Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE O CAPÍTULO XXV *DA DE DIVINA PROPORTIONE* (1509) DE LUCA PACIOLI (1447-1517)

A study about the chapter XXV of *De Divina Proportione* (1509) by Luca Pacioli (1447-1517)

Alison Sousa da **SILVA**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
alisonsilva1803@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3634-6455

Ana Carolina Costa **PEREIRA**
Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
carolina.pereira@uece.br
http://orcid.org/0000-0002-3819-2381

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

O presente estudo trata-se de um recorte da pesquisa de mestrado em andamento e tem por objetivo apresentar a definição de corpos regulares adotada pelo frade italiano Luca Pacioli (1447-1517) em seu tratado intitulado *De Divina Proportione*, publicado em 1509, listando alguns casos considerados possíveis e impossíveis perante as condições descritas pelo autor. Na intenção de colaborar no ensino de Geometria Espacial sobre os corpos regulares, este estudo traz alguns detalhes acerca da definição utilizada pelo frade, elencando características relevantes e exemplos de situações trazidos no tratado. Percebendo, através desse estudo, que o ensino sobre corpos regulares através das propriedades citadas por Luca Pacioli pode contribuir na compreensão de conceitos sobre essa temática, idealiza-se como passos seguintes a realização de ações que contribuam na formação de professores de matemática e, consequentemente, de seus alunos da Educação Básica.

Palavras-chave: Poliedros regulares, Luca Pacioli*, De Divina Proportione*, Geometria Espacial, História da Matemática.

ABSTRACT

The present study is an excerpt of the master's research in progress and aims to present the definition of regular bodies adopted by the Italian friar Luca Pacioli (1447-1517) in his treatise entitled *De Divina Proportione*, published in 1509, listing some cases considered possible and impossible under the conditions described by the author. With the intention of collaborating in the teaching of Spatial Geometry on regular bodies, this study brings some details about the definition used by the friar, listing relevant characteristics and examples of situations brought up in the treatise. Realizing, through this study, that teaching about regular bodies through the properties cited by Luca Pacioli can contribute to the understanding of concepts on this theme, it is idealized to carry out a the following steps are idealized to carry out actions that contribute to the training of mathematics teachers and, consequently, of their students of Basic Education.

Keywords: Regular polyhedra, Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, Spatial Geometry, History of Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Conteúdos sobre os corpos regulares são abordados no ensino de Geometria Espacial tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior. Seja através do conceito, das propriedades individuais ou comuns, ou ainda de situações que envolvam o cotidiano dos discentes, esses conteúdos fazem parte da grade curricular de formação de ambos os níveis (Brasil, 2001; 2018).

Nessa vertente, a incorporação da história da matemática ao ensino se configura como uma alternativa válida tanto da educação básica quanto na formação do professor de matemática (inicial e continuada). Essa interação, por proporcionar a execução de atividades dentro da interface entre história e ensino de matemática[1], acarreta uma educação contextualizada de acordo com as atuais tendências da proposta pelos guias curriculares[2].

O estudo aqui apresentado está ancorado numa proposta que pretende aproximar dois campos de conhecimento, a história da matemática e a educação matemática, com o intuito de construir interfaces entre história e ensino. (Pereira & Saito, 2019a). Nesse sentido, é utilizada uma vertente historiográfica atualizada para a escrita da pesquisa, almejando uma reflexão sobre o processo histórico da formação do conceito matemático, que, nesse caso, está relacionado com a definição de corpos regulares.

Ainda segundo Pereira e Saito (2019b, p. 346) essa interface inicia-se “a partir de um diálogo entre pesquisadores desses dois campos de conhecimentos, o historiador e o educador matemático”, o qual, segundo Saito (2015), tem por base um documento histórico[3]. Para os autores:

> a utilização de textos históricos é fundamental para a realização dos estudos que culminam nas atividades para a sala de aula. Para tanto, é preciso ter cautela ao utilizá-los em sala de aula, pois seu uso está condicionado à leitura, à interpretação e à incorporação no ensino de matemática, o que demanda tempo e dedicação, visto que requer uma compreensão detalhada do contexto em que foram escritos (Pereira & Saito, 2019b, p. 345).

Dentre os textos históricos (documentos) que trazem o conceito de corpos regulares, encontramos o tratado do frade italiano Luca Pacioli (1447-1517), intitulado *De*

[1] Para maiores explicações vide: Pereira e Saito (2019a, 2019b); Saito e Pereira (2019); Saito e Dias (2013).
[2] Como guias curriculares nos referimos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).
[3] Entende-se como documento histórico “não só livros e tratados, mas também cartas, manuscritos, minutas e outros documentos não só escritos, mas também aqueles da cultura material, tais como instrumentos, monumentos, máquinas etc.” (Saito, 2015, p. 27).

Divina Proportione e publicado em 1509. Esse documento traz à tona uma característica pouco usual no ensino desse conceito: o emprego dos ângulos sólidos e ângulos superficiais. Tal conhecimento é apresentado, também, na obra de Euclides, *Os Elementos*, a qual serve como base para se compreender os escritos de Luca Pacioli.

Nessa busca de construir uma interface entre história e ensino de matemática, dois movimentos são realizados: a contextualização histórica dos conhecimentos matemáticos descrito no tratado; e movimento do pensamento na formação do conceito matemático. O primeiro mencionado, requer o estudo de três esferas de análise: contextual, historiografia e epistemológica (Beltran, Saito & Trindade, 2014). O segundo movimento

> trata-se de buscar no processo histórico o movimento do pensamento da apreensão do objeto e, portanto, do desenvolvimento do conceito. Esse movimento, que tem por pressuposto o objeto matemático em formação, permite que a formação de ideias componha a lógica do movimento do pensamento. Contudo, para que o lógico não prevaleça sobre o epistemológico e os fundamentos da matemática sobre a própria matemática e suas aplicações, prima-se na construção da interface a busca pelo contexto de formação desses objetos, evitando-se anacronismos e a sobreposição de temas históricas aos propósitos do ensino. (Pereira & Saito, 2018, p. 4).

Nesse estudo, o foco está na esfera epistemológica do primeiro movimento, buscando algumas "características de ordem matemática, técnica e epistemológica como propõe uma historiografia contemporânea" (Pereira & Saito, 2018, p. 113).

Diante do exposto, o presente artigo busca apresentar a definição de corpos regulares adotada por Luca Pacioli em *De Divina Proportione,* demonstrando e exemplificando cada uma das situações descritas no capítulo XXV. Para tanto, utilizamos como fonte principal a versão de Bertato (2010), que consiste na tradução da obra original para o português brasileiro.

Por se tratar de um recorte de uma pesquisa de mestrado ainda em desenvolvimento, nos limitaremos a abordar apenas os aspectos matemáticos relacionados ao estudo presente em *De Divina Proportione*, a fim de mostrar que, apesar de pouco utilizada, a definição de corpos regulares através dos ângulos sólidos e superficiais pode ser empregada no ensino de Geometria Espacial nos níveis de ensino anteriormente citados.

No presente estudo, aplica-se a pesquisa qualitativa documental, que trata de materiais que não tenham sido analisados de maneira correlata à estudos a serem desenvolvidos, ou seja, o estudo documental "consiste num intenso e amplo exame de diversos materiais que ainda não sofreram nenhum trabalho de análise, ou que podem ser reexaminados, buscando-se outras interpretações ou informações complementares, chamados de documentos" (Kripka, Scheller & Bonotto, 2015, p. 244). Para tanto, conforme explicitado anteriormente, o estudo se baseia nos escritos de Luca Pacioli em seu tratado, *De Divina Proportione.*

No que se segue, o estudo encontra se dividido em duas seções, das quais a primeira apresenta algumas características pertinentes à *De Divina* Proportione, enquanto a segunda define e discute o conceito encontrado no capítulo XXV do mesmo tratado, bem como aborda os exemplos citados, demonstrando-os em uma linguagem mais compreensível do que a encontrada nos escritos de Luca Pacioli.

2 O TRATADO *DE DIVINA PROPORTIONE*, DE LUCA PACIOLI

Dedicado ao duque de Milão, Ludovico Sforza, o tratado *De Divina Proportione* foi escrito pelo frade italiano Luca Pacioli em 1498, sendo publicado na cidade de Veneza no ano de 1509 por Paganino e Alessandro Paganini. Em seu conteúdo, além dos textos de Luca Pacioli, encontram-se também desenhos feitos por Leonardo da Vinci (1452-1519), amigo do frade.

Em sua totalidade, a versão de 1509 do tratado consiste em três partes, das quais a primeira, composta por 71 capítulos, é dedicada a estudos referentes à divina proporção, a segunda consiste em um tratado de arquitetura com base nos estudos de Vitruvius, e a terceira apresenta uma tradução de *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, de Piero della Francesca.

Em meio aos capítulos da primeira parte do tratado, encontram-se conhecimentos pertinentes aos corpos regulares, baseados na obra de Platão, *Timeu*. Entre os capítulos XXV e LII, Luca Pacioli se dedica a conceituá-los, construí-los em sua forma usual e, também, em formas variadas, além de apresentar propriedades individuais e comuns entre os corpos.

Na seção seguinte, são apresentados o conceito de corpos regulares abordado por Luca Pacioli e a demonstração da existência de apenas cinco desses corpos, com base nos conceitos de ângulos superficiais e ângulos sólidos advindos da obra de Euclides (2009).

3 O CONCEITO DE CORPOS REGULARES EM *DE DIVINA PROPORTIONE*

No capítulo XXV de seu tratado, Luca Pacioli trata de concepções matemáticas acerca da existência de apenas cinco corpos regulares, apresentando uma justificativa embasada na relação entre os chamados ângulos superficiais ou planos e os ângulos sólidos. A fim de melhor compreender o conceito de corpos regulares presente em *De Divina Proportione*, seguem as definições de ângulo superficial e de ângulo sólido encontradas em Os Elementos de Euclides.

Dentre as definições presentes no livro I de Os Elementos, na oitava o ângulo superficial, chamado na obra de ângulo plano, é enunciado como "[...] a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta" (Euclides, 2009, p. 97). Em uma situação que seja conveniente ao caso dos corpos regulares, pode-se entender que o ângulo superficial é cada ângulo interno das faces do corpo. Já a décima primeira definição do livro XI, da mesma obra, se refere a ângulo sólido como

> [...] a inclinação por mais de duas retas que se tocam e que não estão na mesma superfície, relativamente a todas as retas. De outro modo: o ângulo sólido é o contido por mais de dois ângulos planos, que não estão no mesmo plano, construídos em um ponto (Euclides, 2009, p. 482).

Assim, também numa situação que envolve os corpos regulares, entende-se que o ângulo sólido se trata do concurso dos ângulos superficiais em um mesmo vértice.

Nas palavras de Pacioli (2010, p. 28), os corpos regulares são definidos como "aqueles cujas bases são iguais entre si e de ângulos sólidos e planos iguais e, similarmente, de lados iguais". Nota-se no excerto que há uma relação com bases e lados do corpo. Em termos da matemática atual, entende-se que as bases são o que se conhece como as faces do corpo regular e os lados, suas arestas.

De posse desses conhecimentos, Luca Pacioli aborda ainda no capítulo XXV de *De Divina Proportione* os casos pertinentes às condições dadas, a saber: o hexágono regular e as figuras regulares com mais que seis lados, o pentágono regular, o quadrado e o triângulo regular.

4 GARANTINDO A EXISTÊNCIA DE APENAS CINCO CORPOS REGULARES

Na continuidade do capítulo XXV, Pacioli (2010) apresenta, com exemplos, alguns casos para a construção, ou não, de ângulos sólidos a partir de ângulos superficiais de polígonos regulares, iniciando com o hexágono e uma generalização para polígonos com mais que seis lados, e, em seguida, os casos do pentágono, do quadrado e do triângulo.

Na demonstração de cada um dos casos, estão inseridas algumas figuras produzidas com o auxílio do *software* GeoGebra para que, conservando as propriedades matemáticas descritas por Luca Pacioli, o leitor compreenda facilmente as situações apresentadas.

4.1 O caso das figuras regulares com seis ou mais lados

No que se refere à situação que envolve figuras regulares com seis ou mais lados, Pacioli (2010, p. 28) a descreve citando o caso dos hexágonos regulares como exemplo inicial e generalizando para as figuras com mais lados, conforme se segue:

> [...] visto que três ângulos de cada hexágono eqüilátero são iguais a quatro ângulos retos e, ademais, no heptágono, isto é, figura de sete lados, e em geral em toda figura eqüilátera e também eqüiângula de mais lados, três ângulos são sempre maiores que quatro retos, tal como se apresenta evidentemente na trigésima segunda do primeiro, e cada ângulo sólido é menor que quatro ângulos retos, como atesta a vigésima primeira do décimo primeiro.

No caso mínimo anteriormente citado por Pacioli (2010), isto é, o hexágono regular, cujos ângulos internos medem 120°, a soma de três deles será igual a 360° (Figura 1). Algebricamente, sejam α, β e γ ângulos internos de três hexágonos regulares distintos. Sabendo que esses ângulos têm medida igual a 120°, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 120^\circ = 360^\circ \qquad (1),$$

o que contraria a condição estabelecida na 21ª proposição do livro XI de *Os Elementos*: "Todo ângulo sólido é contido por ângulos menores do que quatro retos[4]" (Euclides, 2009, p. 499). Dessa forma, entende-se que a concorrência dessas três faces se daria no plano,

[4] A demonstração dessa proposição encontra-se em Euclides (2009, p. 499).

sem que seja possível a construção tridimensional do corpo proposto. No que se refere à concorrência de mais que três faces, é impossível fazê-la, haja vista que não há espaço algum para a inclusão de, pelo menos, mais uma face.

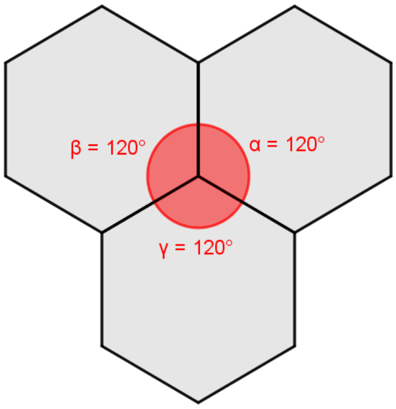

Figura 1: Ângulos superficiais de três hexágonos
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Analogamente, as situações que envolvem figuras com mais que seis lados, por construção, também contrariam a 21ª proposição do livro XI, haja vista que os ângulos internos dessas figuras terão medida maior que 120° e, consequentemente, a soma de pelo menos três deles será superior a 360°, sendo impossível uma construção que ilustre tal situação.

Diante dessas condições, Pacioli (2010, p 28) afirma que:

> [...] é impossível que três ângulos do hexágono, do heptágono e, em geral, de qualquer figura de mais lados eqüilátera e também equiângula formem um ângulo sólido. Por isso se manifesta que nenhuma figura sólida eqüilátera e de ângulos iguais não se pode formar a partir de superfícies hexagonais ou, verdadeiramente, de mais lados, pois se três ângulos do hexágono eqüilátero e eqüiângulo são maiores que um ângulo sólido, segue que quatro ou mais, com mais razão, excederão o dito ângulo sólido.

Portanto, conclui-se que não é possível formar corpo regular algum com faces que tenham seis ou mais lados, nem pela concorrência de três ângulos superficiais, tampouco pela concorrência de mais deles.

4.2 O corpo de faces pentagonais

Prosseguindo com os casos, Pacioli (2010, p. 29) aborda, então, a situação que envolve os pentágonos regulares. Em suas palavras, cita que:

> [...] três ângulos do pentágono eqüilátero e eqüiângulo é manifesto que são menores que quatro ângulos retos e quatro são maiores que quatro retos. Donde, com três ângulos de um pentágono eqüilátero e eqüiângulo pode-se formar o ângulo sólido, porém, com quatro de seus ângulos, ou com mais, não é possível formar ângulo sólido.

Nesta situação, é possível a concorrência de, no mínimo, três ângulos superficiais (Figura 2), pois sendo a medida de cada ângulo interno de um pentágono regular igual a 108°, a soma resulta em 324°, isto é, um valor abaixo de quatro ângulos retos. Algebricamente, sejam α, β e γ ângulos internos de três pentágonos regulares distintos. Sabendo que esses ângulos têm medida igual a 108°, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 108° = 324° \quad (2).$$

Sendo o resultado de tal soma inferior a condição estabelecida por Euclides (2009) anteriormente citada, então é possível que se formem ângulos sólidos com três faces pentagonais convergentes em um mesmo vértice.

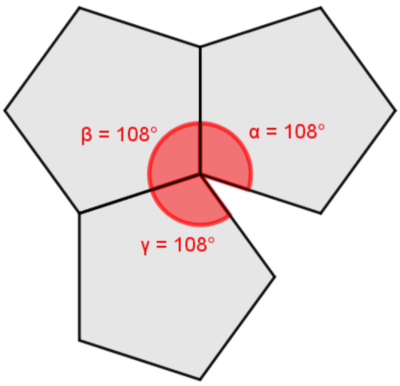

Figura 2: Ângulos superficiais de três pentágonos
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Porém, se tentada a convergência de quatro faces, a soma das medidas dos ângulos internos extrapolaria a condição de Euclides (2009). Algebricamente, considerando a situação descrita anteriormente e acrescentando-se a medida de δ, o ângulo interno de um quarto pentágono regular, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 \cdot 108° = 432° \quad (3),$$

contrariando a 21ª proposição do livro XI.

Assim, Pacioli (2010, p. 29) prossegue, concluindo que:

> Portanto, somente um corpo pode ser formado com pentágonos eqüiláteros e eqüiângulos, o qual é chamado dodecaedro ou, de outra maneira, corpo de doze pentágonos, pelos filósofos. Neste, os ângulos dos pentágonos, três a três, formam e contêm todos os ângulos sólidos do dito corpo.

Em outras palavras, a única possibilidade de combinação possível entre pentágonos regulares ocorre entre três deles em cada vértice, sendo possível formar apenas um corpo regular dada essa condição: o dodecaedro (Figura 3).

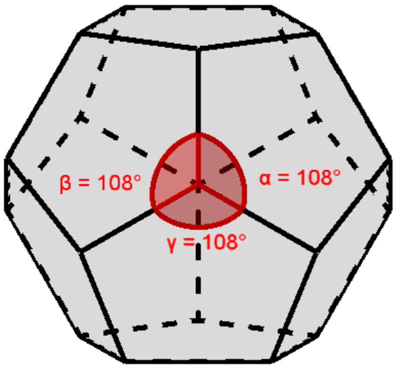

Figura 3: Ângulos superficiais em um vértice do dodecaedro
Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Na figura 3, são destacados os ângulos superficiais α, β e γ, internos de três pentágonos regulares distintos, formando em um mesmo vértice um dos ângulos sólidos do dodecaedro.

4.3 O corpo de faces quadradas

Na continuidade do capítulo XXV, Pacioli (2010, p. 29) se refere, também, ao corpo de faces quadriláteras de lados e ângulos iguais, isto é, o corpo de faces quadradas. Segundo ele:

> A mesma razão se dá nas figuras quadriláteras de lados e ângulos iguais, como foi dito para os pentágonos, pois toda figura quadrilátera, se for eqüilátera e também de ângulos iguais, por definição será quadrada, porque todos os seus ângulos serão retos, como se mostra pela trigésima segunda do primeiro. Donde, com três ângulos de tal figura superficial é possível formar um ângulo sólido, mas com quatro ou mais deles é impossível.

Nas palavras do frade, ao se promover a concorrência de, no mínimo, três faces quadradas (Figura 4), o caso é possível, pois, sabendo que cada ângulo superficial mede exatamente 90°, temos que a soma será igual a 270°, dentro da condição estabelecida por Euclides (2009). Algebricamente, considerando α, β e γ os ângulos internos de três quadrados distintos e sabendo que os três têm medida igual a 90°, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ \quad (4).$$

Tal resultado está em total acordo com a 21ª proposição do livro XI de Euclides (2009), possibilitando, então a construção de um ângulo sólido.

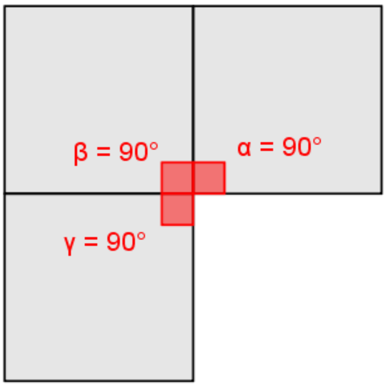

Figura 4: Ângulos superficiais de três quadrados
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Em contrapartida, o caso para quatro ou mais ângulos superficiais não é possível, pois a soma de quatro desses ângulos resulta em 360°, retornando ao caso da planificação (similar ao caso de possíveis faces hexagonais). Em termos algébricos, considerando a situação anterior e acrescentando-se a medida de δ, o ângulo interno de um quarto quadrado, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 \cdot 90^\circ = 360^\circ \quad (5),$$

contrariando a proposição de Euclides (2009).

Então, Pacioli (2010, p. 29) conclui a situação das faces quadradas afirmando que:

> Por isso, com tais figuras superficiais, sabendo que são quadriláteros eqüiláteros e de ângulos iguais, pode-se formar um sólido, a que chamamos cubo e que é um corpo contido por seis superfícies quadradas e tem doze lados e oito ângulos sólidos.

Isto é, assim como a situação dos pentágonos regulares, só é possível a concorrência de três faces quadradas por vértice de modo que se obtenham ângulos sólidos, dando origem a um único corpo regular: o cubo (Figura 5), também chamado de hexaedro regular.

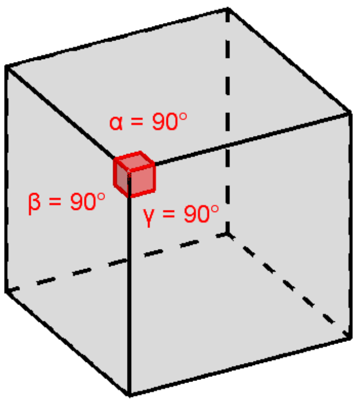

Figura 5: Ângulos superficiais em um vértice do cubo
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Na figura 5, são destacados os ângulos superficiais α, β e γ, internos de três quadrados distintos, formando, em um mesmo vértice, um dos ângulos sólidos do cubo, conforme descrito por Pacioli (2010) no capítulo XXV de sua obra.

4.4 Os corpos de faces triangulares

No que se refere às faces triangulares, as quais devem ser regulares para o propósito da construção dos corpos pertinentes a elas, Pacioli (2010, p. 29) cita que:

> Dos triângulos eqüiláteros, seis ângulos são iguais a quatro retos, pela citada trigésima segunda do primeiro. Dessa maneira, menos de seis são maiores que quatro retos e mais de seis são maiores que quatro retos. Portanto, com seis ou mais ângulos de tais triângulos não se pode formar um ângulo sólido, porém, com cinco, com quatro e com três se pode formar.

Nota-se, então, que, em virtude de a medida do ângulo interno do triângulo regular ter valor bem abaixo das demais faces anteriormente citadas (igual a 60°), esta figura propicia a existência de mais casos, conforme se segue.

Para seis ângulos superficiais ou mais, já não se aplica, pois, se forem somadas as medidas de seis ângulos, o total obtido será 360°, novamente resultando na planificação das faces (Figura 6), já apresentado nas situações envolvendo três hexágonos regulares e quatro quadrados. Algebricamente, se considerarmos α, β, γ, δ, ε e ζ ângulos de seis triângulos regulares distintos, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 6 \cdot 60° = 360° \quad (6),$$

o que é equivalente a quatro ângulos retos. Condição essa que não satisfaz a proposição de Euclides (2009).

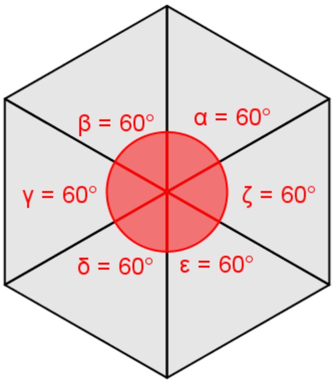

Figura 6: Ângulos superficiais de seis triângulos regulares
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Porém, se a quantidade de triângulos for menor que seis, há a possibilidade de se gerar ângulos sólidos. Inicialmente, pode-se afirmar que o caso mínimo é válido, pois, na concorrência das três faces (Figura 7), a soma dos três ângulos superficiais totaliza 180°. Algebricamente, considerando α, β e γ os ângulos internos de três triângulos regulares distintos, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 60° = 180° \quad (7).$$

Dessa forma, é possível a construção de um ângulo sólido a partir dessas três faces.

Para quatro ângulos concorrentes (Figura 7), a condição também se aplica, pois, a soma das medidas resulta em 240°. Em termos algébricos, considerando a situação anterior e acrescentando-se a medida de δ, o ângulo interno de um quarto triângulo regular, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ \quad (8),$$

situação essa que também segue a proposição de Euclides (2009).

De maneira análoga às anteriores, tem-se a concorrência de cinco ângulos superficiais (Figura 7), cuja soma é 300°, ainda inferior à condição necessária dada. Algebricamente, se considerarmos a situação imediatamente anterior e ainda acrescentarmos a medida do ângulo ε de um quinto triângulo regular, tem-se que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ \quad (9),$$

também obedecendo a condição necessária.

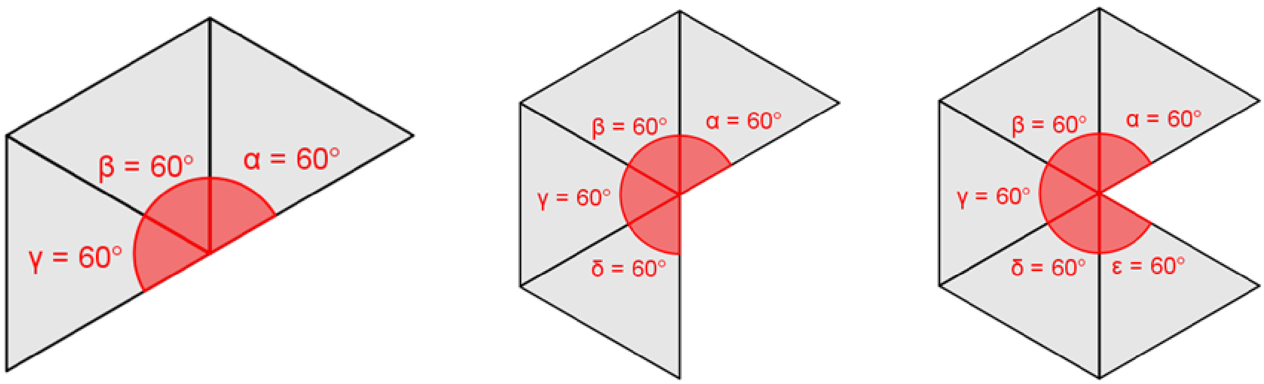

Figura 7: Ângulos superficiais de três, quatro e cinco triângulos regulares
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Apresentadas essas condições, Pacioli (2010, p. 29) finda a descrição das situações, afirmando o que se segue.

> E visto que três ângulos do triângulo eqüilátero contêm um ângulo sólido, logo com triângulos eqüiláteros se forma o corpo de quatro bases triangulares de lados iguais, denominado tetraedro. E quando concorrem quatro de tais triângulos, forma-se o corpo de oito bases denominado octaedro, e se cinco triângulos eqüiláteros contêm um ângulo sólido, forma-se o corpo denominado icosaedro, de vinte bases triangulares e de lados iguais.

Conclui-se, então, que, em virtude da medida de seu ângulo superficial, o triângulo regular como face de corpos regulares propicia a construção de três deles, a saber: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro.

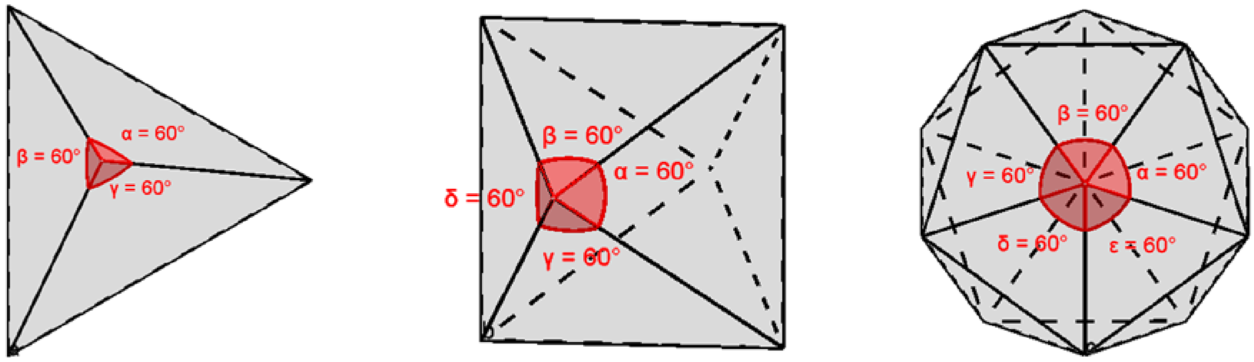

Figura 87: Ângulos superficiais em vértices do tetraedro, do octaedro e do icosaedro
Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Diante disso, Pacioli (2010) encerra o capítulo XXV da *De Divina Proportione* frente as condições estabelecidas na obra de Euclides (2009). Nos capítulos seguintes da obra, o frade aborda, dentre outros conteúdos, as construções desses sólidos e propriedades pertinentes a eles, assuntos sobre os quais não trataremos nesse estudo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo buscou apresentar a definição de corpos regulares adotada por Luca Pacioli em *De Divina Proportione*. Nesse tratado, o autor aborda como elementos dessa definição os ditos ângulos sólidos, hoje chamados, dentre outras nomenclaturas, ângulos poliédricos convexos, e os ângulos planos ou superficiais.

Tendo em vista o cenário em que estão inseridos os conteúdos referentes à Geometria Espacial tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, percebe-se que, mesmo utilizando características diferentes das usualmente empregadas no ensino de Geometria Espacial, o conceito dado por Luca Pacioli pode, também, ser utilizado para definir os corpos regulares, contribuindo na formação do conhecimento matemático sobre esse assunto.

Nesse sentido, assim como em outros estudos desenvolvidos com base em fontes históricas para o ensino de matemática, nota-se uma colaboração da história ao ensino no que concerne à formação do conhecimento matemático, pois ao oferecer um outro caminho para uma definição já impregnada e dependente de outras definições, o professor contribuirá na compreensão de seus alunos sobre os corpos regulares através de uma forma possivelmente mais simples de ser entendida. Além disso, conhecendo outras definições para um mesmo objeto de estudo, o aluno pode ter sua curiosidade instigada, motivando-o a se interessar mais pelo conteúdo.

No que concerne às contribuições na formação do professor de Matemática, as investigações em história podem dar uma visão mais humanista dessa ciência, proporcionando ao docente refletir que não se leciona Matemática apenas com fórmulas e regras, mas também com ideias e discussões que, quando bem fundamentadas, se tornam tão eficientes para o aprendizado quanto à forma tradicionalmente ensinada.

Vale ressaltar que esse estudo não visa julgar se a definição de Luca Pacioli é mais didática que outras, mas sim promover uma discussão sobre seus estudos afim de que sua incorporação no ensino possa trazer um melhor entendimento sobre o conceito de corpos regulares frente à forma como são costumeiramente apresentados aos discentes.

Em virtude disso, idealiza-se, como passo seguinte, a realização de um curso pautado nessa temática, envolvendo os conceitos de corpos regulares advindos da *De Divina Proportione* e, também, do *Timeu* de Platão, promovendo uma discussão entre ambas as definições, visando, assim como em outros estudos que envolvem a incorporação da história ao ensino de matemática, contribuir na formação de professores de matemática e, consequentemente, de seus alunos da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

Beltran, M. H., Saito, F., & Trindade, L. d. (2014). *História da Ciência para formação de professores.* São Paulo: Livraria da Física.

Bertato, F. M. (2010). *A "De Divina Proportione" de Luca Pacioli: tradução anotada e comentada.* Campinas: UNICAMP.

Brasil. (05 de março de 2002). *Parecer CNE/CES 13022/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os curoso de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Fonte: Diário Oficial da União: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base.* Brasília: MEC.

Euclides. (2009). *Os elementos.* (I. Bicudo, Trad.) São Paulo: UNESP.

Kripka, R. M., Scheller, M., & Bonotto, D. d. (2015). Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. *Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa* (pp. 243-247). Aracaju: CIAIQ2015.

Pacioli, L. (2010). De Divina Proportione. Em F. Bertato, *A "De Divina Proportione", de Luca Pacioli: tradução anotada e comentada.* Campinas: UNICAMP.

Pereira, A. C., & Saito, F. (2018). Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 109-122.

Pereira, A. C., & Saito, F. (2019a). Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus. *Educação Matemática Pesquisa*, 405-432.

Pereira, A. C., & Saito, F. (2019b). A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Cocar*, 342-372.

Saito, F. (2015). *História da matemática e suas (re)construções contextuais.* São Paulo: Livraria da Física.

Saito, F., & Dias, M. (2013). Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação*, 89-11.

Saito, F., & Pereira, A. C. (2019). *A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino.* Fortaleza: SBHMat.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Um estudo sobre o capítulo XXV da *De Divina Proportione* (1509) de Luca Pacioli (1447-1517).

Alison Sousa da Silva
Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Departamento de Pós-Graduação, Fortaleza, CE, Brasil
alisonsilva1803@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3634-6455

Ana Carolina Costa Pereira
Pós-Doutora em Educação Matemática
Professora titular do curso de Licenciatura em Matemática
Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Fortaleza, CE, Brasil
carolina.pereira@uece.br
http://orcid.org/0000-0002-3819-2381

Endereço de correspondência do principal autor
Rua 434, 114, CEP: 60.531-120, Fortaleza, CE, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: A. S. Silva, A. C. C. Pereira
Coleta de dados: A. S. Silva
Análise de dados: A. S. Silva, A. C. C. Pereira

Discussão dos resultados: A. S. Silva, A. C. C. Pereira
Revisão e aprovação: A. C. C. Pereira

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 21-01-2020 – Aprovado em: 18-08-2020