que intensidade da corrente este gerador lança no circuito sua potência máxima?

b) para que intensidade da corrente este gerador lança no circuito uma potência de 15 W?

14. Um fabricante gasta R$ 20,00 na produção de uma unidade dos objetos que fabrica. Calcula-se que, se cada objeto for vendido por **x** reais, os consumidores comprarão, por mês, **120 - x** unidades.

a) Expresse o gasto (**G**) do fabricante como função da quantidade fabricada e vendida por mês.

b)Expresse a receita mensal (**R**) obtida com a venda desse produto, em função do preço de venda.

c) Expresse o lucro mensal (**L**) como função do preço de venda e construa o gráfico dessa função.

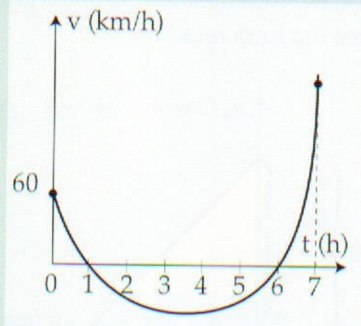
d) Qual é o melhor preço de venda desse produto para o fabricante?

15. Um caminhão, andando numa estrada que liga as cidades A e B, teve sua velocidade variando com o tempo, segundo o gráfico a seguir.

As velocidades positivas indicam que ele caminhava de A para B e as negativas, de B para A.

a) Quando o experimento começou a ser observado, qual era a velocidade do caminhão e em que sentido caminhava?

b) Nessa experiência o caminhão parou alguma vez?



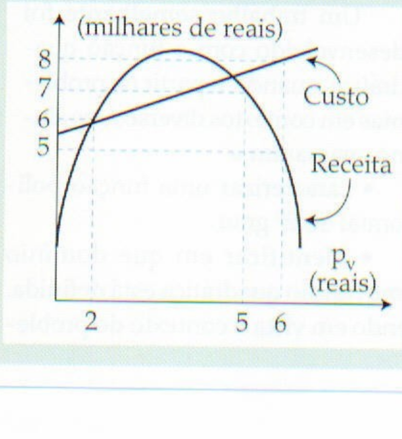
c) Nessa experiência, durante quanto tempo o caminhão foi no sentido da cidade A para B? E durante quanto tempo ele voltou de B para A? Nesse período a velocidade do caminhão variou ou permaneceu constante?

d) Em que instante o caminhão atingiu maior velocidade, quando estava indo da cidade B para A?

e) Descreva o significado prático que os pontos do gráfico (0, 60), (1, 0) e (6, 0) têm nessa experiência.

f) Se a curva do gráfico acima é uma parábola, expresse algebricamente a velocidade **v** do caminhão em função do tempo decorrido **t**, durante o qual a experiência foi realizada.

16. A variação que a despesa com o **custo** de produção de um bem de consumo (C) e que a **receita** (**R**) da empresa que produz e vende esse bem, sofrem com a variação do **preço unitário de venda** ($\mathbf{p_v}$) estão representadas neste gráfico:



a) Por quanto esse bem de consumo deve ser vendido para que a empresa tenha lucro?

b) Quando os objetos produzidos são vendidos por 6 reais cada um, a empresa terá lucro ou prejuízo? De quanto?

c) Determine as leis algébricas que descrevem as funções custo (C) e receita (R).

Algumas observações sobre os procedimentos dos alunos e suas dificuldades estão computadas a seguir.

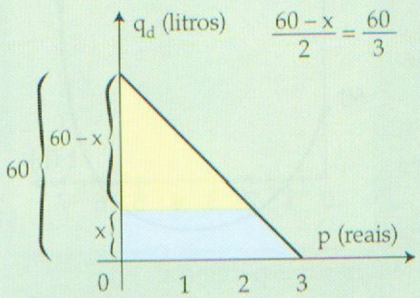
Problema 7

As unidades de medida das grandezas envolvidas não tinham muito sentido para eles, apesar de serem professores de Ciências.

Identificaram no gráfico, com facilidade, que a cada aumento de 100 gf a mola se alongava 10 cm; entretanto, não perceberam imediatamente que a constante $k = 0,1$ cm/gf descrevia exatamente essa razão entre o aumento do peso e o respectivo aumento do alongamento, isto é, que k era a taxa de variação constante dessa função.

Problema 8

O preenchimento da tabela foi imediato, não porque conhecessem a lei, mas porque sabiam que a espaçamentos iguais entre valores de q_d deveriam corresponder espaçamentos iguais de valores correspondentes de p, já que o gráfico era uma reta.



Em nenhum momento pensaram em preencher a tabela levando em conta semelhança de triângulos, no gráfico.

A pergunta b) não foi respondida com facilidade. Mesmo depois de todo esse tipo de trabalho, alguns alunos ainda tentavam adivinhar uma lei que fosse satisfeita pelos números da tabela. As ferramentas geométricas, como semelhança de triângulos, que poderiam auxiliá-los nessa tarefa não foram se quer consideradas.

Problema 9

A discussão sobre o que entendiam por custo total de produção, sobretaxa, custo unitário de produção, serviu para familiarizar os alunos com o universo de discurso do problema, aliás, não comum nas aulas de matemática no ensino fundamental ou médio.

Houve dificuldade em transferir o raciocínio aritmético que utilizaram para determinar o custo total, sabendo o custo fixo e o custo por unidade produzida, para o problema. Em outras palavras, os alunos não apresentavam dificuldade em achar o custo total quando a sobretaxa, o número de geladeiras e o custo unitário de produção eram dados, já que identificavam as operações que deveriam eleger para tal custo ("multiplico o preço unitário de custo pelo total de geladeiras produzidas e somo com a despesa fixa - a sobretaxa). Entretanto, quando o número de geladeiras era variável e, portanto o custo total de produção também, encontravam dificuldade em estabelecer a lei que relaciona essas duas grandezas. Ainda apresentavam problemas com a generalização.

Quanto à representação geométrica da variação dessas grandezas por meio de gráfico cartesiano, o problema da continuidade, frente à situação apresentada, ainda persistia, já que ligavam os pontos por uma reta, embora argumentassem que não teria sentido um ponto daquela reta representar 7,5 geladeiras a um custo total de R$ 7250,00, já que nenhum fabricante produz meia geladeira.

Problema 10

A retomada do significado de "decréscimo constante" e a respectiva representação gráfica da variação de grandezas quando isso ocorre (pontos alinhados sobre uma reta) foi feita comparando-se o problema 8 com este.

O valor desse decréscimo constante foi determinado como **10 pontos por ano**, já que em 3 anos (1997-1994) a média decresceu 30 pontos (552 - 582)

Tal valor foi identificado como a taxa de variação da função (-10) e a inclinação da reta (maior que 90^0) com o sinal (-) dessa taxa.

Ainda neste momento tiveram dificuldades para elaborar a lei da função do ponto de vista algébrico. A saída foi trabalhar com a semelhança de triângulos retângulos envolvidos no gráfico.

Um trabalho semelhante foi desenvolvido com a função quadrática, quando, a partir de problemas em contextos diversos, os alunos passaram a

- caracterizar uma função polinomial do 2º grau,
- identificar em que domínio uma função quadrática está definida, tendo em vista o contexto do problema, no qual ela descreve a variação de duas grandezas,
- examinar taxas de variação em diversos intervalos,
- compará-las com as da função do 1º grau,
- identificar valores máximos e mínimos da função, num intervalo que tenha significado frente a situação-problema analisada,
- compor sua lei algébrica a partir de seu gráfico,
- analisar uma situação dada por meio da interpretação de gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus, bem como da interpretação algébrica, como por exemplo determinar pontos comuns aos gráficos e qual o sentido que eles possuem no contexto do problema.

3 Familiarização com as idéias que dão suporte ao conceito de função polinomial do 1º grau e com suas características algébricas e geométricas.

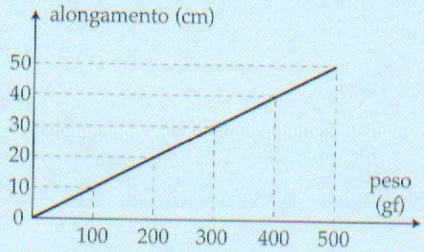
Nesta etapa enfatizamos cada vez mais o caráter interdisciplinar dos problemas, sempre que possível, sem deixar de lado a preocupação de ressaltar a conexão entre vários campos da própria matemática que mantêm interface com funções. Por isso mesmo, mantivemos nosso propósito de continuar analisando tanto as funções de domínio denso, como as de domínio discreto (nesse caso, nossa intenção era a de trabalhar seqüências aritméticas dentro do tema Função).

Todas as equações obtidas nos problemas anteriores, nos quais os alunos lidaram com variação de grandezas, foram retomadas para que identificassem as funções do 1º grau. A partir da comparação dessas com as demais foi caracterizada a função polinomial do 1º grau como aquela "descrita"pela lei $f(x) = a\,x + b$, com **a** e **b** reais e **a** não nulo. Neste momento, o símbolo $f(x)$ já tinha algum sentido para eles. O mesmo procedimento foi utilizado para caracterizar as funções polinomiais do 2º grau.

Os contextos dos problemas abrangiam cada vez mais (sempre que possível) outros campos do conhecimento que se valem do conceito de função como um instrumento extremamente eficiente para tratar de suas questões próprias (Física, Economia, Biologia, etc).

Muitas questões sobre funções do 1º grau foram tratadas a partir da familiarização dos alunos com os objetos de estudo da Economia. Os problemas oferecidos abarcavam várias idéias como a de oferta, demanda, receita, custo, lucro, etc, cujo significado foi sendo apreendido e aperfeiçoado, a partir da análise e discussão sobre tais idéias advindas da experiência não escolar dos próprios alunos. Nesse início de aprendizagem, o raciocínio aritmético enfatizado na resolução desses problemas foi garantia de sucesso na elaboração da lei algébrica que descreve o que cada função"faz"com as grandezas envolvidas no problema analisado, como por exemplo:

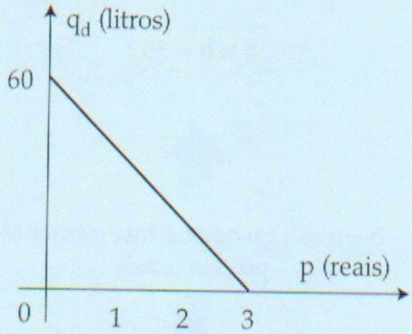
7. Suspendendo um corpo numa mola, ela sofrerá um alongamento A em função do peso P do corpo suspenso. Em 1660, o inglês Hooke descobriu experimentalmente que dentro de certos limites tal função é polinomial do 1º grau, dada por $A = k \cdot P$, onde k é uma constante. O gráfico seguinte se refere ao caso de uma mola para o qual $k = 0{,}1$ cm/gf, até atingirmos 500gf.



a) Para cada aumento de 100gf de quanto se alonga a mola?
b) Essa função é polinomial do 1º grau?
c) As grandezas alongamento e peso são diretamente proporcionais?

Problema adaptado do livro *Matemática Aplicada* de Trotta, Imenes e Jakubovic. Editora Moderna, 1979

8. A quantidade demandada de um bem de consumo (q_d) depende do preço unitário de venda (p) desse bem, como mostra o gráfico.



a) Como o gráfico dessa função é uma reta, complete a tabela seguinte que também descreve essa situação.

p	0	1	2	3
q_d				

b) Sabendo que, nesse caso a variações iguais de **p** correspondem variações iguais de q_d, escreva uma lei algébrica que descreva essa função.

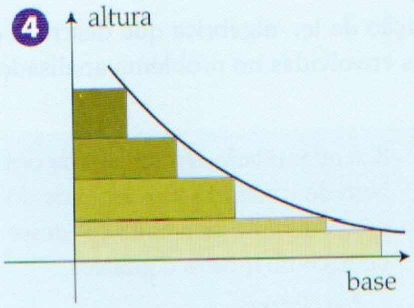
9. O custo total de produção de um certo tipo de geladeira consiste de uma sobretaxa de $ 500.000,00 somada ao custo de produção, que é de $ 300,00 por unidade. Expresse o custo total de produção como função do número de geladeiras produzidas e construa o gráfico correspondente.

10. A média de pontos obtidos em um teste psicotécnico efetuado numa empresa nos últimos anos tem sofrido um decréscimo constante. Em 1994, a média foi de 582 pontos, enquanto que em 1997 foi de apenas 552 pontos.
a) Expresse a média do teste como função do tempo.
b) Qual será a média em 2004, se for mantido esse decréscimo?

Enquanto o problema 7 oferece a lei de associação entre o **peso** e o **alongamento** e o gráfico cartesiano dessa variação, nos demais, os alunos deveriam, entre outras coisas, elaborar tal lei, expressando-a algebricamente. Devido a essas diferenças entre as questões, os alunos apresentaram diferentes dificuldades ao resolvê-las.

As discussões dos problemas 4, 5 e 6 levou os alunos a caracterizarem a proporcionalidade direta e inversa de duas grandezas, bem como a identificar graficamente as linhas que representam a variação de tais grandezas.

4

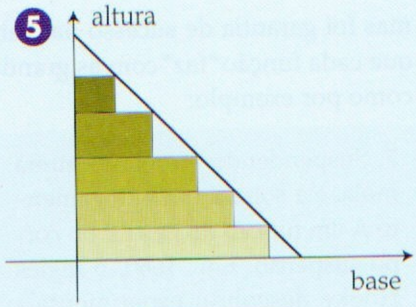


$b \times h = 36$

b e h são grandezas inversamente proporcionais

O produto dos valores correspondentes é constante

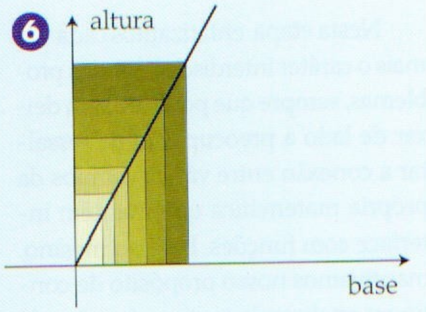
5



$b + h = 10$

b e h são grandezas nem direta nem inversamente proporcionais

6



$\frac{h}{b} = 2$

b e h são grandezas proporcionais

O quociente dos valores correspondentes é constante

Observando as tabelas, a discussão sobre as variações das grandezas em cada caso, levou-os a perceber que, quando à variações constantes de uma grandeza correspondem variações constantes da outra, o gráfico é uma reta, como no caso dos problemas 5 e 6, o que significa que a taxa de variação das grandezas, nesses casos, é constante.

4

Base (cm)	Altura (cm)
1	36
2	18
3	12
4	9
5	7,2

Base: +1, +1, +1, +1
Altura: – 18, – 6, – 3, – 1,8

A taxa de variação não é constante:

$$\frac{-18}{+1} \neq \frac{-6}{+1} \neq \frac{-3}{+1} \neq \frac{-1,8}{+1}$$

5

Base (cm)	Altura (cm)
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5

Base: +1, +1, +1, +1
Altura: – 1, – 1, – 1, – 1

A taxa de variação é constante e igual a:

$$\frac{-1}{+1} = -1$$

6

Base (cm)	Altura (cm)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Base: +1, +1, +1, +1
Altura: +2, +2, +2, +2

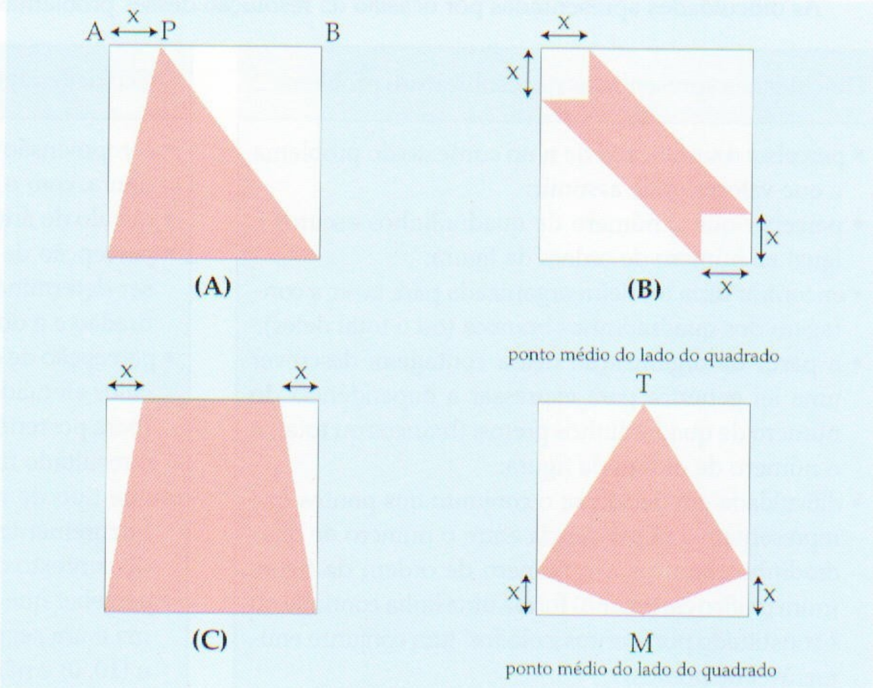
A taxa de variação é constante e igual a:

$$\frac{+2}{+1} = 2$$

As tabelas e gráficos desempenharam papel decisivo nesse estudo, quando os alunos identificavam regularidades tanto para elaborar a lei algébrica que descreve a variação das grandezas, quanto para analisar as variações dessas grandezas. Este trabalho foi feito por meio da resolução de problemas em que as grandezas envolvidas eram contínuas (como no caso do exemplo dado) ou discretas (como no caso do número de pães e despesa, por exemplo)

Da análise do problema 3 decorreram sugestões como por exemplo:

Em (A) o ponto P se move sobre AB. Determine a área e o perímetro do triângulo sombreado para x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 (em cm); arrume os dados obtidos numa tabela, sabendo que o lado do quadrado mede 10 cm.



X (cm)	Área (cm^2)	Perímetro (cm)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
9		
x		

O mesmo pode ser feito em relação às figuras (B), (C) e (D), onde a figura sombreada não é mais um triângulo, o que propiciará ao aluno uma aprendizagem em que vários conteúdos matemáticos são tratados integradamente; nesse caso, a variação de grandezas, a composição e decomposição de figuras, a relação de Pitágoras, o cálculo de área de regiões poligonais, operações com números reais são alguns dos conteúdos envolvidos nesses problemas. A familiarização com os conceitos de função e funções do 1º e 2º graus estava iniciada. A construção da linguagem formal foi feita a medida que cada conceito apresentava um significado para os alunos, dessa maneira, a simbologia como f(x), D(f), Im(f), CD(f) só apareceu quando os alunos apreenderam as idéias fundamentais que dão suporte aos conceitos assim simbolizados, interpretando-as algébrica e geometricamente.

2 Análise e comparação de variações em que as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais.

Gradualmente passamos para uma segunda etapa, iniciada com a proposta de três situações-problema, que sugeriam, além de alguma atividade manipulável concreta, uma reflexão sobre as variações das grandezas envolvidas.

4. Construa em cartolina seis retângulos diferentes, todos de área 36 cm^2. Cole-os num sistema cartesiano, com dois lados apoiados nos eixos, de modo que um vértice de cada retângulo coincida com a origem do sistema e que nenhum retângulo fique totalmente recoberto por outro.

5. Construa em cartolina seis retângulos diferentes, todos de mesmo perímetro 20 cm. Cole-os apoiados sobre os eixos de um sistema cartesiano, no 1°. quadrante, com um vértice coincidindo com a origem do sistema, de modo que nenhum deles recubra totalmente os demais e preencha a tabela seguinte.

6. Construa em cartolina seis retângulos, de modo que em cada um deles, a medida de sua altura seja o dobro da medida de sua base. Cole-os num sistema cartesiano, no 1°. quadrante, com dois lados apoiados nos dois eixos, respectivamente. Nenhum retângulo deve ficar totalmente recoberto por outro.

Para cada situação, exiba a construção pedida acima e uma tabela do tipo:

a) Em cada situação, o que os retângulos têm em comum?

b) Escreva uma sentença que relacione a medida da base com a da altura de todos os retângulos que têm área 36 cm^2. Idem para os que têm perímetro 20 cm. Idem para os que têm altura com a medida do dobro da base.

c) Observando a tabela descreva como a medida dos lados desses retângulos variam entre si, em cada caso.

d) Em quais das três situações acima as grandezas comprimento da base e da altura são diretamente proporcionais? Inversamente proporcionais? Nem direta nem inversamente proporcionais?

retângulo	A	B
base (cm)		
altura (cm)		
área (cm^2)		
perímetro (cm)		

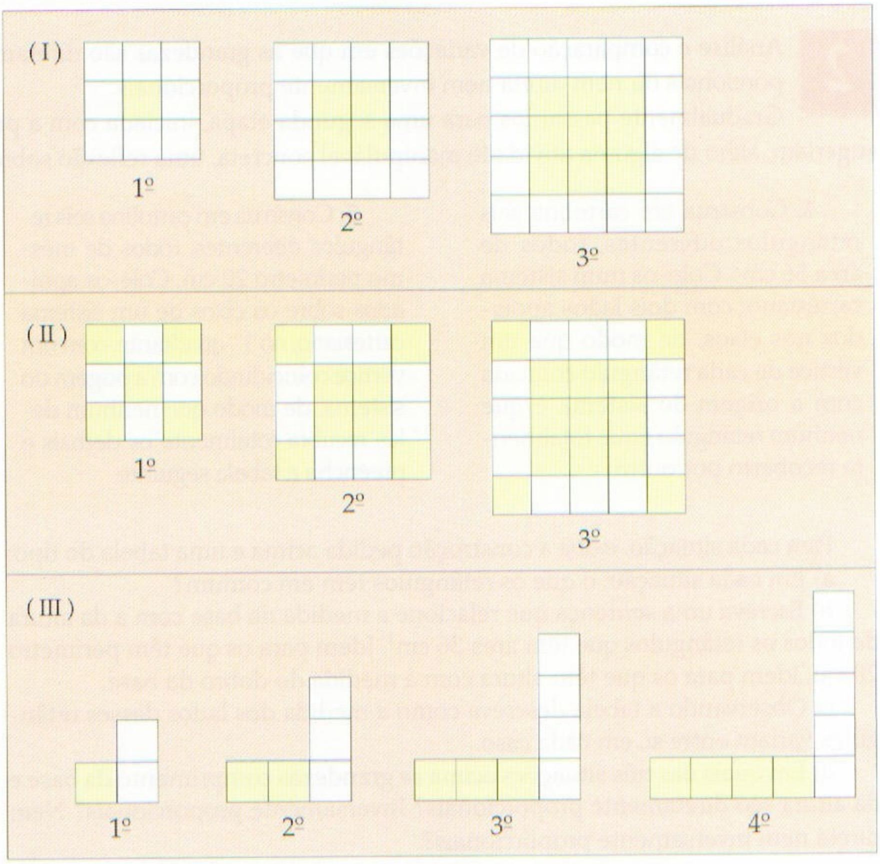
As dificuldades apresentadas por ocasião da resolução desses problemas foram resumidas nesta tabela:

Dificuldades apresentadas na resolução do problema 2	Dificuldades apresentadas na resolução do Problema 3
• perceber o significado de **n** no contexto do problema e que valores pode assumir; • perceber que o número de quadradinhos escuros é igual ao número de ordem da figura; • encontrar uma maneira organizada para fazer a contagem dos quadradinhos brancos (ou o total deles); • a partir da organização dessa contagem, descrever uma lei genérica para expressar a dependência do número de quadradinhos pretos, (brancos ou total) e o número de ordem da figura; • dificuldade em decidir se o conjunto dos pontos que representam a dependência entre o número de quadradinhos brancos e o número de ordem da figura (num gráfico cartesiano) forma uma linha contínua ou é constituído por"pontos isolados"(um conjunto enumerável de pontos).	• compreensão do enunciado, e do que ocorria com a figura, com o movimento do ponto P; • cálculo de área de retângulo; • percepção de que a área da figura sombreada pode ser determinada por diferença entre a área do quadradão e a do retângulo branco, • percepção de que é mais conveniente registrar os cálculos efetuados para a determinação da área pedida (para posterior generalização), do que simplesmente o resultado final; • que tipo de número a medida x pode ser e, consequentemente, que restrições ela deve sofrer diante do contexto do problema; • perceber que o gráfico da função descrita no problema é um segmento de reta sem os extremos (0, 100) e (10, 0) e não uma reta que passa por esses pontos.

Não só as dúvidas surgidas por ocasião da resolução, como também as diferentes resoluções apresentadas pelos alunos, foram socializadas e discutidas com a classe. Dessa interação, em que cada aluno se punha em contato com as idéias, argumentos e procedimentos dos colegas, acabaram por surgir novos problemas.

Das dúvidas surgiram problemas que puderam ser resolvidos imediatamente e outros que ficaram em suspenso aguardando o momento em que os alunos dispusessem de algum novo instrumento conceitual e procedimental para resolvê-los, o que foi sendo feito ao longo do curso. Desse modo, revisitar "velhos problemas" que tinham permanecido à espera num determinado instante da aprendizagem, tornou-se um procedimento usual em nosso curso. Aquela sensação de impotência que o aluno sofria ao deixar um problema de lado por não saber resolvê-lo, desapareceu diante da atitude" não posso resolver agora, mas voltarei a ele quando conhecer e tiver em mãos novos conceitos e procedimentos".

Por outro lado, a análise das próprias questões dadas gerou novos problemas. Por exemplo, ao analisarem as figuras dadas no problema 2, logo se perguntaram" e se as figuras não forem retângulos de mesma altura, mas sim quadrados pintados do seguinte modo, como se poderia calcular a quantidade de quadradinhos brancos da n-ésima figura?"A mesma pergunta foi feita para outras sucessões de figuras, como em (II) ou em (III)



e um dos alunos acrescentou que na minha linha iríamos escrever sempre números pares.

A pergunta que fizemos a seguir teve a intenção de mostrar um contra-exemplo à afirmação do aluno: **se eu tivesse respondido 5, o que o aluno deveria ter dito?**

Com essa pergunta, os alunos questionaram sobre o conjunto dos números sugeridos por eles (o que revela uma preocupação informal com o domínio da função com que estávamos trabalhando). A seguir sugeriram muitos números fracionários e números inteiros relativos. Entretanto, os números irracionais custaram muito a aparecer.

O jogo foi repetido, considerando outras transformações cuja "lei" eles descobriam e, finalmente, invertemos os papéis e um dos alunos propunha a transformação dos números que eu sugeria e os demais descobriam qual era.

Desse modo, trabalhamos com leis de associação, muito informalmente, sem a preocupação de registros de qualquer espécie, porém com ênfase na verbalização sobre como os números eram transformados: "o dobro de", "multiplicou por três e somou um", "dividiu por cinco", "elevou ao quadrado". Lidamos também com a idéia de domínio de função, propondo restrições sobre os números que poderiam ser sugeridos. Nos exemplos dados, lidamos com a idéia de imagem inversa, possível, quando, por exemplo, examinamos "o caso do professor ter respondido 5, que número o aluno teria dito".

Essa primeira atividade revelou que os números que de fato tinham algum sentido para eles eram os naturais. Parece que os inteiros e racionais são tratados como tal, somente em problemas escolares, embora lidem com eles em seu dia-a-dia; os irracionais, decididamente, não significavam muita coisa para eles, a não ser que sugerem um punhado de manipulações algébricas de maneira mecânica. Dessa forma, ampliei um pouco meus objetivos para esse curso:

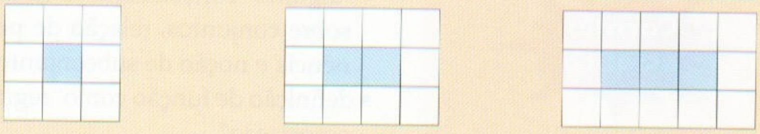
- fazer com que os alunos conferissem aos números reais o "status de número", pelo menos como um ente ligado à quantidade e à medida.

Esse trabalho com os números foi feito integradamente com o de conceito de função, de modo que os alunos iam percebendo a necessidade de seu aprendizado para resolver as situações-problema a eles propostas.

A seguir, passamos a examinar situações um pouco diferentes desse primeiro jogo. O contexto que apresentavam era ligado ora a seqüências, ora a modelos geométricos. Os primeiros problemas sugeridos envolviam tanto grandezas discretas como contínuas (começamos pelas primeiras), e, com eles, tínhamos o objetivo de trabalhar a observação de regularidades e a generalização, bem como começar a construção de uma linguagem adequada para descrever uma função.

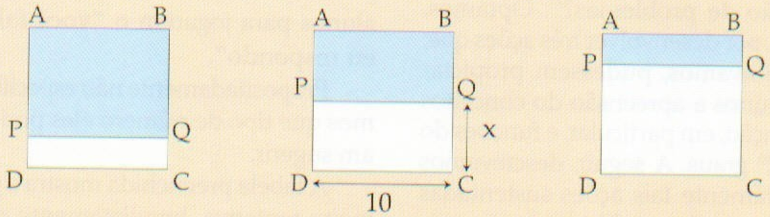
2. Observando as figuras da sucessão seguinte:
a) desenhe a 4ª figura;
b) decida quantos quadradinhos escuros tem a 10ª figura, sem construí-la;
c) complete a tabela referente a seqüência dada.
d) esboce o gráfico que representa a variação do número de quadradinhos brancos com o número de ordem da figura.

Nº de ordem da figura	Nº de	Nº de	Total de quadradinhos
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
15ª			
nª			



3. O quadrado ABCD tem lado de 10cm. O ponto P se move de D para A, de modo que PQ se conserva paralelo a AB.
a) Calcule a área da figura sombreada para x= 1, 2, 3, 4, 5, 6 em cm e arrume os dados obtidos numa tabela do tipo:

x	Área do PQCD
1	
2	
3	



b) Quanto pode medir o lado de medida x da figura sombreada?
c) Represente essa dependência descrita na tabela, num gráfico cartesiano.