

LOGO e TANGRAM - Um Brinquedo Matemático

Celso Vallin, Maria Helena Ferro, Gilvane Hincket, Maria Teresa Morales

RESUMO

Mostraremos aqui um exemplo de aplicação do TANGRAM, milenar quebra-cabeças chinês, com o computador, usando a linguagem LOGO, para alunos de sétima série. Quando propusemos esta associação, aos alunos de sétima série já imaginávamos que viria a ser interessante e proveitoso. Nós mesmos, porém, fomos ficando mais entusiasmados e satisfeitos a cada aula que passava, com os desdobramentos da proposta e com a riqueza que veio a gerar. Assim decidimos colocar tudo no papel, bem explicado, para que outros professores possam alcançar muitos outros jovens. Explicamos como é o TANGRAM, como fazê-lo a partir de dobraduras de papel e como colocá-lo no computador, no LOGO. Falamos ainda dos itens de conteúdo que são abrangidos com o seu uso.

ATIVIDADES ANTES DO COMPUTADOR

Introdução

O uso da Informática em nossa escola é muito recente. Foi só a partir de 1994 que começamos a trabalhar em salas de 6ª séries, com o programa Super-Logo desenvolvido pela Unicamp.

No início foi tudo muito difícil, principalmente pela nossa própria inexperiência, pois antes mesmo de havermos concluído o nosso curso de Logo, já começamos as aulas com os alunos. Os pioneiros (Professores de Matemática e Desenho das 6ªs.séries) foram muito corajosos e, junto com o professor de informática, conseguiram trabalhos muito interessantes.

A cada etapa que passamos vamos aprendendo muito com nossos alunos também, pois a rapidez com que eles aprendem coisas novas é impressionante. Todos os nossos trabalhos são experimentais, pois não passamos pela mesma experiência ainda duas vezes sequer.

Era um desejo "antigo" juntar o TANGRAM (famoso quebra-cabeças chinês formado por 7 figuras geométricas) ao Logo, e este ano conseguimos casá-los. Depois de um curso feito por alguns de nossos professores onde o assunto principal era justamente o TANGRAM, a idéia começou a se formar em nossas cabeças. O curso foi dado por Regina Célia Santiago e nele montamos o TANGRAM através de dobraduras.

Antes de levarmos aos alunos para o laboratório de informática e passar a eles o trabalho que seria proposto, contamos-lhes a lenda do quebra-cabeças, e fizemos com que cada um construísse primeiro o seu TANGRAM de papel, através de dobraduras aprendidas.

A lenda do TANGRAM

Diz a lenda que um sábio chinês deveria levar ao Imperador uma placa quadrada de jade, mas, no caminho o sábio tropeçou e deixou cair a placa que se partiu em 7 pedaços geometricamente perfeitos. Eis que o sábio tentou remendar e a cada tentativa surgia uma nova figura. Depois de muito tentar ele finalmente conseguiu formar novamente o quadrado e levou aos seu Imperador. Os 7 pedaços representariam portanto as 7 virtudes chinesas onde uma delas com certeza seria a paciência. O sábio mostrou a seus amigos as figuras que havia conseguido montar e cada um então construiu o seu TANGRAM (que significa quadros de Tan) e popularizaram o jogo. Nem é preciso dizer que os alunos não acreditaram nesta lenda, mas ela ajudou a dar um colorido extra ao brinquedo.

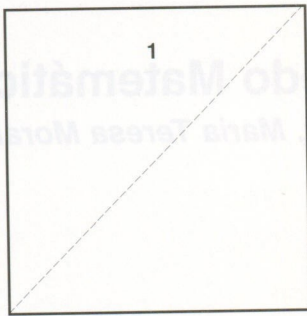
Na falta do jade, cada um fez o seu TANGRAM de papel. Começar pela dobradura de papel é muito importante porque muitas propriedades são observadas a partir delas. A medida em que trabalhávamos com as dobradura, íamos explorando vários aspectos de geometria que se encaixavam: semelhança de triângulos, perímetros, áreas, etc. A seguir descreveremos as dobraduras e atividades que foram desenvolvidas.

TANGRAM - 7 peças

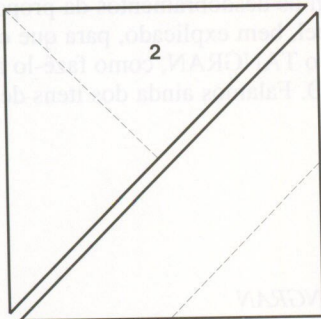
- 2 triângulos grandes
- 2 triângulos pequenos
- 1 triângulo médio
- 1 quadrado
- 1 paralelogramo

As dobraduras

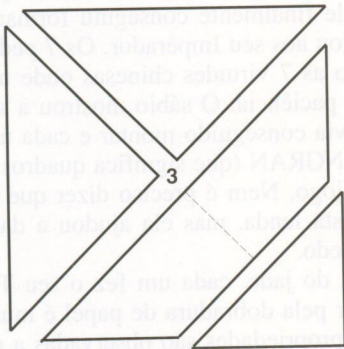
01. Torne um papel quadrado, de qualquer tamanho



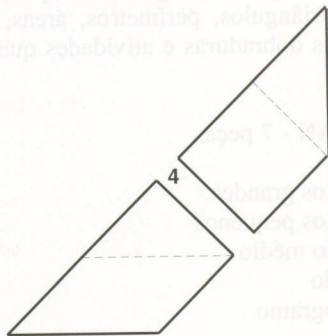
02. Corte-o diagonalmente



03. Do lado esquerdo sairão os 2 triângulos grandes. Na ponta direita inferior sairá o triângulo pequeno. Restará um trapézio.



04. Divida o trapézio ao meio.



05. Tire daqui o quadrado, o paralelogramo e os triângulos pequenos.

Sugestões aos alunos

1. Usar as peças do TANGRAM para montar outras figuras, em aula e em casa.
2. Observar que pode-se dividir o TANGRAM em 16 triângulos do menores, para depois trabalhar com as áreas.
3. Comparar figuras e verificar áreas e perímetros. Fazê-los ver que 2 triângulos pequenos fazem um triângulo médio. Que o médio é a metade do grande. Que a área do triângulo médio é igual à do quadrado, e outras coisas assim.
4. Observar figuras com a mesma área mas perímetros diferentes.
5. Pedir para formarem:
 - 01 quadrado usando exatamente 3 peças
 - 01 quadrado usando exatamente 4 peças
 - 1 retângulo usando as 7 peças
 - 1 trapézio simétrico com as 7 peças.

06. Dar problemas:

- Se o triângulo pequeno fosse de ouro, e fosse vendido por 3 dinheiros, quanto valerá o quadrado com as 7 peças?
- Supondo que as peças fossem de ouro maciço, qual delas valeria mais? (áreas)
- Se elas possuíssem as bordas cravejadas de diamantes, qual delas seria mais cara? (perímetros) e outros.

ATIVIDADES COM COMPUTADOR

As atividades no computador, todas elas são precedidas de tarefas para casa, que não necessitam do uso do computador.

Desejamos que o aluno aprenda a planejar, a desenhar e a pensar independentemente de ser apoiado pelo computador. Depois, no computador, ele testa a tarefa e corrige, se necessário. É uma luta muito árdua, fazer com que os alunos não fiquem só no computador.

Neste trabalho pedimos aos alunos que fizessem grupos de 4 e durante a aula cada grupo dispunha de 2 computadores.

Passamos tarefas para serem entregues em grupo e outras individuais. Nosso objetivo é que o grupo exista durante o desenvolvimento e que em seguida cada um repita o exercício individualmente.

Mesmo quem não entende muito de computador talvez possa acompanhar esta parte. Basta saber que existe uma tartaruga que vai andando pela tela e deixando seu rastro por onde passa. As ordens dadas a ela são PF (andar para frente), PD (girar para a direita) e PE (girar para a esquerda), seguidas de números. PF 100 significa: ande 100 passos para frente e um passo de tartaruga é um pontinho na tela. Quando se pede

à tartaruga para virar, o número que segue é o valor em graus do ângulo que ela irá virar.

O computador serve como um reflexo dos pensamentos do aluno. Serve para corrigir as idéias. É um processo de AUTO - CORREÇÃO instantâneo! Uma coisa muito poderosa.

Ao dar ordens ao computador, a tartaruga anda e surge um desenho na tela. O aluno sabe qual o desenho deveria aparecer ali. Se estiver diferente ele sabe que errou em alguma coisa.

Pedimos aos alunos para escreverem programas usando variáveis mas para facilitar o raciocínio, inicialmente, pensaram e escreveram os programas sem elas. Depois, tudo foi refeito com elas. O uso de variáveis faz com que as figuras possam crescer ou diminuir o tamanho mantendo as proporções.

Tudo ficará mais claro com o detalhamento.

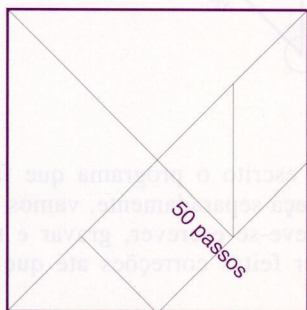
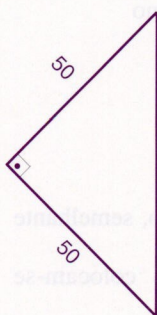


Figura 1

O problema poderia ser resolvido usando-se qualquer tamanho, como ponto de partida. Assim, escolhemos o valor 50 passos, arbitrariamente, para o menor seguimento da figura. A partir dele deduzimos quanto passos a tartaruga precisará andar para percorrer os demais seguimentos.

Notem que a simples atividade de desenhar o TANGRAM no papel já provoca interessantes reflexões iniciais a respeito das medidas do jogo.

Devemos estimular os alunos a usarem o recém aprendido Teorema de Pitágoras para que calculem o exato valor dos lados dos triângulos e demais figuras. Alguns alunos encontraram o valor aproximado da hipotenusa por tentativa e erro.



Pitágoras no Triângulo Pequeno

$$(\text{hipotenusa})^2 = 50^2 + 50^2$$

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{2 \cdot 50^2} = 50\sqrt{2}$$

Figura 2

A tartaruga também sabe fazer cálculos. Assim podemos pedir a ela que escreva quanto vale a raiz quadrada de dois: > escreva (rq 2)

ou podemos pedir a ela que após fazer as contas, ande a quantidade de passos que der como resultado:

$$> \text{pf} (50 * \text{rq} 2)$$

Depois disto, por semelhantes deduções sucessivas chega-se a valor de todas os lados da figura do TANGRAM.

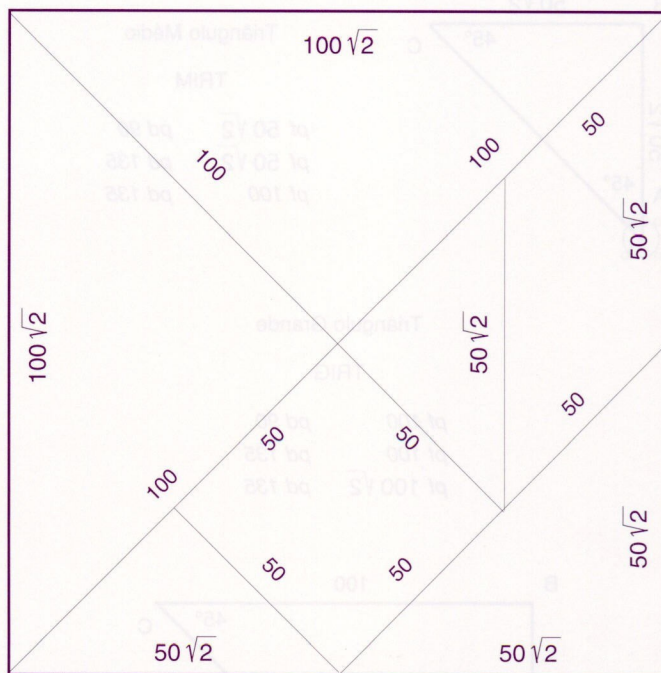
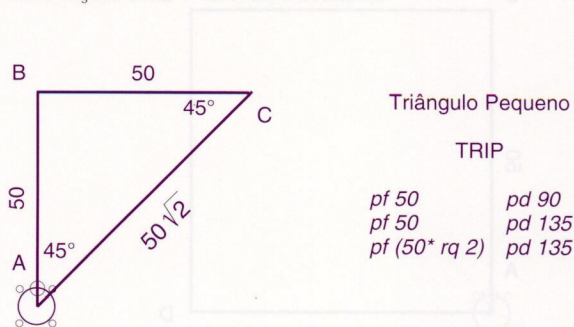


Figura 3

Sabendo-se as medidas, podemos escrever os programas (que comumente são tratados por "aprendas"). Recomendamos aos jovens que, para cada procedimento sigam a seqüência de operações:

1. Fazer o desenho em escala (nas proporções corretas).
2. Escrever as medias e ângulos (de preferência usando outra cor).
3. Indicar a posição inicial da tartaruga (desenhando-a).
4. Indicar (com letras) o caminho a ser percorrido.
5. Escrever o programa (no papel, ao lado do desenho)

Resolução sem o uso de variáveis



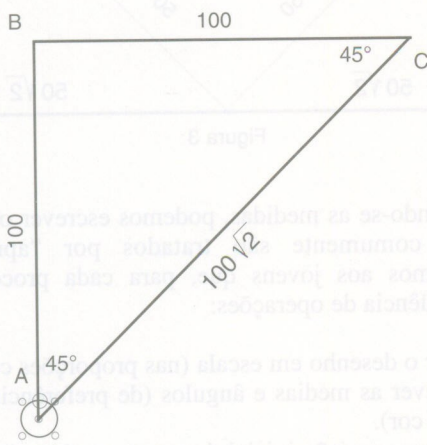
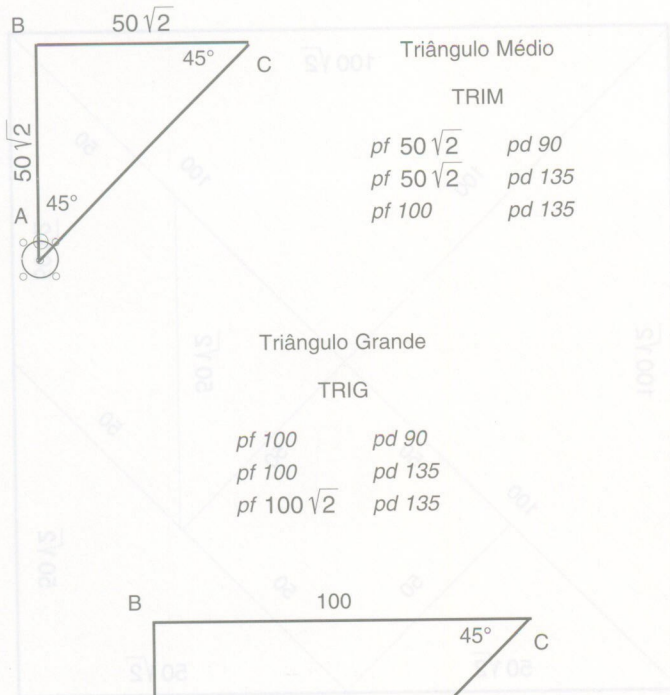
Triângulo Pequeno

TRIP

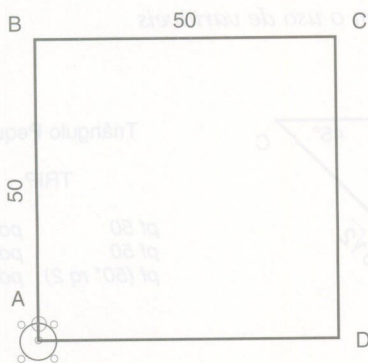
pf 50 pd 90
 pf 50 pd 135
 pf (50* rq 2) pd 135

Recomendamos sempre que no final de um programa a tartaruga seja deixada no mesmo lugar em que estava antes de começá-lo. Isso facilitará muito o raciocínio quando formos unir as partes.

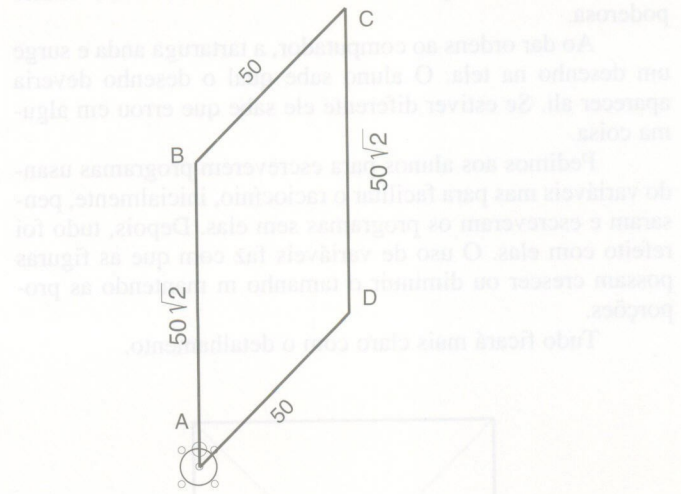
Nos 3 triângulos, que são semelhantes, iremos manter a posição inicial e o caminho, já pensando no próximo passo, quando introduzirmos as variáveis, assim poderá haver um único programa para os 3 triângulos.



Quadrado
QUA repita 4 [pf 50 pd 90]



Paralelogramo
PLL repita 2 [pf 50√2 pd 45 pf 50 pd 135]



Tendo-se escrito o programa que fará a tartaruga desenhar cada peça separadamente, vamos ao computador para testá-lo. Deve-se escrever, gravar e testar peça por peça. Devem ser feitas correções até que tudo funcione bem.

Devemos estabelecer algumas coisas a serem entregues ao professor, por que em contrário muitos tendem a ficar direto entre o pensar e o testar, sem ir para o caderno e o lápis e outros ficam somente olhando os colegas. Nós pedimos que cada grupo entregasse um conjunto de desenhos e programas e que cada aluno tivesse em seu caderno uma cópia do mesmo.

Tendo as peças em separado, passaremos a pensar na montagem delas. Há inúmeros meios para se unir as peças. Qualquer um deles é válido. Novamente devemos solicitar que cada grupo faça o desenho e indique a seqüência antes de ir ao computador. Deve-se poder para que entreguem este planejamento para garantir que o façam.

Também o programa que une as peças deve, depois de feito, ser testado no computador, corrigido e retestado, até ficar certo.

Pode-se colocar outras "brincadeiras" no meio do programa, tais como:

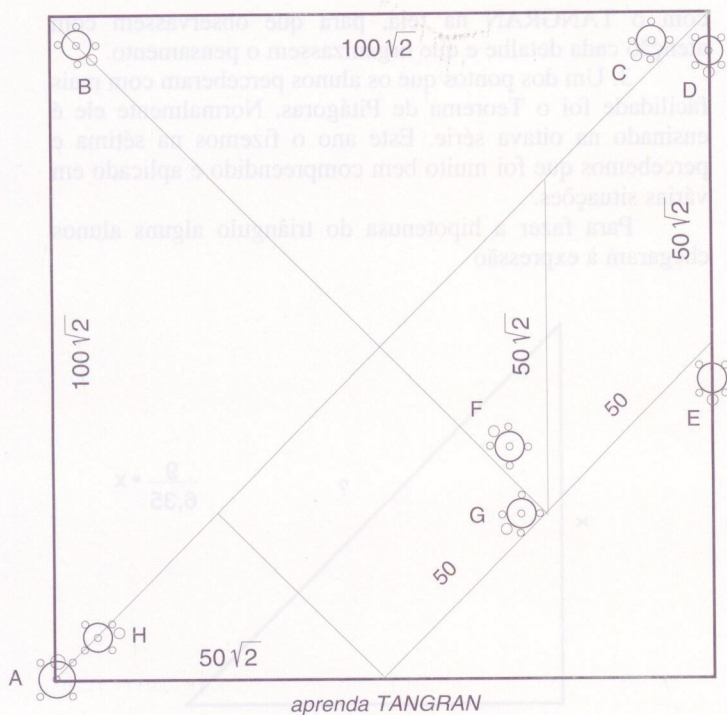
- mudanças de cores na linhas de contorno
- pintura das áreas das peças
- paradas
- etc....

Resolução com o uso de variáveis

A resolução usando variáveis é, em tudo, semelhante àquela sem variáveis.

Desenham-se as mesmas figuras mas colocam-se letras no lugar das medidas.

Para os triângulos podemos escrever:



pf $100\sqrt{2}$ pd 135 TRIG
 pe 45 pf $100\sqrt{2}$ pd 135 TRIG
 pe 45 PLL
 pf $50\sqrt{2}$ TRIM
 pe 45 pf 50 pd 90 TRIP
 pe 90 QUA
 pf 50 pd 45 pf $50\sqrt{2}$ pd 135 TRIP
 pe 45

fim

aprenda TRI: cateto
 pf: cateto pd 90
 pf: cateto pd 135
 pf (: cateto * rq 2) pd 135

fim

O nome da variável pode ser escolhido arbitrariamente. A tendência de muitos jovens neste ponto é usar 2 variáveis. Ficaria assim:

aprenda TRI : cateto: hipotenusa
 pf: cateto pd 90
 pf: cateto pd 135
 pf: hipotenusa pd 135

fim

Este programa pode dar certo também. Há porém a necessidade do usuário colocar valores de “cateto” e “hipotenusa” coerentes entre si. Quando se usa somente 1 variável isto não acontece. Para qualquer valor de cateto o desenho sai certo. As variáveis “cateto” e “hipotenusa” são dependentes. O conceito de dependência é um conceito profundo e de difícil apreensão. No 1ºano de faculdade, em Álge-

bra Linear se fala em “variáveis linearmente dependentes”. Aqui, de uma forma simplificada, este conceito se aplica e a prática mostra a utilidade do conceito.

Não se deve dizer ao aluno que o uso de 2 variáveis seja um erro. Deve-se sim, mostrar-lhe que:

- 1º Se forem colocados 2 números quaisquer o desenho *poderá* sair errado.
- 2º Há um conhecimento na mente do aluno que ele ainda não passou para a tartaruga.
- 3º A hipotenusa é dependente dos catetos.

O mesmo problema acontecerá com o paralelogramo:

aprenda PLL: v
 repita 2 [pf (:v * rq 2) pd 45 pf : v pd 135]

fim

e para terminar as peças, o procedimento do quadrado:

aprenda QUA: lado
 repita: 4 [pf: lado pd 90]

fim

Abaixo é apresentada a união das peças usando variáveis. Existem certos valores que serão usados diversas vezes e por isso vamos definir variáveis auxiliares para simplificar a escrita.

$$G = 100\sqrt{2} \quad M = 50\sqrt{2}$$

aprenda tangran: v
 coloque (2 *: v * rq 2) “G
 coloque (:v * rq 2) “M
 rg un mudapos [-200 -200] ul
 pf: G pd 135 TRI (2 *: :v)
 pe 45 pf: G pd 135 TRI (2 *: :v)
 pe 45 PLL: v
 pf: M TRI: M
 pe 45 pf: v pd 90 TRI : v
 pe 90 QUA: v
 pf: v pd 45 pf: M pd 135 TRI: v
 pe 45

fim

O próximo passo a ser dado pelos alunos será a montagem de uma outra figura usando as peças do TANGRAM e com variáveis. Esta outra figura será um trabalho individual, podendo no entanto cada aluno solicitar ajuda dos colegas ou do professor.

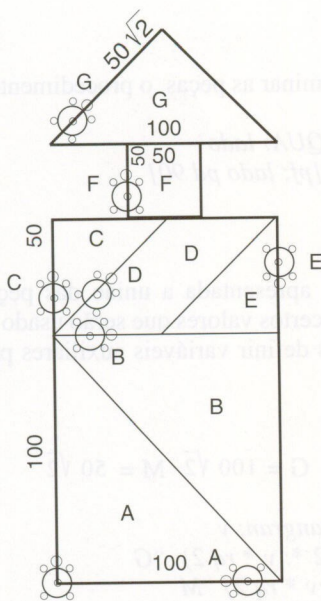
Desde a primeira aula deve, o professor falar aos alunos do objetivo final, que é este : montar uma figura *individualmente*, usando variáveis.

As figuras individuais podem ser obtidas de uma “biblioteca” de figuras que o professor fornece, ou pode ser inventada pelo aluno. Veja em anexo algumas figuras.

Exemplo de trabalho individual

aprenda **HOMEM** : v
 coloque (2 * : v * rq 2) "G
 coloque (:v * rq 2) "M
 coloque (2 * :v) "V2
 rg un mudapos [-200 -200] ul
 pe 90 pf 100 TRI : V2
 pe 45 pf : G pd 135 TRI : V2
 pe 90 TRI : v
 pd 45 PLL : v
 pf : M pd 45 pf :v pd 90 TRI : v
 pf : v pd 90 pt (:v / 2) pe 45 TRI : M
 un pe 45 pf (4 * : v)

fim

**COMENTÁRIOS DOS PROFESSORES**

Seguem aqui comentários feitos pelos professores a respeito de situações reais ocorridas em aula. Queremos com isto mostrar a riqueza e avariedade de conceitos que foi explorada com estas atividades.

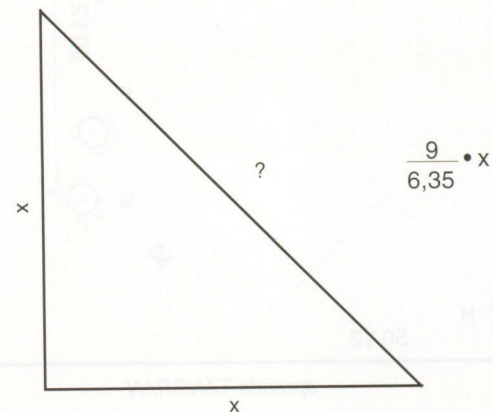
1. Depois de analisar perímetros e áreas com peças passou-se para a etapa de montar o quadrado com as peças recortadas (em papel). Uns tiveram facilidade, outros nem tanto então comentaram: Ah! mas parece tão simples, porque não estou conseguindo? Outros perceberam que se usassem o caminho inverso ao do recorte conseguiriam com rapidez remontar o quadrado.

2. Fazer os "aprenda" que desenhasssem as peças em separado não foi muito difícil. Ainda mais porque esta tarefa foi feita em grupo. Quando deviam montar o quadrado usando as peças porém a coisa se complicou. Pouco conseguiram! Algumas vezes os professores precisaram induzir os alunos, usando perguntas para que fossem concluindo passo a passo. Assim, com as peças recortadas sobre a mesa o professor poderia que comparecem aspectos do TANGRAM de papel,

com o TANGRAM na tela, para que observassem com atenção cada detalhe e que organizassem o pensamento.

3. Um dos pontos que os alunos perceberam com mais facilidade foi o Teorema de Pitágoras. Normalmente ele é ensinado na oitava série. Este ano o fizemos na sétima e percebemos que foi muito bem compreendido e aplicado em várias situações.

Para fazer a hipotenusa do triângulo alguns alunos chegaram à expressão



no lugar de $\sqrt{2} \cdot x$ que seria o correto.

Do ponto de vista prático, dá quase no mesmo. Mas imaginem quantas tentativas com outros números foram feitas até que se chegasse a esse número (6,35!). Eu penso que todo esse trabalho não é perdido. Se nas aulas seguintes o professor ou os colegas mostrarem que existe uma maneira mais fácil de se conseguir o resultado, o aluno dará atenção a isso. Digamos que depois de muito apanhar ele estará pronto para aceitar um raciocínio dedutivo, abstrato, formal.

5. Trigonometria

6. Ao brincar de TANGRAM desta forma, com LOGO, o aluno passa a associar o valor $\sqrt{2}$ ao triângulo retângulo de 45° . Depois, mais tarde, quando começar a ver trigonometria, e tiver que "decorar" que $\text{sen } 45^\circ = 1 / \sqrt{2}$ tudo ficará mais fácil.

7. Semelhança de Triângulos: como há vários (5) triângulos entre as peças do TANGRAM, e todos são semelhantes os alunos puderam perceber a semelhança e a congruência de triângulos e tirar vantagem disso. Quem percebeu que havia triângulos congruentes (a quase totalidade dos alunos) não precisou escrever 7 procedimentos, usou o mesmo para os triângulos congruentes. Economizou trabalho. Quem percebeu a semelhança entre os triângulos pequeno, médio e grande pode escrever um só "aprenda" para todos os 5 triângulos. Os professores falaram da congruência e da semelhança, mas é comum que as coisas faladas em sala, não sejam convertidas em ações úteis e práticas. Desta vez, que demorou a perceber os conceitos levou desvantagem, sofreu mais. Quem percebeu ficou contente por que pôde usar.

8. Os alunos mexeram muito com ângulos internos e externos. Com complementares e com suplementares, não com os nomes mas com os conceitos, usaram isto de fato. Cansaram de escrever 135° e associar este número a 45° .

Porque $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ e porque $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

9. Desenvolveram bastante a percepção visual de quanto é um ângulo de 45°. Pode-se dizer que hoje eles sentem isso.

10. Somas, subtrações, divisões e multiplicações foram feitas aos montes, com o sentimento da utilidade, porque eles precisavam dos resultados, e não porquê o professor mandou. Não haviam alguém a formular-lhes as expressões que deveriam ser retificadas. Eles mesmos se meteram em enrascadas que geraram expressões e que foram resolvidas. A validação de tudo isto, da montagem e da resolução das expressões foi dada por eles mesmos, na interação com o LOGO e seus desenhos. O próprio aluno percebe se está fazendo a coisa certa, olhando o desenho que sai na tela.

11. Números fracionários e irracionais aparecem e foram usados. Cada um com sua real significação.

12. Os conceitos de álgebra foram reforçados. Cada segmento do desenho via x , ou $2x$ ou outras quantidades. O x , para ser testado deveriam se tornar um número, definido. O mesmo desenho pode ser feito com vários números no lugar de x . Para cada valor o desenho sairá de um tamanho diferente.

CONCLUSÃO

A experiência foi muito boa e será repetida nos próximos anos.

