Os Paradoxos na Construção da Matemática

Reinaldo Salvitti

Um paradoxo é uma afirmação que não nos parece contraditória em si mesma, mas que contraria fatos ou pressupostos tidos como verdadeiros. Em ciência, quando se enuncia um paradoxo tem-se que algo não está sendo compreendido ou suficientemente explicado pelos conhecimentos já existentes. A ciência, em especial a Matemática, se "alimenta" substancialmente todas as vezes que um paradoxo é enunciado. Isso se dá, porque logo em seguida à provisória "crise" que se instala, segue-se uma incessante busca de explicação, gerando assim novos conceitos e propriedades importantes que vão enriquecendo a ciência. Nesse processo, pode-se também observar, a evolução do senso comum para o que podemos chamar de "senso científico". Para exemplificar e compreender melhor o exposto acima vamos falar sobre três paradoxos, acontecidos em momentos diferentes, que ficaram marcados fortemente na História da Matemática. Esses paradoxos são atribuídos respectivamente a:

1º) ZENÃO;
2º) BOLZANO;
3º) RUSSELL.

1º) UM PARADOXO DE ZENÃO

Zenão, foi um filósofo grego que viveu por volta de 450 a.C.. Muito do que é tratado como matemática hoje em dia era conteúdo de filósofos na Grécia. A corrente dos pitagóricos acreditava na existência de uma unidade de medida absoluta (mônada). Assim uma quantidade de tempo, por exemplo, poderia ser subdividida em um certo número de unidades de tempo, que a comporiam. Essa unidade, por sua vez, não poderia mais ser subdividida. Havia muita dúvida sobre isso já que apesar da crença pitagórica não ser aceita por todos, não se tinha um argumento convincente para negá-la. Zenão jogou por terra a afirmação dos pitagóricos mostrando que se admitirmos a existência de uma unidade absoluta cairemos num absurdo. Assim ele afirmou por exemplo que:

> *"Para se percorrer uma distância d, precisamos percorrer primeiro metade de d (d/2), depois um quarto de d (d/4) e assim sucessivamente. Por mais rápido que percorramos cada trecho (por exemplo a unidade de tempo imaginada pelos pitagóricos), deveríamos percorrer infinitos trechos e assim levaríamos um tempo infinito já que seria a soma de infinitas quantidades de tempo iguais."*

Por outro lado a crise não estaria completamente resolvida se fosse admitido que uma certa quantidade de tempo pudesse ser subdividida indefinidamente até um mínimo que seria nula porque isso levaria à contradição de que somar essas partes nulas para reconstituir o todo daria como resultado algo de medida zero que não era o valor da medida de partida. Essas formas de pensar, que levavam sempre a contradições, plantaram as bases para o conceito de limite e o conceito de números reais.

Nesse exemplo, como nos demais a serem apresentados, estava em cheque a *hipótese do terceiro excluído,* admitida pela Matemática. Por essa hipótese um objeto ou é, ou não é, alguma coisa. Não se admite uma terceira alternativa. Assim, nesse caso, um segmento é infinitamente divisível até se reduzir a algo de tamanho zero ou não.

Para se resolver as contradições que surgiam em ambas as formas de encarar "parte e todo", viu-se que *não* se deveria encarar a relação entre um ponto e um segmento como um todo constituído da soma das partes (apesar de que um ponto de um segmento é um elemento do conjunto dos pontos do segmento). Um ponto deveria ser olhado como um elemento que divide o segmento (ou a reta) em dois subconjuntos disjuntos, ou ainda, como a chegada (o limite) de uma sequência de pontos.

As resposta a essas questões só foram consideradas satisfatórias no final do século 19 (cerca de 2200 anos depois) com os trabalhos sobre números reais de Cauchy, Weierstrass e Dedekind, dentre outros.

2º) UM CONJUNTO PODE TER O MESMO NÚMERO DE ELEMENTOS QUE UM SEU SUBCONJUNTO PRÓPRIO?

Quantos elementos tem o conjunto dos números naturais? E dos inteiros? E dos racionais? E dos irracionais? O conjunto dos naturais tem o mesmo número de elementos que o conjunto dos inteiros?

Essas questões não foram superadas sem "traumas" na Matemática. Galileu (1564 - 1642) já falava em correspondência biunívoca entre naturais e os pares.

1	2	3	4	5	...	10	...
2	4	6	8	10	...	20	...

Galileu argumentou então que se tivéssemos que pensar em conjuntos infinitos o conjunto dos pares e dos naturais deveriam ter o mesmo número de elementos. A questão do número de elementos de um conjunto infinito voltou fortemente à baila no século 19 com o grande avanço da Análise. Assim Bolzano, por volta de 1850, disse que:

se pensássemos em termos de números de elementos para conjuntos infinitos, teríamos um paradoxo já que um conjunto infinito poderia ser "semelhante" a um subconjunto próprio (como o conjunto dos naturais e dos naturais pares por exemplo).

Isso contrariava o senso até então utilizado pelos matemáticos no caso dos conjuntos finitos. Bolzano preferiu olhar esse fato como uma característica especial dos conjuntos infinitos. Na realidade o que se deveria fazer era olhar quantidades infinitas de uma outra forma. Assim Dedekind (1831 - 1916) em 1872, percebeu que poderia formular, antes de tudo, uma definição de *conjunto infinito* exatamente do ponto que era visto como uma anomalia. Definiu então:

um conjunto é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrario ele é finito.

Isso propiciou a Cantor (1845 - 1918) alguns anos mais tarde, 1883, a comparação entre quantidades de elementos de conjuntos infinitos através da seguinte definição:

dois conjuntos têm o mesmo número de elementos quando existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos.

Nesse exemplo a hipótese do terceiro excluído significa que dois conjuntos têm ou não têm o mesmo número de elementos. Dedekind viu que se deveria precisar a idéia de conjunto infinito através de uma definição, ou seja, encarar o infinito de uma forma clara para todos do meio científico. Isso abriu caminho para o segundo passo que foi definir conjuntos semelhantes, isto é, conjuntos equipotentes (conjuntos com o mesmo número de elementos).

3º) EXISTE O CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS? UM CONJUNTO É SEMPRE DETERMINADO POR UMA PROPRIEDADE?

A teoria dos conjuntos trabalhava com a idéia de Frege (1848 - 1925) de que um conjunto é um ente constituído de elementos que sempre podem ser caracterizados por uma propriedade. Assim um conjunto para Frege era a extensão de um predicado **P** (ente sintático);

X={x| x satisfaz **P**(x)}.

No início do século foram formulados paradoxos que colocaram em xeque a concepção de conjunto de Frege.

Considere uma cidade com um barbeiro que barbeia a todos aqueles e somente aqueles que não se barbeiam. O barbeiro está incluido no conjunto daqueles que se barbeiam?

Se o barbeiro está nesse conjunto então *ele se barbeia;* mas o barbeiro só barbeia aqueles que não se barbeiam portanto *ele não se barbeia.*

Se o barbeiro não está nesse conjunto então *ele não se barbeia.* Mas o barbeiro barbeia a todos aqueles que não se barbeiam portanto *ele se barbeia.*

Dessa forma definiu-se um conjunto por uma propriedade mas nós não conseguimos dizer se um "elemento" pertence ou não a esse conjunto. Assim a concepção de conjunto de Frege era falha. Outros paradoxos vieram conturbar ainda mais como "a antinomia de Russell":

Considere a propriedade P(x) de xx e S={x| xx}. S pertence ou não pertence a S?

Se tivermos que S pertence a S então concluímos pela definição de S que S não pertence a S.

Se tivermos que S não pertence a S então concluímos pela definição de S que S pertence a S.

Dessa forma definimos um conjunto por uma propriedade *P(x)* mas não conseguimos decidir se S pertence ou não a esse conjunto. Conclui-se então que nem todas as propriedades determinam conjuntos como pensava Frege. Qual foi então a saída para a definição de conjunto?

1. Uma primeira resposta foi dada pela teoria de Zermelo-Fraenkel que essencialmente precisa melhor a definição de um conjunto. Assim dada uma propriedade P e X um conjunto já obtido anteriormente, podemos construir o conjunto dos elementos de X que satisfazem P. Se pensarmos agora na possibilidade de existir **X**=conjunto de todos os conjuntos, vamos definir analogamente ao paradoxo de Russell o conjunto S={zX | zz}. Como S deve pertencer a X temos duas possibilidades:

a). SS e portanto da definição de S concluímos que SS;
b). SS e portanto da definição de S concluímos que SS.

Obtemos portanto um absurdo e nessa teoria não existe o conjunto de todos os conjuntos.

2. Uma segunda resposta a essa pergunta vem das teorias de Von Neumann-Bernays-Gödel e Kelley-Morse. Essas teorias permitem a existência de novos entes, como por exemplo ente S definido acima, chamados de classes e também os conjuntos. Nessa teoria um conjunto pode ser elemento de outro conjunto mas uma classe não pode ser elemento de nada. Também tem-se que todo conjunto é uma classe mas a recíproca é falsa.Assim para S não se pode perguntar se SS e portanto não se terá nenhuma contradição definindo S. Essas teorias partiram então do ponto onde se tinha uma falha para se construir uma ampliação do campo conceitual.

Nesse terceiro exemplo a hipótese do terceiro excluído se traduz por: dados dois objetos, X e Y, ou XY ou XY. Vimos que a pergunta de um conjunto pertencer, ou não, a outro esbarrava com a própria definição do que era um conjunto.

Podemos afirmar que nos três casos os conceitos e as idéias matemáticas estavam mais próximas do senso comum.

O senso científico muda, evolui. Assim, dizer que o conjunto dos pares tem o mesmo número de elementos que o conjunto dos naturais foge ao senso comum. O senso científico é adquirido com a pesquisa e a reflexão organizada.

Os três exemplos considerados permitiram ampliações dos campos conceituais trazendo um grande desenvolvimento para a Matemática.

BIBLIOGRAFIA

1. BOLZANO, B.: *1851, Paradoxien des Unendlichen* (Liepzig, C. H. Reclam), English trans. by D. H. Steel, Routledge, London, 1951.
2. BOYER, CARL B.: *História da Matemática*, Edusp-Ed. Edgard Blücher Ltda, 1974.
3. DESANTI, JEAN T.: *Una crisis de desarrollo ejemplar: "descubrimiento de los números irracionales"*, do livro Tratado de Lógica y Conocimiento Científico, dirigido por Jean Piaget, vol II, Ediciones Paidós, Buenos Aires, 1979.
4. MIRAGLIA, F.: *Teoria dos Conjuntos: Um mínimo,* Edusp, 1991.
5. MORENO, LUIS E. & WALDEGG, G.: *"The conceptual evolution of actual mathematical infinity"*. Educacional Studies in Mathemathicas **22:** 211-231, 1991, Kluwer Academic Publishers.

Reinaldo Salvitti
Dep. de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística USP
Rua do Matão 1010
Cx-66281, Cep:05389-970
Cidade Universitária, USP
e-mail: sanfona@ime.usp.br