ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura

The Construction of Mathematics for Teaching the Concept of Direct Proportionality from a Systematic Literature Review

Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti*

Jonei Cerqueira Barbosa**

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, como um modelo teórico a partir de uma revisão sistemática da literatura. A análise de dezessete artigos mostrou uma diversidade de realizações desse conceito, distribuída em três cenários. No primeiro, o conceito de proporcionalidade foi descrito como razão e realizou-se como comparação entre partes, equivalência de razões, taxa, escala, divisão, vetor e intervalos musicais. No segundo cenário, o conceito de proporcionalidade foi descrito pela igualdade entre razões, sustentado pelo teorema de Tales, cujas realizações foram regra de três e porcentagem. No último cenário, esse conceito foi apresentado como uma função, por meio de relações multiplicativas, taxa de variação, escala e porcentagem.

Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Proporcionalidade Direta. Educação Básica. Revisão Sistemática.

Abstract

In this article, we present mathematics for teaching the proportionality concept, as a theoretical model from a systematic review of the literature. The seventeen articles analysis showed a diversity of realizations of this concept, distributed in three landscapes. At first, it was described as ratio and held as comparison of parts, equivalence ratios, rate, scale division, vector, and musical intervals. In the second one, it was described by the equality between reasons, supported by the Tales theorem, whose achievements were rule of three and percentage. In the latter landscape, this concept was presented as a function model through multiplicative relations, rate of change, scale, and percentage.

Keywords: Mathematics for Teaching. Direct Proportionality. Elementary Education. Systematic Review.

1 Introdução

* Doutora em Educação pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Professora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista/BA. Endereço para correspondência: Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. Estrada do Bem-Querer, km 4, Caixa Postal 95, Vitória da Conquista/BA, CEP: 45083-900, Brasil. E-mail: robertamenduni@yahoo.com.br.

** Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo (UNESP). Professor da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador/BA. Endereço para correspondência: Departamento de Educação. Avenida Reitor Miguel Calmon s/n, Campus Canela, Salvador/BA, CEP: 40.110 100, Brasil. E-mail: jonei.cerqueira@ufba.br

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

Reconhecemos que existem muitas aplicações da proporcionalidade na vida cotidiana e também em áreas como Matemática, Física, Química, Música, Geografia, Artes, dentre outras. Alguns estudos (COSTA JUNIOR, 2010; SILVA, 2008; MARTINS, 2007) têm apontado que, no contexto da Matemática Escolar bem como na formação inicial de professores (SILVA; ALENCAR, 2012), os profissionais, ao ensinarem proporcionalidade, priorizam o ensino do algoritmo da regra de três, deixando de focalizar as relações existentes entre as grandezas.

A fim de evitar o uso exclusivo da regra de três, outras formas de abordar a proporcionalidade têm sido destacadas. Citemos, por exemplo, o trabalho elaborado por Ponte, Silvestre, Garcia e Costa (2010), cuja proporcionalidade direta pode ser desenvolvida pelo ensino das regularidades ou da função linear.

O ensino das regularidades pode ser desenvolvido desde o início dos Anos Iniciais, quando o professor tem condições de explorar adições sucessivas na relação estabelecida entre grandezas (OLIVEIRA; SANTOS, 2014) e ideias multiplicativas, ao investigar sequências numéricas e padrões geométricos, bem como a lei de formação de uma sequência (PONTE; SILVESTRE; GARCIA; COSTA, 2010). Explorar determinados padrões geométricos, numéricos ou algébricos pode evidenciar constantes de proporcionalidade. Algumas dessas situações podem ser descritas, mesmo que de forma intuitiva, como leis de formação de funções lineares.

Também é possível ensinar proporcionalidade a partir da razão existente entre as medidas do desenho de um objeto e suas medidas reais, verificando se essa razão é ou não a mesma e quais suas implicações (PONTE; SILVESTRE; GARCIA; COSTA, 2010). Outra forma é, a partir de um retângulo real (por exemplo, o tampo da carteira de um aluno) utilizar escalas diferentes para esboçar outros tampos e comparar a área e o perímetro do retângulo original com a área e o perímetro de cada retângulo esboçado, relacionando-os com as escalas utilizadas (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008).

É possível caracterizar o conceito de proporcionalidade como regularidades, função, razão e escalas. Inspirados em Sfard (2008), definimos conceito como aquilo que a palavra comunica. Sendo assim, o conceito de proporcionalidade pode ser comunicado como regularidades, função, razão e escala porque comunicam o conceito.

Para nós conceito não é uma instância anterior a comunicação, mas constitui a própria comunicação que ocorre por meio de *narrativas*. As narrativas são enunciados validados por um grupo de participantes da comunicação (SFARD, 2008). Para ilustração temos teoremas, axiomas, definições como algumas narrativas já validadas, que podem, por exemplo, ser identificadas em livros didáticos, documentos oficiais e também no ato de ensinar do professor, uma vez que todas essas realizações compõem narrativas. Neste artigo, apresentamos um modelo teórico que captura diferentes formas de comunicar o conceito de proporcionalidade, o qual denominamos *Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade na Educação Básica*.

A Matemática para o ensino é uma frente de pesquisas que vem se desenvolvendo em diferentes países. A expressão “matemática para o ensino” se apresenta na literatura de diferentes formas. Tendo como premissa uma Matemática específica do trabalho do professor, diferente da que é praticada por outros profissionais, Ball e Bass (2002), por exemplo, apresentaram-na como a Matemática usada na prática do professor que ensina Matemática. Ball, Thames e Phelps (2008), baseados no trabalho de Shulman (1986), denominaram tal especificidade do professor de Matemática de “conhecimento matemático para o ensino” (CME) e o estruturaram em dois grupos: o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do conteúdo matemático.

No entanto, Huillet (2009), Adler e Davis (2006, 2011) e Davis e Simmt (2006) elaboraram uma demarcação diferente da estruturação teórica apresentada por Ball, Thames e Phelps (2008). Huillet (2009), apoiada na teoria antropológica do didático, fez uma crítica à separação do conhecimento do conteúdo do conhecimento pedagógico, pois considerou que ambos estejam fundidos para constituir o conhecimento matemático para o ensino. Adler e Davis (2006, 2011), baseados em uma abordagem sociológica, investigaram “como” se constituía a Matemática específica para o ensino, produzida na e através da prática, e “que” princípios a legitimavam.

Davis e Simmt (2006), apoiados na ciência da complexidade, investigaram o conhecimento disciplinar do professor de Matemática. Para Davis (2012) e Davis e Renert (2014), a Matemática para o ensino é uma disposição participativa aprendida em um trabalho coletivo, uma compreensão “profunda” da Matemática emergente da prática, uma forma de subsidiar o professor para desenvolver seu trabalho. O resultado não é um conceito a ser ensinado, mas o que é possível aprender sobre esse conceito, oferecendo inicialmente ao grupo o que se sabe. Dessa forma, relações, conexões e aprofundamentos só alcançaram esse dinamismo e complexidade conceitual porque um grupo, e não um indivíduo, construiu sofisticadas compreensões acerca do conceito.

No Brasil, a pesquisa desenvolvida por Rangel (2015) buscou encontrar, por meio de um estudo coletivo com professores da Educação Básica, aspectos que estruturassem e sustentassem o conhecimento matemático sobre números racionais, reconstruindo, a partir daí,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

o que a pesquisadora denominou de “conhecimento de matemática para o ensino”. Sua principal característica é entrelaçar o conhecimento da Matemática elementar e da Matemática desenvolvida no Ensino Superior com o processo coletivo de reflexão entre os professores da Educação Básica (RANGEL, 2015).

Em uma perspectiva mais ampla, Ribeiro (2012) desenvolveu um ensaio teórico em que vinculou o CME aos diferentes significados que identificou para o conceito de equação, com base em resultados de pesquisas. Segundo o autor, essa diversidade de significados propiciou a constituição do conhecimento matemático para o ensino de equações.

Enunciamos, diferentemente dos pesquisadores supracitados, a Matemática para o ensino como um modelo teórico. Consideramos a “Matemática para o ensino” uma forma de estruturar conceitualmente diversas formas de comunicar um conceito, cuja materialização ocorra a partir de diferentes fontes. Especificamente, propomos uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade, tomando como fonte, neste artigo, a literatura da área de Educação Matemática, na qual é possível identificar diferentes formas de comunicar o conceito de proporcionalidade.

Partindo da produção científica em Educação Matemática, ofereceremos a essa área, de forma sistematizada, uma diversidade de comunicações para o conceito de proporcionalidade. Consideramos essa sistematização relevante pelas implicações que podem ter para o ensino de proporcionalidade, especialmente nos cursos de formação de professores, pois permitirá vislumbrar a mencionada diversidade.

A revisão de literatura permite conhecer o que a área tem desenvolvido, remetendo-nos a resultados de pesquisas, empíricas e/ou teóricas, e apresentando diferentes comunicações para o conceito de proporcionalidade. Para exemplificar, a revisão de literatura pode retratar como professores ou futuros professores ou estudantes da Educação Básica comunicam o conceito de proporcionalidade, além disso, sinalizar formas de comunicar esse conceito a partir da análise de livros didáticos ou de documentos oficiais; ou, ainda, apresentar resultados de pesquisas que analisaram vários outros estudos sobre proporcionalidade. Por essas razões, a revisão de literatura se constituiu em um campo fecundo, pois nos permitiu reunir diferentes modos de comunicar proporcionalidade, gerando outros resultados, a partir da análise que estabelecemos. Sendo assim, tivemos por objetivo *construir uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de uma revisão sistemática de literatura.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

A seguir, descrevemos os procedimentos utilizados para selecionar e analisar os artigos que compuseram o *corpus* da pesquisa. Em seguida, apresentamos a análise e discussão dos resultados entrelaçados pela teoria e, por fim, as considerações finais.

2 Procedimentos

Uma revisão sistemática de literatura consiste em identificar e sintetizar estudos, cujos processos de seleção e análise são rigorosos e transparentes (VICTOR, 2008; GOUGH; OLIVER; THOMAS, 2013). Ao identificarmos diferentes formas de comunicar proporcionalidade, explicitaremos uma variabilidade de comunicações, gerando outro resultado que não se constituiria dessa forma se não integrássemos os estudos selecionados.

A literatura sobre a qual nos referimos é constituída de periódicos relacionados especificamente com a área de Educação Matemática. Baseamo-nos na classificação *Qualis*, feita pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e o critério que utilizamos para a seleção dos periódicos foi o conceito atribuído entre A1 e B2[1] nas áreas Educação e Ensino. Dentre esses, selecionamos, arbitrariamente, os seguintes periódicos: Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Boletim do GEPEM); *Zetetiké*; Boletim de Educação Matemática (BOLEMA); Educação Matemática Pesquisa; *Acta Scientiae, Journal of Mathematics Teacher Education* e *ZDM - International Journal on Mathematics Education.*

Iniciamos a seleção dos artigos por ordem cronológica decrescente, no período de 2014 a 2000. Cessamos a busca no ano 2000 porque julgamos que os últimos quinze anos agrupavam um *corpus* substancial para dar um panorama das pesquisas de interesse. A seleção foi feita à medida que o conceito de proporcionalidade foi comunicado[2], não sendo necessariamente esse o foco dos artigos para seus autores. Com base nisso, apresentamos o Quadro 1 que resume o resultado de nossa busca pelo *corpus* do trabalho.

Periódicos/ Quantitativo	Autor(es) (Ano)	Pesquisa
Boletim do GEPEM (03)	Spinillo (2003)	Empírica com crianças de 2ª série (3º ano)
	Costa; Allevato (2012)	Empírica com futuros professores de Matemática do ensino Fundamental e Médio.
	Silva; Pietropaolo; Campos (2013)	Empírica: documental.
Boletim de Educação Matemática	Villarreal; Esteley; Alagia (2005)	Empírica com estudantes universitários.

[1] A consulta feita no site <qualis.capes.gob.br> refere-se ao período de avaliação 2010/2014.
[2] O periódico Zetetiké foi retirado do corpus porque não encontramos artigos que satisfizessem essa condição.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

(07)	Imenes; Lellis (2005)	Teórica.
	Ben-Chaim; Ilany; Keret (2008)	Empírica com futuros professores de Matemática do Ensino fundamental e Médio.
	Onuchic; Allevato (2008)	Teórica.
	Lima; Monteiro (2009)	Empírica com jovens e adultos (agentes de saúde).
	Oliveira (2009)	Empírica com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.
	Rivas; Godino; Castro (2012)	Empírica com futuros professores do Ensino Fundamental.
Educação Matemática Pesquisa (02)	Abdounur (2012)	Teórica.
	Guerra; Hernández (2014)	Empírica: documental.
Acta Scientiae (01)	Scartazzini; Silva; Consul (2005)	Não definida.
Journal of Mathematics Teacher Education (02)	Ben-Chaim; Keret; Ilany (2007)	Empírica com futuros professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.
	Orrill; Brown (2012)	Empírica com professores do Ensino Médio.
ZDM (02)	Taşar (2010)	Empírica com aluna de um curso de Ciência Física.
	Abrahamson; Lee; Negrete; Gutiérrez (2014)	Empírica com estudantes do Ensino Fundamental entre 9 e 11 anos.

Quadro 1 – Relação dos periódicos selecionados
Fonte: Elaboração própria (2016)

Este *corpus* foi analisado por meio da identificação de ênfases, elaboradas com base em Davis e Renert (2014). Entretanto, a nossa forma de utilizar as ênfases difere da dos autores porque aqueles utilizaram-nas como um dispositivo investigativo de conceitos matemáticos para trabalhar coletivamente com um grupo de professores. Nós nos apropriamos das ênfases e as entrelaçamos com algumas definições de Sfard (2008), para então utilizá-las, simultaneamente, como um instrumento de análise da literatura e uma estratégia de modelagem teórica, com o objetivo de propor uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade.

A ênfase chamada *Realizações* é o conceito de proporcionalidade comunicado, neste caso, na escrita dos artigos. Quando realizações[3] do conceito de proporcionalidade foram agrupadas, conforme regras comunicadas pelo participante (SFARD, 2008), neste caso, autores dos artigos, construímos a segunda ênfase, denominada *Cenários*. De acordo com as regras no modo de usar o conceito, seja por palavras seja por recursos visuais como, por exemplo, gráficos, tabelas, desenhos, símbolos algébricos, ícones (SFARD, 2008), delimitávamos os cenários. A terceira ênfase, os *vínculos*, foi gerada entre as realizações agrupadas no mesmo cenário, ou seja, vínculos entre as regras comunicadas.

[3] Ao utilizarmos a palavra realizações estamos nos referindo a uma comunicação.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

A compreensão e, por conseguinte, a constituição do que são cenários e vínculos, neste trabalho, se deram a partir da apropriação que fizemos de definições de Sfard (2008) como, por exemplo, rotina, metarregra e regra de realização. A rotina é um conjunto de metarregras. As metarregras, por sua vez, são as regras que descrevem a estrutura das ações discursivas comunicadas pelos participantes. As regras de realização são aquelas que dão sustentação a estrutura das ações, ou seja, o que valida o uso de metarregra(s) em determinado cenário.

Os cenários foram construídos a partir da identificação de diferentes rotinas. Já os vínculos foram constituídos a partir de associações entre realizações do mesmo cenário, pois observando um cenário por vez, o foco recaiu sobre o que relacionava as realizações ali agrupadas, instaurando, assim, possíveis vínculos.

A partir do entretecimento das ênfases, citadas anteriormente, enunciaremos os cenários conforme rotinas e metarregras descritas acima e, ao apresentarmos as realizações do conceito de proporcionalidade, destacaremos a(s) palavra(s) por meio do uso do itálico, quando mencionada(s) como realização. Quanto às regras de realização, as destacaremos quando identificarmos sua utilização (de forma explícita ou não) para sustentar a estrutura das ações discursivas do participante ao comunicar um conceito de proporcionalidade.

3 Cenários para realizações do conceito de proporcionalidade

O conceito de proporcionalidade só se realiza quando existe uma relação entre partes. As partes podem ser interpretadas, por exemplo, como quantidades ou conjuntos. Ao analisarmos o *corpus*, foi possível identificar essa relação realizando-se conforme três diferentes rotinas, o que caracterizou para nós três cenários. No primeiro cenário, as realizações foram agrupadas conforme a rotina denotada por a/b = a:b (a está para b), cuja relação identificada foi uma razão constante entre duas partes (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2007). No segundo cenário, as realizações agrupadas estavam amparadas pelo teorema de Tales, cuja rotina foi denotada por a/b=c/d (a está para b, assim como c está para d), sendo a relação identificada por uma proporção entre razões. E, no último cenário, agrupamos as realizações de modo que os elementos de um conjunto pudessem corresponder respectivamente aos elementos de outro conjunto, multiplicados ou divididos por uma constante, rotina denotada por uma função do tipo linear.

3.1 Primeiro cenário – o conceito de proporcionalidade realizado como razão

O conceito de proporcionalidade realizado como razão, cuja rotina denotada por a/b ou a:b, em que a é o antecedente e b o consequente, se pautou na relação entre partes. De modo que identificamos três tipos de relação: a multiplicativa (tipo mais comum), a aditiva e a comparativa. Apresentaremos cada uma nesta mesma ordem.

Consideremos, então, a relação multiplicativa sendo comunicada por meio da *comparação entre as partes* (A e B) que pode ser obtida na comparação de tantas partes de A para tantas partes de B. Analisemos um exemplo adaptado de Spinillo (2003): em uma jarra há 3 copos de suco de laranja e 1 de água e a razão de suco para água é de 3 para 1 (3:1). Ao fazer uma nova jarra, a relação proporcional seria: a cada 3 copos de suco de laranja adicionar 1 de água. Ao fazer uma, duas ou mais jarras, há uma metarregra que descreve as ações dos participantes da comunicação, a razão 3:1, que será dobrada se forem feitas duas jarras, e assim por diante. Nesse exemplo, a metarregra foi para cada 3 copos de suco de laranja, acrescentar 1 de água, ou para cada 6 copos de suco de laranja, acrescentar 2 de água.

Outro exemplo, de relação entre partes foi identificado no estudo desenvolvido por Abrahamson, Lee, Negrete e Gutiérrez (2014), que utilizaram um programa de computação, chamado “The Mathematical Imagery Trainer for Proportion” (MIT-P), para que o estudante identificasse a constante de proporcionalidade ou invariância. Por meio do MIT-P, o antecedente (comprimento de uma barra) era relacionado com o consequente (comprimento da outra barra) e, como resultado, encontrava-se a constante de proporcionalidade ou invariância. A ação de estabelecer uma relação (que pode ser o dobro, a quarta parte) entre os comprimentos das barras (antecedente e consequente) descreveu a metarregra, que podia ser notada pelo controle do movimento das mãos frente à tela de um computador.

A proporcionalidade realizada como razão permitiu que a identificássemos como uma classe de *razões equivalentes*. Consideremos o exemplo: 5/2 = 15/6 = 20/8 = 30/12... Compreendemos essas razões como sendo razões equivalentes (NCTM, 2010), ou que existe equivalência entre as razões (SPINILLO, 2003). Ao dividirmos o antecedente pelo consequente, encontramos como resultado 2,5, isto é, a constante entre duas partes ou entre quantidades (a invariância), responsável pela origem das razões, formando uma classe de equivalência. Conforme Spinillo (2003, p. 39), “ao estabelecer a equivalência, é necessário entender que as quantidades que compõem uma razão covariam (isto é, alteram-se de forma conjunta) de tal forma que as relações entre elas permanecem invariantes [...]”.

Outra forma de realizar proporcionalidade, fundamentada na razão, foi por meio da observação da relação multiplicativa entre duas quantidades de naturezas distintas, denominada *taxa* (LAMON, 2006; BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2007; 2012; OLIVEIRA;

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

CYRINO, 2014). A densidade é um exemplo disso, pois representa o número de itens ou de pessoas dividido pela área ou volume (BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2008).

Orril e Brown (2012) desenvolveram uma estratégia chamada Dobro do Número de Linhas (Double Number Line – DNL), que contribui para a compreensão das relações proporcionais existentes entre quantidades de naturezas diferentes, a taxa. Para ilustrar tal estratégia, citaremos um dos exemplos utilizados pelos autores, conforme mostra a Figura 1.

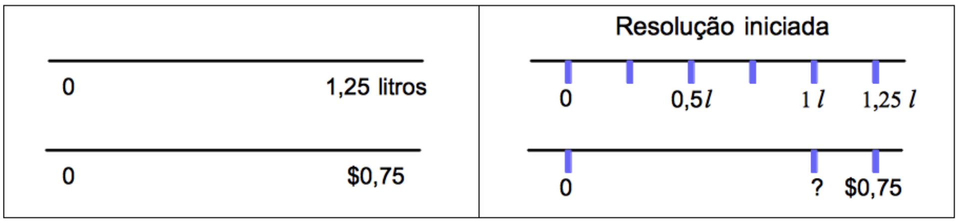


Figura 1 - Esquema usando a DNL
Fonte: adaptado de Orrill e Brown (2012, p. 391-392)

Para encontrar o valor em dólares de uma certa quantidade de combustível, é preciso relacionar as duas linhas simultaneamente. Consideremos a divisão das duas linhas em cinco partes iguais; assim, é possível relacionar o preço com a quantidade de combustível e descobrir o valor a ser pago, por um litro, por exemplo. O DNL possibilita demarcar as partes correspondentes porque existe uma constante de proporcionalidade, que é invariante. As quantidades de preço e de combustível covariam de tal forma que as relações entre si (a invariância) permanecem. Dividir as linhas simultaneamente para encontrar os valores correspondentes foi o que possibilitou descrever a estrutura da ação, portanto, a metarregra.

Focando grandezas de mesma natureza, a proporcionalidade, fundamentada pela razão, pode ser realizada como *escala*. Se considerarmos E=D/R, onde D é a medida do tamanho do desenho do objeto e R é a medida do tamanho real do objeto, com D e R nas mesmas unidades, E representa a invariância entre as quantidades (GUERRA; HERNÁNDEZ, 2014) e quantas vezes o objeto foi aumentado ou diminuído em relação ao tamanho original. Conforme Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012, p. 25), “escala (na medição) pode ser definida como a razão entre uma unidade de medida de um mapa e a real distância (usando a mesma unidade de medição)”. Em outras palavras, a expressão E=D/R pode ser entendida como uma metarregra, pois descreve a ação do participante na comunicação.

Na escala, a invariância também é conhecida por fator-escala (LAMON, 2006; BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2007) ou operador (GUERRA; HERNÁNDEZ, 2014). Consideremos um dos exemplos utilizados por Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008), ao proporem redução ou ampliação de figuras a partir de uma figura modelo. Na atividade os estudantes são convidados a decidir qual é e a medir o fator-escala aplicado em cada uma, tanto para o

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

comprimento e altura quanto para a área. Quando o fator-escala utilizado em um dos lados não é o mesmo para toda a figura, acontece uma deformidade. O fator-escala ou operador atua em todas as dimensões simultaneamente para manter uma proporção entre as figuras (LAMON, 2006). Ele reduz ou amplia a figura por meio da multiplicação ou divisão (GUERRA; HERNÁNDEZ, 2014); portanto, pode ser compreendido como uma metarregra, pois descreve a estrutura da ação, de ampliar ou de reduzir uma figura, por exemplo.

Ainda nos referindo à razão, Silva, Pietropaolo e Campos (2013), apresentaram uma situação cujas razões têm como antecedentes o comprimento da diagonal (d) de quadrados (uma parte) e como consequentes os respectivos comprimentos dos lados (ℓ) (outra parte). Ao dividir o antecedente pelo consequente (d/ℓ), o resultado em cada uma delas será o mesmo, $\sqrt{2}$, independentemente do valor do comprimento, ou seja, $\sqrt{2}$ é a razão constante (ou invariância) entre essas duas partes. A metarregra que estruturou a ação descrita pela *divisão* do antecedente pelo consequente se constituiu, ao mesmo tempo, em uma realização, pois comunicou o conceito de proporcionalidade. Esse último exemplo sinaliza que nem toda razão pode ser expressa por números racionais (SILVA; PIETROPAOLO; CAMPOS, 2013), o que vincula, por meio da proporcionalidade, a apresentação dos números irracionais.

Onuchic e Allevato (2008) alertaram que não se transpusessem as propriedades dos números racionais, como a soma de frações, para a soma de razões, quando realizadas como vetores, por exemplo, e citam $\frac{3}{5}+\frac{2,4}{5,6}=\frac{5,4}{10,6}$. Nesse caso, foi efetuada “[...] a adição das razões, consideradas como os vetores (3;5) e (2,4; 5,6), cuja resultante, obtida pela regra do paralelogramo, é a razão (ou vetor) (5,4; 10,6)” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 95). O *vetor* (3;5) refere-se à quantidade de álcool e água misturados em um recipiente de 8 litros, na razão de 3 para 5. O vetor seguinte (2,4; 5,6) diz respeito à mistura de álcool para água, no segundo recipiente também de 8 litros, na razão de 3 para 7. A razão entre álcool e água, na mistura resultante, é dada, então, pela razão ou vetor (5,4;10,6), que pode ser obtida pela tangente do ângulo do vetor (5,4;10,6) com o eixo x e, visualizada no gráfico pela regra do paralelogramo, conforme a Figura 2. Razões podem ser realizadas como vetores binários quando existir uma relação entre as partes que compõem a razão ou o vetor (BOTTA, 1997). Essa afirmação está fundamentada na regra de realização chamada Lei de equivalência, que segundo Botta (1997, p. 82) significa: $(x,y) \equiv (u,v) \Leftrightarrow (x:y) = (u:v)$, em que o registro (x,y) ou (u,v) são usados como vetores.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

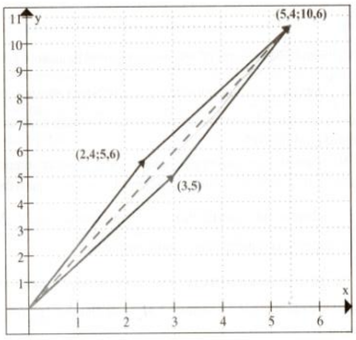


Figura 2 – Adição das razões
Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p. 96)

A forma de operacionalizar a junção de razões quando realizadas como vetores binários (metarregra) foi sustentada pela Lei de equivalência (regra de realização), que validou a estrutura das ações do participante ao comunicar o conceito de proporcionalidade como vetor binário.

Com base nas pesquisas supracitadas, os exemplos narram a razão, considerando-se os números racionais ou irracionais. Contudo, Abdounur (2012) exemplificou a proporcionalidade sendo realizada como razão, por meio da relação entre *intervalos musicais* ou entre sons (comprimento de cordas), e não entre números. Para efeito de ilustração, citaremos um dos exemplos apresentados pelo pesquisador, que utilizou um instrumento como o monocórdio para sua resolução, o que indica a natureza musical do procedimento, e não aritmética: "Seja L o comprimento correspondente a uma nota dada. Qual o comprimento necessário para elevar tal nota de uma oitava e uma quinta, decrescendo-a, em seguida, de 2 quartas?" (ABDOUNUR, 2012, p. 394).

De acordo com Abdounur (2012), "oitava", "quinta" e "quarta" referem-se às razões 1:2; 2:3 e 3:4, respectivamente, e são notas musicais. Esse exemplo pode ser resolvido "encontrando o intervalo musical solicitado e verificando a composição de razões que o gera ou encontrando as razões que, quando compostas, fornecem o intervalo dado" (ABDOUNUR, 2012, p. 394).

Os resultados das pesquisas, apresentados neste cenário, configuraram a rotina como razão, expressa por a/b ou a:b. A rotina foi estruturada por um conjunto de metarregras que descreveram a relação entre partes de três formas: relação aditiva (soma de vetores), relação comparativa (intervalos musicais) e relação multiplicativa (quando realizada como equivalência de razões, taxa, escala, divisão).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

3.2 Segundo cenário – O conceito de proporcionalidade realizado como igualdade entre razões

Há diferentes modos de realizar proporcionalidade como igualdade entre razões. Uma delas foi narrada por Imenes e Lellis (2005, p. 14, destaque nosso):

> A grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B se ambas variam na mesma razão, ou, mais detalhadamente, se dados os valores a_1, a_2 de A e os valores correspondentes b_1, b_2 de B, os quatro valores formarem a proporção $a_1/a_2 = b_1/b_2$. Além disso, A é inversamente proporcional a B, se ambas variam em razões inversas, ou mais detalhadamente, se os valores a_1, a_2, b_1, b_2, formarem a proporção $a_1/a_2 = b_2/b_1$.

A expressão $a_1/a_2 = b_1/b_2$ pode ser considerada a metarregra que os participantes da comunicação utilizaram, validada pela proporção que existe entre as razões. Outro exemplo para esse mesmo tipo de realização foi apresentado por Rivas, Godino e Castro (2012, p. 568, 578) ao analisar uma das resoluções feitas por uma futura professora, conforme Figura 3.

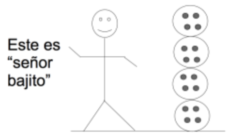
Problema: La altura de “señor bajito” es 4 botones, mientras la altura de “señor alto” es 6 botones. Si usamos clips, la medida de “señor bajito” es de 6 clips. ¿Qual será la altura de “señor alto” medida con clips?	Resolução de uma futura professora
	Señor bajito: 4 botones 6 clips. Señor alto: 6 botones x clips = 9 clips. La proporción ha de ser la misma $\frac{4}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow 4x = 36 \quad x = \frac{36}{4} \quad x = 9$

Figura 3 – Um problema de proporção
Fonte: Rivas, Godino e Castro (2012, p. 568, 570)

A resolução foi pautada (validada) pela proporção, que significa: “relação de igualdade entre as razões (botões/clips do senhor baixo, botões/clips do senhor alto) que se comparam” (RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012, p. 578). Por isso, a estudante escreveu: “A proporção há de ser a mesma 4/6 = 6/x”. A aluna objetivava encontrar o 4º valor, levando-se em consideração a relação proporcional ou a invariância entre as razões. A expressão 4/6 = 6/x pode ser considerada a metarregra que a participante da comunicação utilizou.

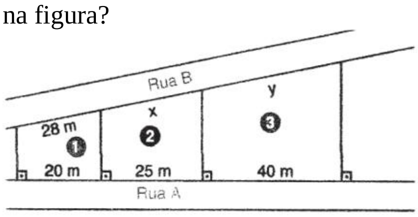
Nos dois exemplos citados há um estabelecimento de relações entre as grandezas por meio da proporção. Contudo, pesquisadores têm criticado o emprego de operações mecânicas em vez do estabelecimento de relações (VILLARREAL; ESTELEY; ALAGIA, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; LIMA; MONTEIRO, 2009; COSTA; ALLEVATO, 2012). Identificamos, na comunicação do participante, ausência de relações entre grandezas quando a proporcionalidade foi realizada como *regra de três* - produto cruzado, sobre o qual se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

conhecem três informações e pretende-se descobrir a quarta (SCARTAZZINI; SILVA; CONSUL, 2005; COSTA; ALLEVATO, 2012; RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012).

Costa e Allevato (2012) analisaram um problema (Figura 4), muito comum em livros didáticos, fundamentado na proporção como igualdade entre razões. No entanto, os futuros professores apenas aplicaram a regra de três em suas resoluções, sem comunicar por que motivo tal procedimento poderia ser utilizado, ou seja, sem estabelecer relações entre as grandezas envolvidas.

Problema: A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que têm frente para a Rua A e para a rua B. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Quais são as medidas de x e y indicadas na figura?



Resolução:

28 — x
20 — 25
$20x = 700$
$x = \frac{700}{20}$
$\boxed{x = 35M}$

28 — y
20 — 40
$20y = 1120$
$y = \frac{1120}{20}$
$\boxed{y = 56M}$

35 — y
25 — 40
$25y = 1400$
$y = \frac{1400}{25}$
$\boxed{y = 56M}$

Figura 4 – Proporcionalidade e Geometria
Fonte: Costa e Allevato (2012, p. 116, 118)

De acordo com as pesquisadoras (COSTA; ALLEVATO, 2012), nenhum dos participantes explicou o porquê poderiam recorrer à regra de três, tampouco justificou o uso do Teorema de Tales para a resolução do problema.

O nome Teorema de Tales surgiu no Brasil na metade do século XX, nos livros-textos referentes ao movimento da matemática moderna (PEREIRA, 2005). Uma das formas de enunciá-lo é: “Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais” (PEREIRA, 2005, p. 28). Aplicando o teorema [4] à situação descrita na Figura 4, consideraremos as retas transversais como representação das ruas A e B, e as retas paralelas como representação das retas perpendiculares à Rua A, dividindo os lotes. Então, pelo teorema, os segmentos correspondentes que estão sobre a reta (por exemplo, 28 e x; 20 e 25) são diretamente proporcionais. Por isso, a resolução mostrada acima é verdadeira e a regra de três pode ser aplicada, pois foi o que descreveu a estrutura da ação do participante na comunicação, sustentada pelo teorema.

O teorema de Tales pode ser interpretado como uma regra de realização, pois valida o uso da metarregra $a_1/a_2 = b_1/b_2$ para comunicar o conceito de proporcionalidade, quando

[4] Conforme Sfard (2008), teorema é uma narrativa validada derivada de outras narrativas que foram validadas anteriormente.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

realizado como igualdade entre duas razões, desde que haja uma proporção entre as razões. Essa metarregra foi comunicada como regra de três e como *porcentagem*.

Para ilustrar a porcentagem como realização do conceito de proporcionalidade, vamos recorrer a um exemplo utilizado por Imenes e Lellis (2005, p. 14): “Para obter 20% de uma quantia Q seria necessário encontrar o valor de x na proporção: $\frac{x}{Q} = \frac{20\%}{100\%}$”. Podemos igualar as razões para então encontrar o valor desconhecido porque grandezas variam na mesma razão, ou seja, para ambas as razões há uma invariância entre si.

Neste cenário, a rotina que caracterizou proporcionalidade como igualdade entre razões foi descrita pela metarregra $a_1/a_2 = b_1/b_2$, realizada como regra de três e porcentagem. Referir-se a proporcionalidade, como igualdade entre razões, foi criticada por autores como Ávila (1986) e Imenes e Lellis (2005), que atribuíram e reconheceram apenas um valor histórico ao modo de resolver o problema da incomensurabilidade. Com a formalização dos números reais, Imenes e Lellis (2005) sinalizaram uma abordagem alternativa para a proporcionalidade, não evidenciada pela igualdade de razões, o que nos mobilizou para o terceiro cenário.

3.3 Terceiro cenário – O conceito de proporcionalidade realizado como função

Para Imenes e Lellis (2005), a essência da proporcionalidade está nas relações multiplicativas, caracterizada por:

> Duas grandezas A e B são diretamente proporcionais se duplicando um valor de A, duplica o valor correspondente de B, triplicando um valor de A, triplica o valor correspondente de B e, assim por diante. Generalizando, multiplica-se um valor de A por qualquer número K, o mesmo acontece com o valor correspondente de B. (IMENES; LELLIS, 2005, p. 20).

Essa narrativa é compreendida como uma metarregra, pois descreve a estrutura das ações discursivas comunicada pelo participante quando o conceito de proporcionalidade é realizado como *relações multiplicativas*. Para exemplificá-la, consideremos o diagrama apresentado, conforme mostra a Figura 5.

$$\begin{tikzcd} A & B \\ 2 \arrow[r, "\times 2{,}5"] \arrow[d, "\times 3"'] & 5 \arrow[d, "\times 3"'] \\ 6 \arrow[r, "\times 2{,}5"] & 15 \end{tikzcd}$$

“[...] quando um valor de A triplica, o valor correspondente de B também triplica [...], percebe-se que os valores de B são 2,5 vezes os valores correspondentes de A [...]” (IMENES; LELLIS, 2005, p. 21).

Figura 5 - Diagrama de relações multiplicativas
Fonte: Imenes e Lellis (2005, p. 21)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

Vinculemos proporcionalidade realizada como relações multiplicativas a uma função linear, do tipo f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por f(x) = ax, com a $\in \mathbb{R}^+$. Escrevamos como função linear as relações multiplicativas apresentadas no diagrama, conforme a Figura 5: y = 2,5 x, onde x $\in$ A e y $\in$ B, sendo A e B conjuntos dos números reais positivos. Considere o conjunto A como o tempo gasto (horas) à medida que se percorre uma distância (km), conforme o conjunto B. É possível afirmar que em uma hora é possível percorrer 2,5km e que, se dobrarmos esse tempo, dobraremos também a distância, e assim por diante. A relação chamada "covariação" ocorre entre os valores de forma conjunta, e a invariância pode ser narrada como coeficiente angular da função, pois esta consiste na "taxa de variação de uma quantidade relativa à variação da outra quantidade [...]" (NCTM, 2010, p. 53). Neste exemplo, a *taxa de variação* do deslocamento em função do tempo pode ser realizada como sendo 2,5 = y/x.

A taxa de variação é outra forma de vincular proporcionalidade à função linear. Taşar (2010) investigou a aceleração de um objeto aplicada à segunda lei de Newton: $F = m.a$ (força [F] é igual a massa [m] vezes aceleração [a]), considerando o movimento em uma linha horizontal. Se tomamos a massa do objeto como constante e a aceleração como variável, logo é possível notar uma relação de proporcionalidade direta entre a aceleração e a força que age sobre o objeto. No caso da função $F = m.a$, a declividade é a taxa de variação da força em relação à aceleração que, ao ser calculada em quaisquer dois pontos, terá como resultado m. Dito de outra forma, $F = m.a$ é a descrição do modelo de função linear $f(x) = a.x$ (onde a é um número e x, a variável).

O fator-escala associado à ampliação e redução de figuras, vinculou-se à função linear. Uma das atividades propostas por Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007; 2012) consistiu em, a partir de uma figura, simular seu tamanho ampliado ou reduzido em espelhos. A metarregra que permitiu essa produção foi descrita pelo fator-escala expresso na função linear, do tipo f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $f(x) = a.x$, sendo a o fator de aumento/redução para o comprimento ou largura, x o comprimento original e f(x) a largura final. Esse exemplo ilustra o conceito de proporcionalidade realizado como *escala*, sustentado pelo modelo de uma função linear.

A *porcentagem* é outro exemplo que vincula a proporcionalidade à função linear. Segundo Imenes e Lellis (2005), se considerarmos a porcentagem como um operador, é possível modelar a situação como uma função linear. Para efeito de ilustração, vamos calcular 23 por cento de determinada quantia. Para isso, transforme a porcentagem em número decimal e então calcule 0,23 da quantia. Essa metarregra descreve a ação (como fazer) do participante

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

da comunicação, ao mesmo tempo que pode ser narrada como uma regra de realização, já que é possível modelar a situação por meio de uma função linear do tipo f: $\mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ dada por $f(x) = 0{,}23.x$, sendo x a quantia e f(x), vinte e três centésimos da quantia.

Diante do exposto, o conceito de proporcionalidade direta foi realizado conforme metarregras que comunicaram relações multiplicativas, taxa de variação, fator-escala e porcentagem, quando fundamentadas no modelo de uma função linear. A constituição de vínculos se deu à medida que a invariância pode ser reconhecida como coeficiente angular, taxa de variação, declividade ou fator-escala. As metarregras e os vínculos identificados neste cenário, caracterizaram a rotina como função linear (VILLARREAL; ESTELEY; ALAGIA, 2005; IMENES; LELLIS, 2005).

4 Considerações finais

A construção teórica de uma Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta, conforme uma revisão sistemática de literatura, pode ser apresentada a partir de três cenários. No primeiro, a rotina estabelecida para o conceito de proporcionalidade foi descrita como *razão*, cuja base de sustentação se deu por meio de uma relação entre partes. No segundo cenário, a rotina instituída para o conceito de proporcionalidade foi descrita pela *igualdade entre duas razões*. Essa rotina esteve fundamentada no Teorema de Tales. No último cenário, a rotina foi fundamentada no modelo de uma *função* do tipo linear. Neste cenário foi possível verificar a existência de vínculos ao analisarmos relações entre as metrarregras. A função do tipo f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $f(x) = a.x$, mostrou, para nós, que a proporcionalidade assumiu vínculos, podendo ser realizada como taxa de variação, coeficiente angular, declividade e fator-escala.

Diante de diferentes realizações ou dos diversos usos identificados para o conceito de proporcionalidade, apresentamos o Quadro 2, que sintetiza um modelo de Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta. Ressaltamos que é peculiar dessa revisão de literatura o conteúdo exposto nesse quadro.

Proporcionalidade realizada como:	**Tem a rotina descrita por metarregras que comunicaram:**	**Tem a rotina sustentada:**
Razão	Comparação entre partes; Razões equivalentes; Taxa; Escala - operador fator-escala; Divisão; Vetor; Intervalos musicais.	por uma relação entre partes, denotadas por a/b = a:b (a está para b).
Igualdade entre	Narrativa de Imenes e Lellis (2005);	

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

duas razões	Regra de três; Porcentagem.	pelo Teorema de Tales.
Função	Relações multiplicativas; Taxa de variação; Fator-escala; Porcentagem (como operador).	pela função do tipo linear.

Quadro 2 – Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade direta conforme revisão sistemática de literatura
Fonte: Elaboração própria (2016)

É possível identificar realizações como taxa e escala no primeiro e terceiro cenários, ou seja, realizadas segundo rotinas denominadas *razão e função*. Da mesma forma, observa-se a porcentagem realizada no segundo e terceiro cenários, ou seja, de acordo com as rotinas nomeadas *igualdade entre razões e função*. Essa constatação nos indica que as realizações podem ser flutuantes nos cenários, pois estão condicionadas pelas regras de realização - que fundamentam as rotinas e pelas metarregras – que descrevem as rotinas. A determinação da realização do conceito de proporcionalidade em diferentes cenários é o uso que se faz da regra de realização e/ou da metarregra, para que se dê a efetividade da atividade.

Disponibilizar aos alunos da Educação Básica, aos futuros professores e já professores de Matemática uma variedade de modos de realizar o conceito de proporcionalidade, conforme diferentes cenários, amplia a comunicação desse conceito, compreendendo-o como um conceito que agrega outros da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Agradecimentos

Agradecemos à Maria Rachel. P. P. Pinto de Queiroz, Ana C. Ferreira, Victor A. Giraldo, Marcia C. de C. T. Cyrino, Andreia M. P. de Oliveira e Roberto S. A. Macedo pelos comentários na versão preliminar deste artigo.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 386-397, 2012.

ABRAHAMSON, D.; Lee, R. G.; NEGRETE, A. G.; GUTIÉRREZ, J. F. Coordinating visualizations of polysemous action: values added for grounding proportion. **International Journal on Mathematics Education**, Germany, n. 46, p. 79-93, 2014.

ADLER, J.; DAVIS, Z. Opening another black box: researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, n. 4, p. 270-296, jul. 2006.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

ADLER, J.; DAVIS, Z. Modelling Teaching in Mathematics Teacher Education and the Constitution of Mathematics for Teaching. In ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). **Mathematical Knowledge in Teaching**. Mathematics Education Library: Springer, 2011. p. 139-160.

ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 5, p. 6-11, 1984.

______. Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de matemática. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 8, p. 5-10, 1985.

______. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 8, p. 1-8, 1986.

BALL, D. L.; BASS, H. Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In: CMESG/GCEDM, 26, 2002, Kingston. **Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group/Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques**… Edmonton: CMESG/GCEDM, 2002. p. 3-14.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for Teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 10, p. 333-340, 2007.

______. **Ratio and Proportion**: Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes). The Netherlands: Sense Publishers, 2012.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. "Atividades Investigativas Autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Bolema***:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 125-159, 2008.

BOTTA, L. S. Números Racionais e Raciocínio Proporcional: Considerações sobre o Ensino-Aprendizagem. 1997. 185 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

COSTA JUNIOR, J. R. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade**: contribuições da história da matemática. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Futuros professores de matemática e o ensino de proporcionalidade através da resolução de problemas de geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 61, p. 109-123, jul./dez. 2012.

CYRINO, M. C. C. T.; GARCIA, T. M. R.; OLIVEIRA, L. M. P. de.; ROCHA, M. R. da. **Formação de Professores em comunidades de prática**: frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

DAVIS, B. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, 2012, Seoul, Korea, **Proceedings…** Seoul: Springer International Publishing, 2012, p. 1-20.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 61, n. 3, p. 293-319, mar. 2006.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The Math Teachers Know**: profound understanding of emergent mathematics. NY: Routledge, 2014.

GOUGH, D.; OLIVER, S.; THOMAS, J. **Learning from research**: systematic reviews for informing policy decisions. Dez. 2013. Disponível em: <http://www.alliance4usefulevidence.org/assets/Alliance-FUE-reviews-booklet-3.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2014.

GUERRA, F. U.; HERNÁNDEZ, C. G. Una praxeología matemática de escala en un texto universitario. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 279-293, 2014.

HUILLET, D. Mathematics for Teaching: an anthropological approach and its use in teacher training. **For the Learning of Mathematics,** Canadá, v. 29, n. 3, p. 04-10, 2009.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 1-30, 2005.

LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. New Jersey e London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2006.

LIMA, M. J de.; MONTEIRO, A. Práticas sociais de localização e mapeamento: uma discussão curricular sobre o conceito de escala. **Bolema***:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 22, n. 32, p. 1-28, 2009.

MARTINS, L. De C. **Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção**: ensino de matemática na sexta série. 2007. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. USA: NCTM, 2010. A Series for Teaching Mathematis.

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. **Bolema***:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 22, n. 34, p. 57-80, 2009.

OLIVEIRA, I. A. F. G.; SANTOS, M. C. **O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples**: uma análise das estratégias. 2000. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/ensino_fundamental.pdf>. Acesso em: 09 jul. 2014.

OLIVEIRA, L. M. C. P. de.; CYRINO, M. C. de C. T. Aprendizagens no empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional. In: ALMEIDA, L. W. de.; CYRINO, M. T.; SAVIOLI, A. M. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e práticas de alunos. Londrina: UEL, 2014. p. 51-76.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema***:* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

ORRILL; C. H.; BROWN, R. E. Making sense of double number lines in professional development: exploring teachers' understandings of proportional relationships. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer Netherlands, v. 15, p. 38-403, 2012.

PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales**: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática. 2005. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PONTE, J. P.; SILVESTRE, A. I.; GARCIA, C.; COSTA, S. **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades**. Tarefas para o 1º e 2 º ciclos do Ensino Básico: Materiais de apoio ao professor. 2010. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf>. Acesso em 14 mar. 2013.

RANGEL, L. G. **Teoria de Sistemas:** Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo. 2015. 275 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

RIBEIRO, A. J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 535-558 abr. 2012.

RIVAS, M. A.; GODINO, J. D.; CASTRO, W. F. Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, v. 26, n. 42 B, p. 559-588, abr. 2012.

SCARTAZZINI, L. S.; SILVA, J. T. V. da; CONSUL, R. de A. Metodologias para determinar áreas em superfícies irregulares no ensino da geometria aplicando a proporcionalidade. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 7, n. 2, p. 65-74, jul./dez. 2005.

SFARD, A. **Thinking as communicating**: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: University Press, 2008.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, A. da F. G.; ALENCAR, E. S. de. O conhecimento profissional docente e sua relação com a ideia de proporcionalidade. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 2, p. 175-186, nov. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em: 09 jul. 2014.

SILVA, A. da F. G; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M. Atual currículo de matemática do estado de São Paulo: indicações para a introdução do ensino da ideia de irracionalidade. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 62, p. 31-44, jan./jul. 2013.

SILVA, E. A. **Pensamento Proporcional e regra de três**: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas. 2008. 210f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Tuiuti do Paraná, Paraná, 2008.

SPINILLO, A. G. Ensinando Proporção a Crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 43, p. 11-48, ago./dez. 2003.

TAŞAR, M. F. What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, the physics, or both? **International Journal on Mathematics Education**, Germany, n. 42, p. 469-482, 2010.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a05

VICTOR, Liz. Systematic reviewing. In: **Social Research Update**. Reino Unido, 2008. University of Surrey. Disponível em: <http://sru.soc.surrey.ac.uk/SRU54.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2014.

VILLARREAL, M. E.; ESTELEY, C. B.; ALAGIA, H. R. As Produções Matemáticas de Estudantes Universitários ao Estender Modelos Lineares a Contextos Não-lineares. **Bolema**, Rio Claro, ano 18, n. 23, p. 1-22, 2005.

Submetido em 5 de Abril de 2016.
Aprovado em 4 de Março de 2017.