artigo

A LÓGICA DO PROFESSOR X A LÓGICA DO ALUNO

Franca Cohen Gottlieb - Universidade Santa Úrsula - Instituto de Educação Matemática

Este trabalho apresenta o resultado de uma reflexão sobre o relato do Prof. Dr. Arthur Powell, da Rutgers University – New Jersey, USA – por ocasião da aula inaugural sobre "Matematização na construção de conceitos matemáticos", por ele ministrada no inicio do 2º semestre de 1996 no Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula

Questão apresentada

O Prof. Dr. Arthur Powell proferiu a aula inaugural do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula no 2º semestre de 1996.

Na sua fala ele mencionou um fato que aconteceu a um professor que estava estudando frações com seus alunos.

Dadas as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ pedia-se aos alunos que escrevessem uma fração que estivesse entre as duas.

Um aluno respondeu $\frac{2}{3}$. Confuso pela estranheza da resposta, o professor pediu que ele justificasse o procedimento. O aluno o fez da seguinte maneira:

Os numeradores são 1 e 3. Entre eles está 2.

Os denominadores são 2 e 4. Entre eles está 3.

Logo a fração é $\frac{2}{3}$.

Reflexão e análise da situação.

O que isso mostra para todos que se interessam, pesquisam, se aprofundam em questões relacionadas com Educação Matemática? Evidentemente trata-se de um problema que envolve a noção de "significado" Um conceito tem, para um aluno, um "significado" que não é necessariamente o mesmo daquele do professor.

Quais os conceitos envolvidos neste problema e quais os seus significados?

Para analisar essa divergência entre a resposta do aluno e do professor podemos nos apoiar em alguns pontos:

Qual a coerência, do ponto de vista matemático, da resposta do aluno?

Que conseqüências essa divergência de justificações entre professor e aluno podem acarretar no dia a dia da sala de aula?

Examinemos então os conceitos envolvidos:

Antes de tudo o conceito de "estar entre".

"Estar entre" tem para o aluno o "significado" de "estar no meio de", "estar no ponto médio de". "Estar no ponto médio de" quer dizer para o aluno "estar na metade do caminho entre dois pontos" ou "estar à mesma distância do primeiro e do segundo ponto".

Desde que "estar entre" significa distância para o aluno, e distância é um número, o aluno procura trabalhar com os números de que dispõe para encontrar outro que esteja à mesma distância daqueles dados no problema. Ele conhece a situação de procurar o valor médio entre dois valores – valores são números: achar a média. É o que ele procura fazer.

Eis portanto a primeira divergência de que falamos.

É coerente, do ponto de vista matemático, o "significado" de "estar entre" como "ter valor médio", mas este significado não é exclusivo. É preciso fazer o aluno perceber que, entre dois números, há outros diferentes do valor médio. Para isso o professor não pode ir adiante como se tudo estivesse perfeito. Ele deve usar material concreto para que o aluno perceba que aquele seu significado não é completo. Sentir que, mesmo trabalhando com números naturais, pode haver muitos números entre dois outros – entre, por exemplo, 2 e 7, ou entre 15 e 49, ou 1930 e 1997.

Há ainda neste problema um outro conceito envolvido, o de "fração".

Muito provavelmente o aluno sabe em que consiste o valor fracionário do inteiro. Faz parte de sua vivência, de seu dia a dia, trabalhar com dinheiro, e ele conhece o significado dos centésimos da moeda. Porém, trabalha com este número fracionário em sua representação decimal, usando vírgula. Esse número fracionário tem para ele um significado que é coerente, do ponto de vista matemático, com o do professor.

Mesmo assim, podemos afirmar ,baseados em resultados de pesquisas efetuadas por vários grupos, como, por exemplo, o de Joaquim Gimenez, que a visualização da fração positiva como quociente entre dois números naturais, onde o segundo não é nulo, é um dos pontos mais nevrálgicos de todo o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais .

Esse conceito deve ser construído com manipulação de material concreto bem diferenciado, manipulação que não deve ser atropelada pela pressa do professor em "cumprir o programa". O professor não ignora que a maneira como escrevemos uma fração é uma convenção. Os significados do numerador e do denominador na representação de uma fração é uma convenção. Baseando-nos nestas convenções construímos as técnicas operatórias para trabalhar com números fracionais.

Se o aluno não construiu um significado coerente com a matemática para os diferentes significados dos termos da fração, ele não pode criar o hábito de operar corretamente com os números fracionários. Vai apreender a operar com eles de uma maneira mecânica e só decorará algoritmos que não têm significado para ele. Terá o que o professor Shlomo Vinner chama de "pseudo conhecimento".

"Pseudo conhecimento" faz com que apliquemos métodos de resolução de problemas por analogia com casos já vistos.

Esse conhecimento pode ser confundido com "verdadeiro conhecimento" quando a resposta está de acordo com o resultado desejado. O professor deve procurar meios de avaliação que o façam detectar esse fenômeno para evitar a cristalização de uma maneira não desejada de "fazer Matemática".

É, portanto, bastante compreensível que o aluno que não construiu corretamente a sua capacidade de reconhecer o significado dos termos da fração tenda a inventar métodos, para operar com elas, análogos ao que usou com os números naturais. Ele, então, aplica a maneira descrita no início do nosso artigo para achar a média entre duas frações.

Vemos, de novo, o quanto as divergências entre os significados dos conceitos envolvidos no problema levam o professor a alterar sua atuação em sala de aula, abandonando aquilo que ele costuma considerar precioso em seu planejamento: a linearidade .

Devemos, sim, fazer pausas, digressões, variar a abordagem das idéias matemáticas que se quer que o aluno construa para ter certeza de que o aluno está realmente construindo a Matemática que todos usamos, ou seja, aquela na qual ele vai poder não só compreender as notações com que estamos trabalhando mas também utilizá-las convenientemente.

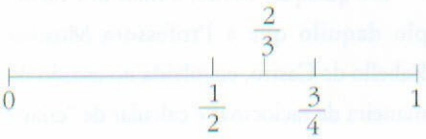
Não se trata de "significados certos ou errados". Como pondera Rómulo Lins, é uma questão de negociação entre professor e aluno, de diálogo, de compreensão entre seres humanos envolvidos numa mesma atividade, cada um respeitando o seu nível de atuação.

Discussão

Consideremos, porém, a situação sob outro ponto de vista.

Nosso professor quer que o aluno se conscientize de que a maneira pela qual ele resolveu o problema não é correta.

Em verdade, o aluno não errou, não deu uma resposta incorreta. Ao usar o seu "método" para calcular uma fração entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, encontrou um resultado correto.



Isto, evidentemente, confirma sua confiança no seu "método".

O que aconteceria se, ao testar o "método" com outros números fracionários, ele continuasse a achar respostas corretas?

Muito improvável, pensaria o professor, o que aconteceu foi um acaso, algo fortuito.

Em verdade foi um acaso, mas não tão improvável como pode parecer.

Consideremos duas frações com configuração parecida à das consideradas, ou seja, em que os quatro números naturais envolvidos sejam consecutivos.

Sejam as frações $\frac{x}{x+1}$ e $\frac{x+2}{x+3}$ com $x \in N^*$.

A fração encontrada pelo "método" do aluno é

$$\frac{\frac{x+x+2}{2}}{\frac{x+1+x+2}{2}} = \frac{x+1}{x+2}$$

Ora

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)^2(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Com os três denominadores iguais, vejamos se os numeradores estão na ordem crescente.

Chamemos

① $x\,(x+2)\,(x+3)$

② $(x+1)^2\,(x+3)$

③ $(x+1)\,(x+2)^2$

Comparemos 1 com 2

$x\,(x+2)\,(x+3)\ \ldots\ (x+1)^2\,(x+3)$

como $x > 0$ e $x+3 > 0$ basta comparar :

$x\,(x+2)\ \ldots\ldots\ (x+1)^2$

$x^2+2x\ \ldots\ldots\ x^2+2x+1$

por serem números positivos e consecutivos tem-se: $x^2 + 2x < x^2 + 2x + 1$

logo $1 < 2$

Comparemos 2 com 3

$(x+1)^2\,(x+3)\ \ldots\ (x+1)\,(x+2)^2$

como $x > 0$ e $x + 1 > 0$ basta comparar:

$(x+1)\,(x+3)\ \ldots\ldots\ (x+2)^2$

$x^2+4x+3\ \ldots\ \ldots\ldots\ x^2+4x+4$

de novo temos dois números positivos e consecutivos, logo

$x^2+4x+3 < x^2+4x+4$

e $2 < 3$

Vemos então que, também neste caso, o "método" do aluno funciona.

E o que aconteceria se os quatro números naturais estivessem em progressão aritmética com razão diferente de um?

Consideremos as frações $\frac{x}{x+a}$ e $\frac{x+2a}{x+3a}$ com $x \in N^*$.e $a \in N \angle \{0,1\}$.

Pelo "método" acha-se uma fração cujo numerador é a média entre os dois numeradores dados e cujo denominador é a média entre os dois denominadores dados.

A fração encontrada é $\frac{x+a}{x+2a}$

Repetindo o raciocínio feito no caso anterior , os três numeradores seriam :

① $x\,(x+2a)\,(x+3a)$

② $(x+a)^2\,(x+3a)$

③ $(x+a)\,(x+2a)^2$

Vemos que recaímos no caso anterior, pois multiplicamos respectivamente 0, 1, 2 e 3 por a, com $a \in N^*$, o que é lícito por ser a um número positivo.

Mais uma vez o "método" funcionou.

Examinemos, finalmente, uma " regularidade mais fraca".

Consideremos as frações e com $x \in N^*$ e $k \in N^*$.

Nelas a diferença entre os numeradores é igual à diferença entre os denominadores e a diferença entre os termos da primeira fração é igual à diferença entre os da segunda fração.

Pelo "método", a fração que está entre as duas dadas seria

$$\frac{2x+k}{2x+2a+k}$$

Será que de novo o "método" funciona?

As três frações são:

$$\frac{x}{x+a};\ \frac{2x+k}{2x+2a+k};\ \frac{x+k}{x+k+a}$$

O produto dos denominadores é:

$(x+a)\,(x+k+a)\,(2x+2a+k)$

Os numeradores são, respectivamente;

① $x(x+k+a)\,(2x+2a+k)$

② $(2x+k)\,(x+a)\,(x+a+k)$

③ $(x+k)\,(x+a)\,(2x+2a+k)$

Comparando ① com ② tem-se

$x(x+a+k)\,(2x+2a+k)\ \ldots\ldots\ (2x+k)\,(x+a)\,(x+a+k)$

$2x^2+2ax+kx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2x^2+2ax+kx+ka$

como $kx < kx+ka$ pois $a \in N^*$ e $k \in N^*$.

logo ① < ②

Comparando ② com ③ tem-se

$(2x+k)\ (x+a)\ (x+a+k)$ .... $(x+k)\ (x+a)\ (2x+2a+k)$

$2x^2+2ax+2kx+kx+ka+k^2$ ...... $2x^2+2ax+kx+2kx+2ka+k^2$

ka ...... $2ka$

como $ka < 2ka$ com $a \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

logo $2 < 3$

Vemos que de novo o "método" funciona!

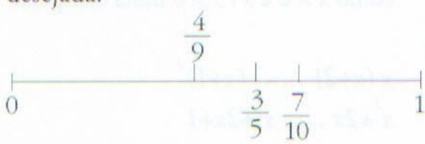
Conclusões

É evidente que, se o professor quer levar o aluno a se convencer da casualidade do acerto, e que comece a entender o processo pelo qual se encontra a média aritmética entre duas frações, deve seguir outro caminho.

Deve, por exemplo, fazê-lo vivenciar o fato de que a fração encontrada não é a média aritmética, ou seja que a fração intermediária está, sim, entre as duas outras, mas não está à mesma distância das duas.

O professor deve fazer ainda o aluno sentir que, no problema em questão, se ele considerar uma fração que tem como numerador um natural entre os dois numeradores e como denominador um natural entre os dois denominadores, o resultado pode não estar certo.

Consideremos, por exemplo, as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$. Se o aluno construir a fra-ção resposta pelo seu "método" (o método descrito acima) e pensar em $\frac{4}{9}$, os três valores não estarão na ordem desejada.



Fazê-lo sentir que o que lhe parecia "óbvio" não é verdadeiro. Fazê-lo trabalhar com frações outras do que as que apresentam as "regularidades" vistas, enfim levá-lo a criar um novo significado para frações.

Acima de tudo, porém, o professor deve se convencer de que prever o que os alunos possam entender dos conteúdos que ele procura transmitir é um problema mais sério do que ele pensa. Que a sua habilidade em prever as respostas dos alunos é muito falível. Que suas certezas, do professor, são muito frágeis .

Provamos, talvez, que aquilo que pode parecer "ilógico" ao professor pode ser "lógico" para o aluno e que este tenha a sensação de que estamos falando línguas diferentes?

Não sei.

De qualquer modo, é mais um exemplo daquilo que a Professora Monica Rabello de Castro, envolvida no estudo da maneira de raciocinar e calcular de "crianças de rua" chama "o avesso da lógica".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LINS R e GIMENEZ, J. – *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI* – Editora Papirus, 1997.

VINNER, S. – *From Intuition to Exibition. Mathematics and Other Endangered Species* –. Proceedings of the 21st Conference of PME. 1-63 . University of Helsinki , Finland, 1997.

RABELLO DE CASTRO, M.– *Retóricas da Rua :Educador , Criança e Diálogos* . Editora Santa Úrsula, 1997.

__________ – *O avesso da lógica* – Rio de Janeiro, Tese de Mestrado, (mimeo), 1990.

GIMENEZ, *J.* . *Innovacion Metodologica de la Didactica Especial del Numero Racional Positivo : Diagnosis Cognitiva y Desarrollo Metodologico.* – Tese de Doutorado na Universidad Autonoma de Barcelona, 1991.