BRINCANDO, COLORINDO E APRENDENDO COM O CALEIDOSCÓPIO EQUILÁTERO EM PAVIMENTAÇÕES DE CONFIGURAÇÃO (3,3,3,3)

RESUMO

São apresentadas, neste trabalho, várias maneiras de se obter no caleidoscópio a pavimentação com réplicas congruentes do triângulo equilátero, visando à utilização de maior número de cores. Sugere-se a utilização de atividades educacionais correspondentes. Para facilitar o entendimento, o autor oferece uma introdução a caleidoscópios e pavimentações, situando o trabalho, cruzando com pesquisa maior, em realização.

(A) INTRODUÇÃO

A.1 Descrição e Conceito de Caleidoscópio

Um caleidoscópio é, em geral, um conjunto de três espelhos planos, perpendiculares a um mesmo plano, formando um prisma triangular e com as faces espelhadas para o interior. Uma das bases é fechada com papel claro, celulóide ou vegetal, para entrada de luminosidade no interior, e a outra base possui um orifício para observação.

No caleidoscópio são formadas imagens múltiplas, pois as obtidas num dos espelhos formam novas imagens nos outros dois, e assim sucessivamente.

O nome caleidoscópio foi dado por Sir David Brewster, em 1819, em seu livro "A Treatise on the Kaleidoscope".

Claudemir Murari*

* IGCE-UNESP - Rio Claro SP

Alguns autores, talvez baseados na própria etimologia da palavra (kalos=belo, eidos=formas e skopein=ver), utilizam o vocábulo também para dois espelhos, como se observa, por exemplo, em Alpaught (1) ou em Jacobs (8) p. 191-192, quando diz "our Kaleidoscope is made with two mirrors hingind together with tape", empregando-o para produzir polígonos regulares.

Caleidoscópios que fornecem repetições idênticas por novas reflexões (portanto coincidindo perfeitamente as imagens) são apenas de três tipos, conforme as suas bases triangulares sejam equiláteras, retangulares isósceles e retangulares escalenas; os dois últimos para ângulos especiais. Daí, as denominações: caleidoscópio equilátero, isósceles e escaleno.

As suas construções são de simples execução pelos professores ou pelos alunos, resultando o seu fácil emprego em várias atividades educacionais.

A.2 Pavimentação

Considerando num plano um polígono, encostando (justapondo) outros polígonos sucessivamente, mas tomando cuidado para que não haja superposição e para que não ocorram vazios, dizemos que se tem uma pavimentação parcial do plano por polígonos. Acrescentando polígonos indefinidamente (situação apenas ideal) diremos que se tem uma pavimentação do plano.

Quando todos os polígonos são congruentes, diz-se que a pavimentação do plano é monoedral. Para esta situação, porém, utilizando-se somente polígonos regulares, é bastante conhecido que só pavimentam o plano o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero, o que pode ser descoberto rapidamente por alunos dos primeiros anos escolares com trabalho experimental, e por alunos de outros níveis apenas com conhecimento de algumas propriedades relativas a ângulos.

Dizemos que essas três pavimentações são de configurações (4,4,4,4), (6,6,6) e (3,3,3,3,3,3), respectivamente; as quais correspondem a termos em cada vértice (ou nó) dos polígonos regulares, respectivamente, quatro quadrados, três hexágonos regulares e seis triângulos equiláteros.

Os outros polígonos regulares não pavimentam o plano, pois quando tentamos colocá-los ao redor de um ponto teremos ou superposição ou vazios no plano. Assim, por exemplo, para pentágonos regulares têm-se para três ao redor de um ponto 108 x 3 = 324 graus, não completando a volta que é de 360 graus, ocorrendo vazios; e com quatro obteríamos 108 x 4 = 432 graus, portanto, necessariamente, haveria superposição.

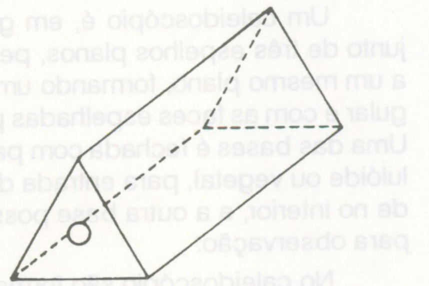
No caso de polígonos regulares de tipos diferentes, mas ainda congruentes entre si, os estudos revelam outros padrões, por exemplo aqueles de configurações (3,12,12), (4,8,8), (3,6,3,6) etc., com interpretações análogas.

O leitor interessado poderá encontrar estudos relativos em Grunbaum and Shepard (7) e provas completas em Barbosa (3).

Várias pavimentações planas com polígonos regulares podem ser obtidas nos caleidoscópios. Para isso, deverá ficar aberta a base oposta àquela do orifício, à qual se ajustarão bases substituíveis.

Essas bases substituíveis são triângulos correspondentes às bases dos caleidoscópios, geralmente feitas de material transparente, com construções gráficas de segmentos de reta adequados para que, na reflexão múltipla, forneçam a pavimentação desejada.

Construção do Caleidoscópio Equilátero: 3 lâminas retangulares de 6cm por 30 cm. Monte o caleidoscópio fixando as lâminas com durex ou fita crepe etc., mantendo os espelhos voltados para o interior. Envolva-o externamente com papel contact ou similar. Ver figuras abaixo.



caleidoscópio equilátero

fig. 1

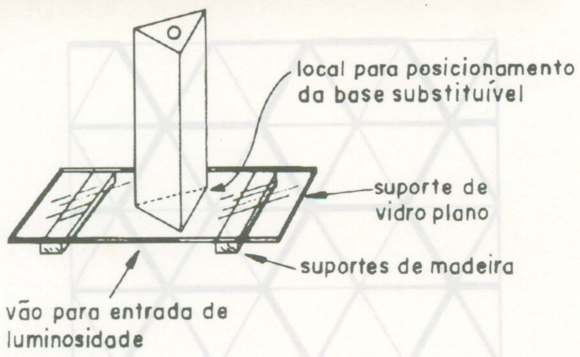


fig. 2

Essa possibilidade distingue perfeitamente o caleidoscópio educacional do caleidoscópio encontrado no comércio, que em geral é o equilátero, envolto por uma superfície cilíndrica, tendo numa das bases um cilindro onde se colocam alguns pequenos objetos coloridos, ao qual é possível dar movimentos rotatórios. Efetivamente, os fragmentos coloridos fornecem, da mesma maneira, reflexões múltiplas coincidentes, formando belas figuras, mas imprevisíveis e, em geral, face à tendência da disposição dos fragmentos essas figuras têm a forma de estrelados.

Ball and Coxeter (2) indicaram as pavimentações com polígonos regulares passíveis de serem obtidas nos caleidoscópios:

a) no equilátero (3,3,3,3,3,3) , (3,6,3,6) e (6,6,6)
b) no isósceles (4,4,4,4) e (4,8,8)
c) no escaleno: (3,3,3,3,3,3) ; (6,6,6) ; (3,6,3,6) ; (3,4,6,4) ; (4,6,12) e (3,12,12).

Portanto, temos oito configurações que podem ser obtidas nos caleidoscópios. Note-se, no entanto, que existem pavimentações do plano com outras configurações e até mesmo com combinação de configurações.

Observe-se, contudo, que a ordem numérica nas configurações é relevante. Assim, por exemplo, a pavimentação de configuração (3,6,3,6) deve ser entendida nessa ordem: triângulo, hexágono, triângulo e hexágono e a configuração (3,3,6,6), na ordem: triângulo, triângulo, hexágono e hexágono, a qual não pavimenta o plano.

Barbosa (op. cit.), no cap. 6, mostra como se obter no caleidoscópio equilátero todas as pavimentações obtidas no escaleno.

A.3 Colorações Múltiplas

Ao se construir uma base apropriada para determinada pavimentação, os segmentos empregados na construção gráfica determinam regiões. Colorindo-as diferentemente, a pavimentação obtida no caleidoscópio oferecerá visuais em que os polígonos-imagens dessas regiões terão essas mesmas cores.

Em Barbosa (op. cit.) são feitos alguns comentários não sistematizados sobre o uso de cores em certas bases substituíveis para caleidoscópios. Entretanto o próprio autor, por ocasião do III EPEM (1993), realizado em Bauru, volta ao assunto, dando destaque a este aspecto, ao apresentar uma nova base substituível para pavimentação de configuração (3, 4, 6, 4) no equilátero, que permite o uso de até 7 cores, quando a sua base anterior permitia apenas até 4 cores.

Dessa maneira, Barbosa introduz o problema de busca de colorações múltiplas, salientando a importância e vantagens de tal estudo.

A.4 O Problema

Neste trabalho, em particular, temos nos localizado no problema da descoberta de novas bases substituíveis para pavimentação do plano com triângulos equiláteros, portanto de configuração (3,3,3,3,3,3), que permitam colorações múltiplas com outros números de cores. Os resultados preliminares foram apresentados no I EEMRNP (10).

Este trabalho faz parte de um projeto maior em desenvolvimento sob a orientação do Prof.Dr. Ruy Madsen Barbosa sob o título geral "Busca de Pavimentações do Plano em Caleidoscópios com Colorações Múltiplas", do qual consta a obtenção de novas bases substituíveis para caleidoscópios equiláteros e isósceles que permitam maior variedade numérica de colorações para diversas configurações em pavimentações.

Pretende-se, com a pesquisa, fornecer material ao professor para realização de atividades educacionais nos aspectos de simetria e construções gométricas, ângulos de polígonos etc., bem como relativas à integração multidisciplinar entre as disciplinas de Matemática, Desenho Geométrico, Ciências (ótica geométrica) e Educação Artística. A construção e visualização dos mosaicos obtidos com colorações múltiplas permitem o desenvolvimento do senso estético e estudo de contrastes e harmonia de cores, fundamentalmente.

A escolha da configuração (3,3,3,3,3,3) baseou-se, principalmente, no fato de que, além de ser de pavimentação monoedral, as bases existentes na literatura se resumem a apenas duas: uma decorrente da própria forma do caleidoscópio equilátero com a qual todos os triângulos da pavimentação aparecem no visual com uma só cor, a outra apenas possibilita o uso de duas cores.

(B) BASES PARA A CONFIGURAÇÃO (3,3,3,3,3,3) NO CALEIDOSCÓPIO EQUILÁTERO

B.1 Bases Existentes

Pelo que observamos existem até o momento, bases que fornecem possibilidade de uso de número reduzido de cores:

a) uma cor ou lados com 3 cores

Descrição: basta construirmos os lados da base com traços contínuos grossos, mas usando 3 cores, respectivamente, para os lados (fig.3).Obtém-se a pavimentação conforme a figura 4.

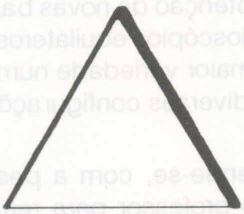


fig. 3

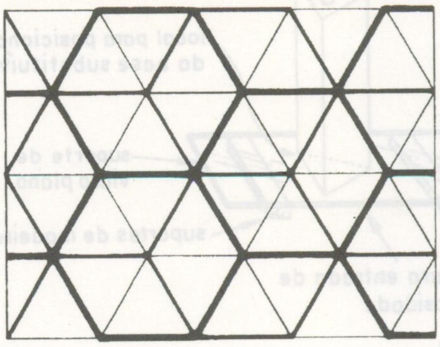


fig. 4

Comentário: uma atividade imediata emerge, que é a de construção gráfica da pavimentação, realizando as simetrias reflexionais, respeitando as cores dos lados.

b) duas cores

Descrição: basta construirmos uma das mediatrizes do triângulo-base; a mediatriz formará duas regiões, de onde segue que podemos colorir com 2 cores, aqui indicadas por A e B (fig. 5). Observe nessa figura que temos indicado os lados do triângulo-base apenas com linha interrompida, desde que eles são apenas auxiliares, não devem aparecer. O visual no caleidoscópio é da fig. 6, onde se observa a alternância das cores no mosaico obtido.

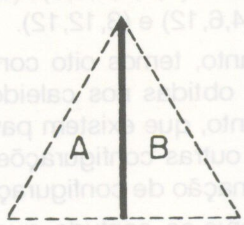


fig.5

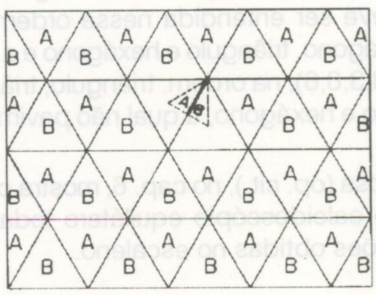


fig. 6

B.2 Novas Bases

a) base para até 4 cores. Construção: traçam-se os segmentos de retas dos três pontos médios e os segmentos dos três lados do triângulo base. Veja que agora os lados do triângulo devem aparecer. Tal construção gráfica determina 4 regiões, permitindo, portanto, o uso de até 4 cores, aqui indicadas por A, B, C e D (fig. 7). A escolha dessas cores inicialmente será a critério do professor que preparará a base-exemplo. O visual obtido no caleidoscópio é o indicado na fig. 8, onde se observa:

Nós: 3 tipos com 3 cores ao redor, sendo que duas delas aparecem contíguas e uma oposta. São das formas:

C, C, B, D, D, B ;

A, A, B, C, C, B ;

A, A, B, D, D, B

3 tipos com uma só cor. São das formas

A, A, A, A, A, A ;

C, C, C, C, C, C ;

D, D, D, D, D, D

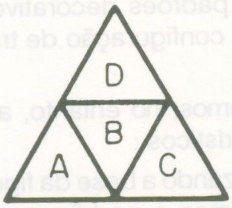


fig. 7

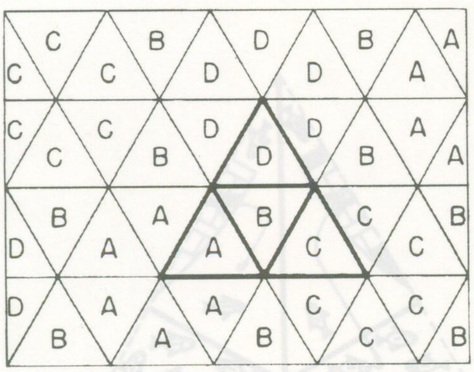


fig. 8

Observação: Esta base tem o inconveniente de obrigar que as cores **A, C** e **D** sejam claras, pois poderão, em contrário, aparentar hexágonos regulares na visualização do caleidoscópio.

Atividade: Também aqui poderão ser organizadas atividades análogas de construção gráfica que consistirão, a partir do desenho da base, na obtenção das cores correspondentes por simetrias reflexionais. Algumas atividades poderiam ser organizadas com o professor de Educação Artística, no que concerne à escolha de outras cores para **A, B, C** e **D. Tais professores** analisariam com os alunos aspectos de contraste e harmonia.

Transformação: Esta base pode ser transformada em bases que permitem o uso de maior número de cores, como até 16 cores, 64 cores etc., cujas subdivisões são de fácil descoberta pelos alunos em atividades a serem propostas pelo professor.

É interessante observar que o professor poderia realizar uma outra atividade com respeito à sucessão de bases quanto ao número de cores, explorando a sequência de números 4, 16, 64, ..., em progressão geométrica, abrindo outras explorações educacionais.

b) Nova base para até 4 cores

Construção: Traça-se a bissetriz de um ângulo da base triangular.Baixa-se perpendiculares aos lados pelo ponto médio. Ficam formadas 4 regiões (fig. 9), as quais possibilitam, portanto, o uso de 4 cores que indicamos com **A,B,C** e D.

O visual no caleidoscópio é o mostrado na fig. 10, onde se observa:

Nós: um tipo com 2 cores alternadas ao redor: B, C, B, C, B, C. Um tipo com 4 cores, onde os triângulos opostos possuem cores distintas, mas 2 cores aparecem repetidas **A, B, C, D, C, B**.

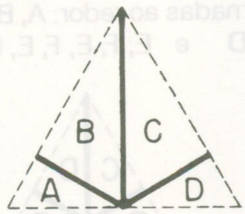


fig. 9

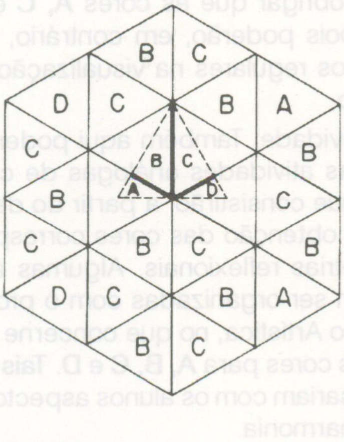


fig. 10

Transformação: Esta base pode ser transformada em bases que permitem até 10 cores (fig. 11), até 30 cores (fig. 12), até 102 cores etc., para cuja sucessão é interessante determinar-se um processo ou uma fórmula correspondente para os números sucessivos de cores.

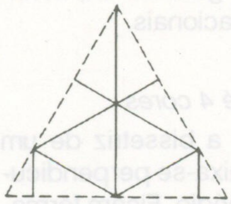


fig. 11

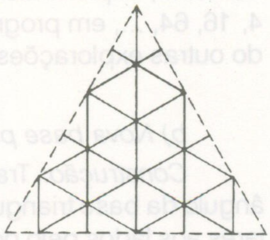


fig. 12

c) Base para até 6 cores

Construção: traçam-se as 3 bissetrizes (no caso também mediatrizes). Ficam formadas 6 regiões que possibilitam o uso de até 6 cores, que indicamos com A, B, C, D, E e F (fig. 13).

Observa-se no visual do caleidoscópio um mosaico como o da fig. 14, onde se nota: Nós: -Um tipo com 6 cores distintas. -Três tipos com 2 cores alternadas ao redor: A, B, A, B, A, B, C, D, C, D, C, D e E, F, E, F, E, F

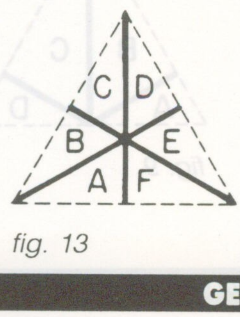


fig. 13

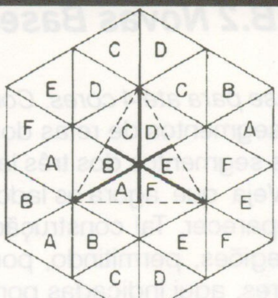


fig. 14

Transformação: Esta base também pode ser transformada em bases que permitem a utilização de até 18 cores, até 60 cores etc.

(C) ALGUMAS ILUSTRAÇÕES DECORATIVAS

É claro que qualquer ilustração decorativa, desenhada numa das regiões da base, fornecerá no caleidoscópio equilátero interessantes e belos padrões decorativos com suporte referencial à configuração de triângulos equiláteros.

Daremos, no entanto, apenas 3 exemplos característicos :

1. Utilizando a base da figura 9, por exemplo, construímos o padrão que denominamos "pescaria", apresentado na figura 15, com o qual se obtém no caleidoscópio o visual indicado na figura 16.

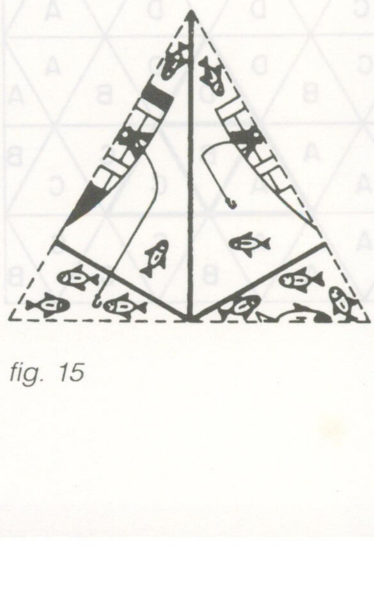


fig. 15

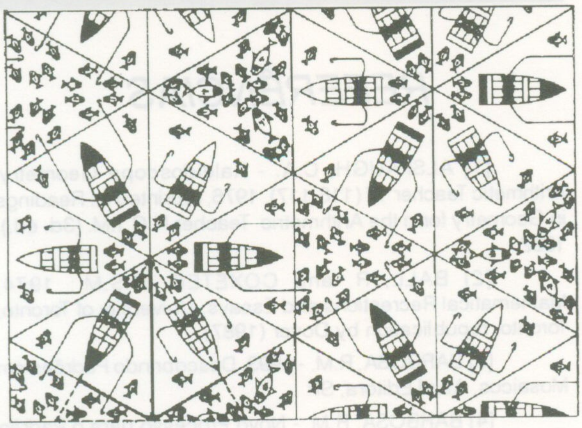


fig. 16

2. Jacobs (9), p. 227, fornece o trabalho de M.C. Escher, de 1959, intitulado "Flatfish", tendo por suporte a pavimentação de configuração (3,3,3,3,3,3), que reproduzimos na figura 17. Este trabalho também encontramos em Giftwraps by Artists: M.C. Escher da Harry N. Abrams, N.Y.

Usando a base dada em (B. 1. a), poderemos empregar 3 cores (figura 18). Entretanto, usando a base dada em (B. 2. a), o "Flatfish" poderá apresentar 9 cores no visual do caleidoscópio (figuras 19 e 20).

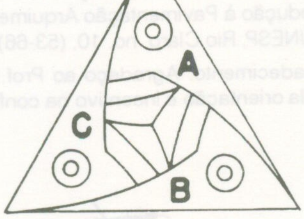


fig. 17

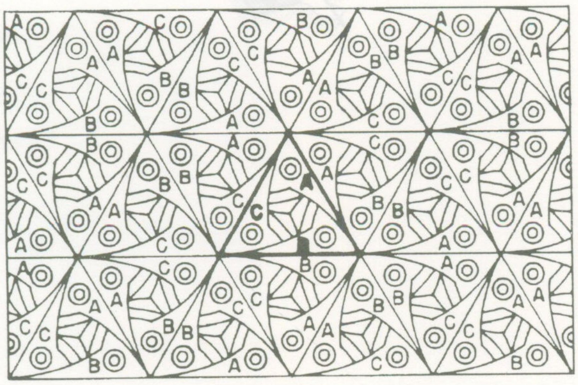


fig. 18

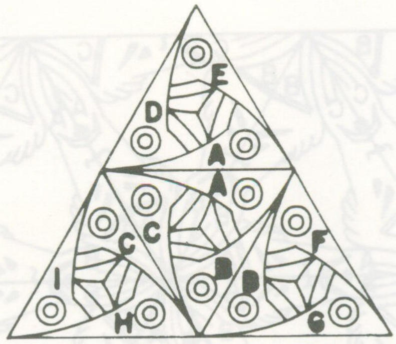


fig. 19

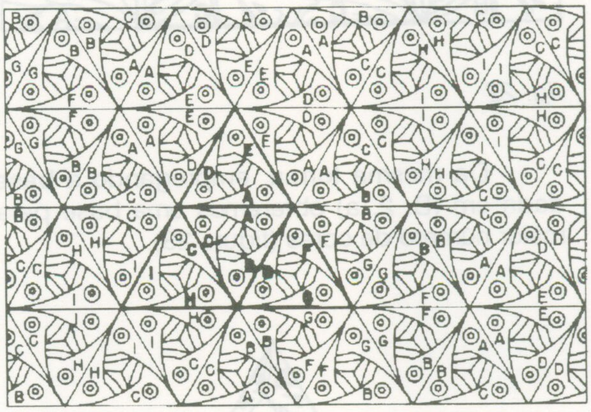


fig. 20

3. Em Barbosa (op. cit.), p. 63, é dado o padrão que denomina "mandarins chineses", para o qual podemos usar, por exemplo, 3 cores para o chapéu e as mesmas 3 para a barba, conforme a figura 21, obtendo-se o visual da figura 22.

fig. 21

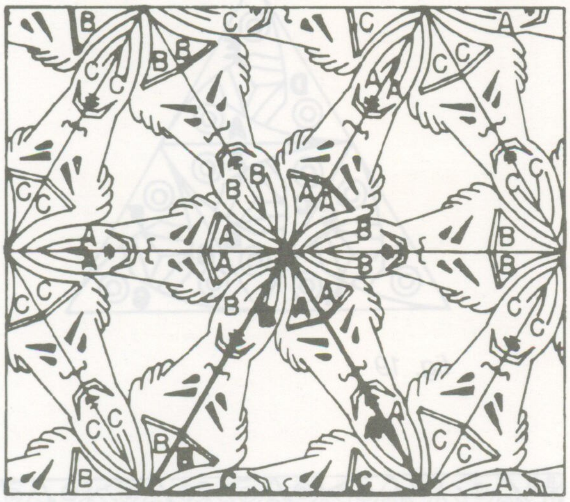


fig. 22

Da mesma forma, empregando a base dada em (B. 2. a) obteremos uma base para maior número de cores (figura 23).

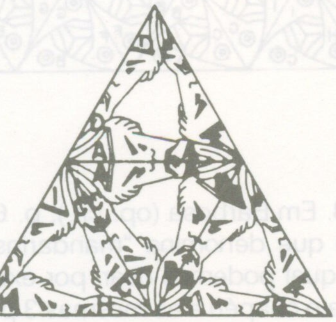


fig. 23

Conclusão: o leitor verificará neste texto que a aplicabilidade educacional dos caleidoscópios é bastante grande como é, em particular, este estudo de configuração (3,3,3,3,3,3). O seu uso não está limitado a uma especial série do 1o. ou 2o. grau, pois depende apenas do conhecimento prévio que se pretende explorar ou introduzir. É claro que trabalhos de simetria com um só espelho ou dois são recomendáveis preliminarmente.

REFERÊNCIAS

[1] ALSPAUGH, C.A. - Kaleidoscope Geometry. Arithmetic Teacher 17 (116-117), 1976, reprinted in: Readings in Geometry form the Arithmetric Teacher N.C.T.M. (3d. ed.), 1982.

[2] BALL, R. and COXETER, H.S.M.; 1974, Mathematical Recreations and Essays, University of Toronto, Toronto, republication by Dover (1987).

[3] BARBOSA, R.M. - 1993, Descobrindo Padrões em Mosaicos, Atual Editora, SP.

[4] BARBOSA, R.M. - Novo Processo para o Padrão de Polígonos Regulares de Configuração (3,4,6,4) no Caleidoscópio Equilátero. Comunicação ao III EPEM, Bauru, Anais, UNESP/SBEM, 1993, p. 71.

[5] BARBOSA, R.M. - "Mosaicos em Caleidoscópios: Colorações Múltiplas" (Notas/Mini-Curso) - I EEMRNP, FIRP/SBEM, São José do Rio Preto, 1994.

[6] DAFER, G. O'PHARES and CLEMENS, R. STANLEY - 1977, Geometry: An Investigative Approach - Addison Wesley, Menlo Park.

[7] GRUNBAUM, B. and SHEPHARD, G. - 1987, Tilings and Patterns, Freeman, N.Y.

[8] JACOBS, H.R. - 1970 Mathematics: A Human Endeavor, Freeman, S. Francisco, 1970.

[9] JACOBS, H.R. - 1974, Geometry, Freeman, N.Y., 1974.

[10] MURARI, C. - "Pavimentação de Configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3) no Caleidoscópio Equilátero com Colorações Múltiplas", Comunicação no I EEMRNP, FIRP/SBEM, São José do Rio Preto, 1994, Resumo, p. 3.

[11] SILVA, E.A.; LOURENÇO, M.L. e MARTINS, L.C. - "Uma Introdução à Pavimentação Arquimediana do Plano", BOLEMA, UNESP, Rio Claro, no. 10, (53-66), 1994.

Agradecimento: Agradeço ao Prof.Dr. Ruy Madsen Barbosa pela orientação e incentivo na confecção deste trabalho.