Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OBJETOS E PROCESSOS: ASPECTOS COMPLEMENTARES NA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS

Objects and processes: complementary aspects in multiplying negative integers

Willian José da **CRUZ**
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, Brasil
williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este texto é um pequeno extrato da pesquisa teórica em andamento cujo tema é: “A semiótica e os experimentos mentais no ensino e na aprendizagem em matemática”. Nosso objetivo é apresentar uma discussão sobre a distinção que pode ser feita entre processos e objetos no campo da matemática, respectivamente no seu ensino. Esta é uma pesquisa que buscou fundamentar, por meio de estudos em livros textos e artigos, a ideia de que possa existir uma ação no ensino de matemática, em especial, no ensino da multiplicação de números negativos, que transforma objetos em processos e vice-versa. Parte deste empreendimento foi desenvolvida por meio de experimentos mentais que são formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos como objeto de consideração, por meio de uma representação, ancorados na dinâmica do raciocínio diagramático e aportados num sistema de representação consistente.

Palavras-chave: Educação Matemática, Complementaridade, Experimentos mentais.

ABSTRACT

This text is a short excerpt from ongoing theoretical research on the theme: Semiotics and Thought Experiments in Mathematics Teaching and Learning. Our goal is to present a discussion of the distinction that can be made between processes and objects in the field of mathematics, respectively in their teaching. This is research that sought, through studies in textbooks and articles, to support the idea that there may be an action in the teaching of mathematics, especially in the teaching of negative number multiplication, which transforms objects into processes and vice versa. - verse. Part of this endeavor was developed through thought experiments that are ways in which the subject has to put his own thoughts as object of consideration, through a representation, anchored in the dynamics of diagrammatic reasoning and based on a system of consistent representation.

Keywords: Mathematical Education, Complementarity, Thought Experiments.

1 INTRODUÇÃO

Hersh (1997), buscando explicar a diferença entre processo e objeto, traz algumas questões e respostas. Esse autor disserta:

> Uma nuvem é considerada um objeto? Sim, de algum tipo. Um incêndio em uma padaria é considerado um objeto? Não, mas é um processo. O temperamento do meu neto? Definitivamente é um processo. E $(10)^{10^{10}}$? Um objeto do ponto de vista de Frege ou apenas algo objetivo, do ponto de vista de Kreisel – Putnam? Objetos significam algo como uma rocha? Algo de forma e volume definidos? Então somente sólidos devem ser objetos. Se pegarmos um cubo de gelo, por exemplo, e derretê-lo, o transformaremos em um monobjeto. Um objeto tão rigoroso é também especial, transitório, condicional para filosofia (Hersh, 1997, p.77 – tradução nossa).

Hersh (1997) escreve que alguns objetos são entidades físicas com volume e forma e outros não. Por exemplo, os átomos são objetos, assim como os elétrons, prótons, fótons também são. Mas neste nível, a distinção entre objetos e processos desaparece. A forma como observamos esses elementos, pode apresentar comportamento de partícula (objeto) ou de ondas (processo).

O físico dinamarquês Niels Bohr introduziu a noção de *complementaridade* na física, como um princípio fundamental da mecânica quântica, apresentado pela primeira vez em um simpósio realizado em 1927, à beira do Lago de Como na Itália (Silva, 1972). Ele afirmava que os elementos têm propriedades complementares, que não podem ser medidos com precisão, ao mesmo tempo. Por exemplo, há aspectos de partícula e de onda em "elementos físicos" e esses aspectos são complementares. Ambos os conceitos são emprestados da mecânica clássica, na qual é impossível que certos elementos sejam uma partícula e uma onda ao mesmo tempo. Portanto, é impossível medir as completas propriedades de onda e de partícula isoladamente. Objetos e processos são formas complementares para o desenvolvimento do conhecimento, em especial, do conhecimento matemático.

Há um significado mais amplo para objeto que é: "independente de minha consciência" (Hersh, 1997, p. 77). Isto quer dizer independente de qualquer consciência? Dois sujeitos são um para o outro, sujeitos de si mesmos? Ambos são apenas objetos? Ou apenas sujeitos? Ou sujeitos objetivos? Ou sujeitos objetos?

Um significado relativo para objeto é, "qualquer coisa que pode afetar-me" (Hersh, 1997, p.77). Uma flor poderia me afetar se eu caminhasse de encontro a ela e um germe poderia me afetar se eu lhe desse umas fungadas. Um ataque de rins ou paranóia poderia me deixar muito doente. Esse ataque seria um objeto?

Ainda outro significado é a oposição ao processo. Objeto é substantivo, processo é verbo. Objetos atuam ou são acionados. Processo é a ação. Em todas essas explicações, os objetos são independentes da consciência individual. Eles relativamente têm qualidades permanentes. Eles podem ser observados ou experienciados por qualquer pessoa com algum órgão sensorial apropriado e treinamento adequado dos olhos, do cérebro e com instrumento cientifico apropriado.

As cataratas do Niágara é um exemplo de interação dialética de objetos e processos, como afirma Hersh (1997). As cataratas do Niágara é a saída do lago Ontário. Está lá há milhares de anos. É popular casais recém casados passarem a lua de mel lá. Isto torna as cataratas um objeto para um agente de viagem. Mas do pondo de vista de uma gota d'água que passa, é uma aventura, ou seja, um processo.

Esta ação complementar entre objeto e processo vividamente mostra duas transformações opostas: (A) a primeira pode ser considerada uma transformação de um objeto num processo, quando aceleramos o tempo. (B) Quando desaceleramos o tempo, transformamos um processo num objeto. Podemos exemplificar, com o uso da fotografia.

> Para realizar (A), use fotografias em lapsos do tempo. Coloque sua câmera em um lugar silencioso. Tire uma foto a cada meia hora. Componha essas fotos em um filme. Os talos das plantas brotam do chão, florescem e caem! As nuvens voam na velocidade de um furacão! Estações vêm e vão a um quarto de hora! Acelerando o tempo transforma conjuntos-objeto em conjunto-processo! Para realizar (B), use fotografia de alta velocidade para congelar um instante! Uma gota de leite espirrada na mesa se transforma em coroa – um círculo com espigões encimado com pequenas esferas. Ao diminuir o tempo, salpicos-processo é transformado em salpicos-objeto (Hersh, 1997, p. 78 - tradução nossa).

O corpo humano é um objeto reconhecível e bem definido. Mas alguns fisiologistas consideram que nossos tecidos são fluidos como rios (Hersh, 1997). As moléculas entram e saem da carne e ossos. Imagine que você não vê um amigo há tempos e após alguns anos, você encontra com ele novamente. Você o reconhece, no entanto, suas partículas não são mais iguais ao que era antes. Seu físico sofreu algumas alterações. Neste caso, notamos um processo em escala maior e um objeto em escala menor.

No domínio *sóciocultural-histórico*, a continuidade entre objetos e processos é flagrante, apesar de algumas intuições, crenças e práticas parecerem eternas. Todas as instituições mudam. Se elas mudam lentamente ao longo dos séculos como escravidão, pirataria, realeza, propriedade privada, sujeição feminina, são pensadas como objetos (Hersh, 1997). Se elas mudam diariamente como moda de roupas, mercados de ações, pesquisas de opinião, são pensadas como processo.

No computador, a diferença entre objeto (hardware) e processo (software) é quase arbitrária. O designe decide quais funções colocar no hardware e no software. Algumas características da mente/cérebro são como objetos, vitalícias. Algumas mudam por minuto.

Antes de Galileu virar o telescópio para o sol, a filosofia pensou que a terra foi mudança e processo, e o sol foi um objeto imutável. Aprendemos que o sol imutável é uma bola de fogo que com o tempo deve desaparecer, morrer ou explodir. A lua morta também teve um nascimento e uma história.

Para o geólogo, usando uma escala de tempo longa, a terra é um processo. Olhamos para terra a uma curta distância e normalmente não a vemos como um todo, como um objeto. Mas quando o astronauta pisou na lua, ele viu a terra por uma longa distância em um tempo curto. Ele viu um objeto. A equação de Einstein $E = mc^2$ na qual m é massa (objeto), e E é energia (processo), e c é velocidade da luz no vaco, mostra como a bomba de massa-objeto transformou em holocausto de energia-processo as cidades japonesas de *Hiroshima e Nagasaki*. Uma explosão nuclear de uma estrela converte massa em energia. Esta é uma equação sensata ou sem sentido para dizer que uma estrela é um objeto ou um processo?

As fotografias de objetos difusos no céu de Edwin Hubble (1889-1953) encontraram um "*desvio para o vermelho*", isto é, identificaram que as galáxias do universo estão se afastando umas das outras. Anos depois, Arno Penzias captou o denominado "eco do *Big Bang*" indicando que a expansão do universo começou há cerca de 15 bilhões de anos. Neste contexto, nós notamos que o cosmos passou, por sua história, de uma grande explosão (*Big Bang*) para uma possível morte fria.

Fotografias em alta velocidade e lapso de tempo mostram que a polaridade entre objeto e processo é o fim de um contínuo. Qualquer fenômeno parece ser como um objeto ou um processo, dependendo da escala de tempo, da escala de distância, e das finalidades humanas.

Uma escala menor no espaço, ou acelerando o tempo, transforma um objeto em um processo. Uma escala maior no espaço, ou desacelerando o tempo, transforma um processo em um objeto. Em resumo, um objeto é um processo lento e um processo é um objeto acelerado.

Na matemática tem objetos? Talvez esta questão seja uma das mais importantes para a matemática e seu ensino. Paulo Freire escreve que "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (2019, p 24). Logo, acreditamos que ter um olhar crítico sobre os objetos da matemática para o professor que ensina esta ciência é permitir desenvolver as condições para a construção e produção do conhecimento matemático em salas de aula.

Uma das respostas possíveis para a questão sobre matemática é verificar se ela é essencialmente uma lógica ou uma língua, convergindo a processos, ou ainda um sistema de proposições ou um produto sintético na qual há a necessidade de objetos. Pode-se dizer que são ambas, mas a perspectiva que se tem hoje nos leva na direção da língua.

Otte, discutindo sobre o construtivismo e os objetos da teoria matemática, disserta:

> A Matemática e a Lógica não emergem somente de uma metanálise de troca societária, de comunicação e linguagem, como os empiricistas lógicos parecem acreditar; uma crença que os leva a manter uma absoluta distinção entre o analítico e o sintético e a tomar as leis da Lógica e as proposições da Matemática pura como analíticas. Existem, de fato, dois esquemas alternativos da compreensão, "que dominam a cultura filosófica contemporânea: o paradigma da linguagem e o paradigma da produção" (Markus, 1986). Desde o início do século XIX existem dois modos de pensar em Matemática que, mais ou menos, correspondem a esses esquemas e que se manifestaram, por exemplo, de um lado, no criticismo de Kant por Bolzano e, por outro lado, por Hegel e Grassman (Otte, 1991, p. 1;2).

Cruz (2018) escreve que geralmente a matemática é caracterizada como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas, neste caso, a atividade matemática configura-se como uma atividade tipicamente de demonstração de provas, não fazendo menção a objetos especificamente matemáticos.

Este texto é um pequeno extrato da pesquisa teórica em andamento cujo tema é: "A semiótica e os experimentos mentais no ensino e na aprendizagem em matemática". Buscando responder a questão: Como os experimentos mentais na Educação Matemática podem ser úteis na construção de ideias matemáticas fundamentais para o ensino e a aprendizagem dessa ciência?

D'Ambrosio (2008, p.18) argumenta que "todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de gerações, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não dicotômicos entre si". O conhecimento matemático, por exemplo, foi resultado de experiências desenvolvidas pelo indivíduo, para sua sobrevivência e evolução. Mas, como afirma D'Ambrosio (2008), o caráter experimental da matemática foi removido do seu ensino, sendo este um fator que pode ter contribuído para o mau rendimento no estudo desta ciência na escola básica.

Traçamos como um dos objetivos, apresentado nesta pequena exposição, discutir a distinção entre processos (ações, intensões, calculações, etc.), cujo resultado é o conceito e objetos (físicos, mentais, não físicos, não mentais, atemporais, etc.), extensões pensadas por meio de conceitos.

Partimos da hipótese de que esta distinção ajuda esclarecer certos aspectos de questões matemáticas que muitas vezes são ensinadas nas escolas por meio de uma apresentação formal, fria e acrítica. O intuito mais relevante desta abordagem é dá espaço ao imaginário e a criatividade. Esse é o preâmbulo a conceituações teóricas, que foram responsáveis pelo progresso da ciência ao longo da história. Como afirma D'Ambrosio no prefácio do livro "Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais" "novas ideias, novos conceitos, novas teorias resultam de experimentos mentais" (CRUZ, 2018, p.11). Para alcançar nosso objetivo, empreendemos estudos em livros textos e artigos, nos possibilitando ter uma visão mais ampla de nossas indagações e hipóteses.

Dividimos esta apresentação em duas etapas. A primeira, uma discussão sobre a existência de objetos na matemática, fazendo um paralelo entre a história, a filosofia e os tempos atuais. Na segunda etapa, apresentamos um exemplo que pode permitir entender como se passa de processos para objetos ou vice-versa em uma questão central da matemática que é a multiplicação de números negativos.

A escolha deste exemplo teve como motivação, o entendimento das regras de sinais envolvendo esta operação para números inteiros. Acreditamos que essa operação ainda apresenta grandes dificuldades no seu ensino e consequentemente na aprendizagem por parte do estudante.

2 TEM OBJETOS NA MATEMÁTICA?

O logicista Frege (1884), no livro "Os fundamentos da aritmética" investigando o conceito de número, considera que os números são objetos. Esses objetos são chamados de abstratos, na concepção Fregeana. A questão para ele girava em torno da pergunta sobre o significado do número 1 e a ideia de unidade.

> Cabe observar aqui a relação que mantêm entre si os significados das palavras "unidade" e "um". Leibniz entende por unidade um conceito sob o qual caem 0 e 1, ou como diz também: "O abstrato de um é a unidade". Locke e Hesse parecem empregar unidade e um com o mesmo significado. Basicamente, é o que faz também Leibniz; pois, chamando de um todos os objetos singulares que caem sob o conceito de unidade, designa com aquela palavra não o objeto singular, mas o conceito sob o qual todos caem (Frege, 1884, p. 234).

A unidade é o abstrato de um, isto é, unidade é algo em virtude do qual todas as coisas existentes são chamadas de um. Número seria um composto de unidades.

Para Platão, números eram considerados objetos de algum tipo, residentes no campo das ideias e essências perfeitas. Um mundo transcendental que poderia ser acessado apenas pela razão ou entendimento (Silva, 2007).

As correntes filosóficas que tiveram suas origens nos séculos XIX e XX, nomeadas por formalista e intuicionista negam que números são objetos (Hersh, 1997). Leopold Kronecker,(1823 – 1891) por exemplo, um dos inspiradores do criador da corrente intuicionista Luitzen E. J. Brouwer[1], considerava que o conjunto dos números 0, 1, 2, 3,... era infinito e a construção de cada elemento desta sequência se daria pela existência de "um primeiro elemento e uma lei de formação que consistia na adição de uma unidade a cada número para se obter o seguinte" (Costa, 2008, p. 33). Isto é, os números não devem ser concebidos como algo dado, mas devem ser construídos. "Uma coleção infinita, como algo acabado, como totalidade composta de objetos existentes e distintos, parecia uma concepção ilícita aos olhos de Kronecker" (Costa, 2008, p.33).

Os formalistas, por sua vez, consideram que a matemática é a ciência das estruturas dos objetos e os números são as propriedades estruturais mais simples desses objetos e não objetos em si. Um dos maiores representantes do formalismo é David Hilbert que escreveu a obra "*Grundlagen der Geometrie"* (Fundamentos da Geometria*)* em 1899. Esse matemático sugeriu que a geometria euclidiana não precisava estabelecer referências a objetos matemáticos de qualquer natureza, dispensando um tratamento ontológico específico das ideias matemáticas (Skovsmose, 2014). O desenvolvimento da geometria com base nos fundamentos de Hilbert consiste no desenvolvimento das implicações dos axiomas, isto é, no processo de verificação de uma proposição por meio de um grupo de axiomas previamente constituídos.

Putnam (1975), em seus escritos, considerava que a crença na objetividade da matemática infelizmente acompanhava a crença de que os objetos matemáticos são incondicionalmente metafísicos. Esse autor considera que o sucesso das verdades matemáticas é o sucesso de suas ideias na prática. Para Putnam a necessidade não está nos objetos e sim nos objetivos (Hersh, 1997).

[1]O intuicionismo foi desenvolvido por Brouwer nos anos 20 do século XX. Curiosamente Brouwer tinha aversão a ideia de um mundo transcendental como afirma Silva (2007). Ele colocava em "dúvida a existência de qualquer objeto matemático que não pudesse ser construído (ele preferia dizer edificado) na consciência a partir de vivências mentais muito específicas" (Silva, 2007, p. 148). Uma verdade matemática que dispensasse uma verificação por meio de construções efetivas era recusada por Brouwer.

O fato está no significado da palavra "existe". O conhecimento de números não aumenta se dissermos que eles existem ou não. Frege (1884), em sua grande polêmica sobre os fundamentos da aritmética, se abstém de explicar o significado de "existe" ou o significado de "objeto". Hersh (1997).

Hersh (1997) disserta que de Pitágoras à Frege, a filosofia deu aos objetos matemáticos uma existência idílica (maravilhosa) livre de manchas como atemporalidade, não-permanência e indefinição. Esses objetos foram considerados absolutamente imóveis, livres de propriedades, ou seja, livres de processos. Baseando-se nas ideias de Platão, esses objetos foram considerados puros. Em vez de eternos, eles são atemporais. "Os exemplos de números e triângulos devem provar que esses objetos existem. Por outro lado, o quebra cabeça do modo de existência de números e triângulos, deve ser resolvido chamando-os de objetos abstratos" (Hersh, 1997, p.80 – tradução nossa).

O que significa objetos abstratos? Objetos abstratos são considerados não mentais, não físicos, não históricos, não sociais ou intersubjetivos. Podemos ver que os objetos da matemática não são mentais ou físicos, abreviamos chamando-os de objetos abstratos. Um nome mais honesto deveria ser objetos transcendentais.

Em nenhum lugar da terra ou do espaço existe um objeto puro, totalmente livre dos aspectos do processo – livre de mudanças. Somente na matemática nós pensamos em objetos puros. Esse pensamento poderia advir da matemática numa escala curta de tempo? Não poderia ter uma visão que abrangeu séculos mostrando a evolução da matemática - um processo?

Considerando a matemática como um fenômeno sociocultural-histórico sem a necessidade de qualquer objeto abstrato, platônico, não humano; sem a necessidade de reduzir ao formalismo ou intuicionismo, implicaria que os objetos matemáticos, como outros objetos, são também processos. Eles mudam, seja à vista de todos ou devagar o bastante para serem notados.

3 OBJETO/PROCESSOS NA COMPREENSÃO DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS.

Vamos considerar a explicação das multiplicações de $(1) \times (-1)$ e $(-1) \times (-1)$, em termos de processos para se chegar ao objeto e em termos de objeto transformado-o em processo.

3.1 De processos para objetos

Em termos de processo, vamos adotar a ideia de estrutura conservada de N (conjunto dos números naturais) para Z (conjunto dos números inteiros). Consideramos que uma multiplicação é a abreviação da soma de parcelas iguais, dessa forma ao nos depararmos com a multiplicação de, por exemplo, 2×3 estamos considerando que o número 2 foi somando com ele mesmo 3 vezes, isto é:

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 (3\ vezes)$$

Em temos mais gerais, se considerarmos dois números naturais a e b quaisquer, podemos escrever que:

$$a \times b = a + a + a + \ldots + a (b\ vezes)$$

Esta operação válida em N verifica as seguintes propriedades:

$a \times b = b \times a$ (propriedade comutativa da multiplicação em N).

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (propriedade distributiva da multiplicação em N).

$a \times 0 = 0 \times a = 0$ (Elemento nulo da multiplicação em N).

Se estendermos a ideia de multiplicação como soma de parcelas iguais aos números inteiros, positivos ou negativos, então podemos escrever que

$$(-1) \times (1) = (-1) + (-1) + \ldots + (-1) (1\ vez),$$

isto sugere que

$$(-1) \times (1) = (-1).$$

Usando o mesmo argumento para a multiplicação $(1) \times (-1)$ chegaremos a uma situação sem sentido, como pode ser observado no desenvolvimento que segue

$$(1) \times (-1) = (1) + (1) + \ldots + (1) (-1\ vez).$$

Logo, $(1) \times (-1)$ não teria resultado, pois não existiria soma de parcelas iguais, como no caso da multiplicação de números naturais. Mas de alguma forma, estamos interessados em manter a estrutura, isto é, estamos interessados em manter a propriedade comutativa de N para multiplicação de números inteiros, logo, nos forçamos a aceitar que

$$(-1) \times (1) = (1) \times (-1),$$

o que faz com que o produto

$$(1) \times (-1) = -1.$$

No exemplo apresentado, o processo nos força a aceitar uma condição, para não abrir mão de uma propriedade, no caso a propriedade comutativa, conduzindo ao produto (objeto) -1, resultado da multiplicação dada. O mesmo pode ser feito em termos da multiplicação $(-1) \times (-1)$.

O argumento aqui é mostrar, em termos de processo, como este produto gera o resultado +1. Vamos iniciar com as seguintes afirmações:

$$(-1) \times 0 = 0 \text{ e } 0 = (-1) + (+1)$$

Com base nas afirmações apresentadas, podemos escrever que:

$$(-1) \times [(-1) + (1)] = 0,$$

o que nos permite escreve, aceitando a propriedade distributiva de N para Z que

$$(-1) \times (-1) + (-1) \times (1) = 0$$

pelo desenvolvimento apresentado neste texto verificamos que

$$(-1) \times (1) = (-1).$$

Portanto

$$(-1) \times (-1) + (-1) = 0.$$

O que não nos resta alternativa e nos obriga a aceitar que

$$(-1) \times (-1) = +1.$$

Se considerarmos que os produtos são objetos, esses mesmos foram construídos por meio de processo operatórios, baseados em certas propriedades e considerações previamente dadas. No caso da multiplicação $(-1) \times (-1)$, só foi possível aceitar o produto +1, pela garantia da propriedade distributiva e do elemento nulo da multiplicação de N para Z.

3.2 De objetos para processos – o uso dos experimentos mentais

Considerando agora em termos de objeto, vamos adotar a dinâmica dos experimentos mentais, entendo que os números -1 e 1 são objetos (pontos) de uma reta, opostos simetricamente em relação ao ponto 0 chamado de centro de simetria, como pode ser visualizado na figura 1. Isto é, dois pontos dizem-se simétricos se têm a mesma direção, sentidos opostos e o mesmo comprimento em relação ao centro de simetria. Um caso particular é que todo ponto é simétrico a si mesmo.

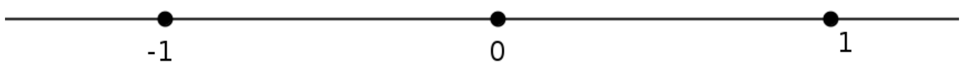

Figura 1

Fonte: o próprio autor, 2020

As considerações sobre experimentos mentais adotadas neste texto estão aportadas nas concepções de Cruz (2018, p. 164) que define experimentos mentais “como formas que o sujeito tem para colocar seu próprio pensamento, dentro de um determinado contexto, como objeto de consideração, por meio de uma representação”.

Esses experimentos na Educação Matemática se desenvolvem por meio da dinâmica do raciocínio diagramático sob a perspectiva de Peirce (1979). O raciocínio diagramático é um processo constituído de três etapas, a saber: “(1) a construção de uma representação; (2) a experimentação dessa construção; (3) a observação dos resultados" (Cruz, 2019, p. 18, 19).

Peirce (1979) definiu diagrama como uma representação, indicando-o como um ícone de relações a ser realizado num sistema de representação coerente, isto é, a ser realizado nos limites de um contexto bem definido. "Esse sistema de representação é caracterizado por um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e indicar um conjunto de regras para a transformação de gráficos" (Cruz, 2019, p. 19).

Dissertando sobre a importância desses tipos de experimentos, Cruz (2019, p. 21) escreve:

> O objeto de investigação não se revela de forma clara e óbvia, de modo a atingir o conhecimento com apenas a leitura de suas propriedades mais relevantes. É preciso que se estabeleça uma interação entre a sensação consciente e a reação objetiva, por meio de uma forma ou uma representação fixa, isto é, essa interação deve ser desenvolvida por meio de experimentos mentais.

Esses tipos de experimentos são muito comuns nas ciências naturais e na própria matemática. As descobertas e o uso do raciocínio científico por Galileu foram as conquistas mais importantes da história do pensamento humano. O princípio da Inércia, a grande descoberta de Galileu, foi resultado de um experimento mental. Por exemplo, a adoção do movimento uniforme, que começa por imaginar uma estrada perfeitamente lisa e rodas de um móvel sem atrito algum é um autêntico experimento mental. Esse tipo de experimento formou o fundamento da mecânica quântica do movimento (Einstein & Infeld, 1879 - 1955).

As características importantes dos experimentos mentais podem ser elencadas como: i) um sistema de atividades supostas; ii) revela contradições no modo de pensar; iii) é uma reflexão a base de dados conhecidos; iv) serve como fatos ou formas de estabelecer algum fenômeno, permitindo buscar algumas hipóteses para explicá-lo; v) na matemática é uma questão de descoberta, mas tem um problema em relação a fundamentação (Cruz, 2018).

Na perspectiva dos experimentos mentais, "a matemática é compreendida como uma atividade, uma construção a base de possibilidades" (Cruz, 2018, p. 167). Ou seja, é necessário pensar a matemática como uma atividade e neste contexto, a intuição ganha força da realidade, ou constrói a própria realidade. "Na realidade, a geometria já havia dado o exemplo de experiências dessa natureza, se admitirmos que os seus postulados podem ser considerados como resultados de experiências mentais bem sucedidas, realizadas com figuras geométricas” (Silva, 1972, p. 96).

Retomando o experimento mental supracitado, vamos considerar que multiplicar por (-1) (fator de simetria), é encontrar o simétrico do número (ponto) e multiplicar por (1) (fator de simetria) é encontrar o próprio número (ponto). Devemos diferenciar o que é objeto e o que é o fator de simetria, seguindo a dinâmica

$$(objeto) \times (fator) = objeto.$$

Portanto, podemos desenvolver nosso experimento chegando a algumas conclusões, observando o diagrama da figura 2.

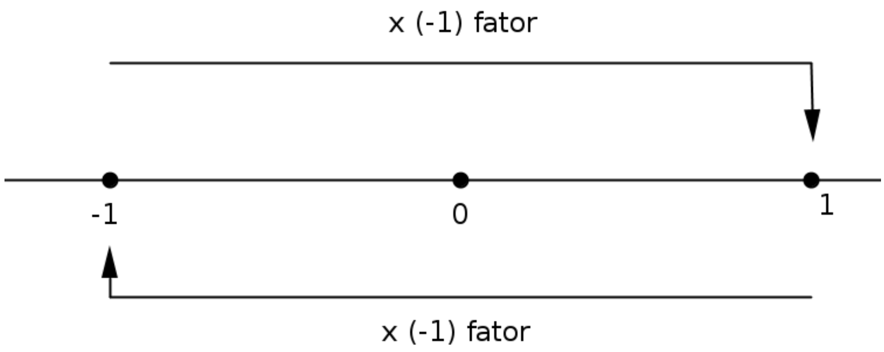

Figura 2
Fonte: O próprio autor, 2020.

$$(-1)(objeto) \times (1)fator = -1(objeto)$$

$$(1)(objeto) \times (-1)fator = -1(objeto)$$

$$(-1)(objeto) \times (-1)fator = 1(objeto)$$

Percebemos que as multiplicações $(1) \times (-1)$ e $(-1) \times (1)$ geram o mesmo objeto, ou seja, $(1) \times (-1) = (-1) \times (1)$ e que $(-1) \times (-1) = 1$ sendo que esta última mostra claramente que o objeto 1 é o simétrico do objeto (-1).

Um olhar crítico mais atento vai identificar que a igualdade $(1) \times (-1) = (-1) \times (1)$ só é possível, porque elas geram o mesmo objeto, como percebemos anteriormente. No entanto, um olhar mais atento vai nos indicar que essas multiplicações não são iguais, pois na primeira $(1) \times (-1)$, o objeto considerado é 1 e o fator de simetria -1, já na segunda $(-1) \times (1)$, o objeto é -1 e o fator de simetria 1. Esse olhar se justifica na característica "v" do processo de experimentação mental, mas, como afirma Cruz (2019, p. 24) "O aspecto essencial dos experimentos mentais, e que não acontece num contexto de uma estrutura lógica definido em termos axiomáticos, é a capacidade de desenvolver um contexto de situações imagináveis, ou seja, um espaço de meras possibilidades".

Esse problema acontece porque os símbolos -1 e 1 tomam duas funções no experimento. Ora são objetos, ora são fatores que determinam a simetria. "No experimento mental, cria-se a possibilidade de construção da referência à base de um pensamento especulativo" (Cruz, 2019, p. 24).

Claro que a partir deste experimento, podemos construir um processo de considerações sobre essas transformações. Isto é, transformar esses objetos em processos, permitindo a construção de uma estrutura que condicione avançar este entendimento para outros objetos (números inteiros), mesmo não representados.

Os experimentos mentais na educação matemática transformam a matemática em uma atividade semiótica permitindo a construção de diagramas e a observação das relações encontradas nesta construção. Sua importância para o ensino se fundamenta na ação do sujeito que estabelece um contexto e um campo de possibilidades no desenvolvimento de certos conceitos matemáticos. Esses tipos de experimentos podem resgatar os processos de experimentações, analogias e o uso de metáforas na aprendizagem em matemática, exaltando a criatividade na busca de generalizações.

4 CONSIDERAÇÕES

Propomos neste texto um olhar crítico sobre objetos e processos na matemática, em especial, na educação matemática, permitindo ao professor desenvolver um caráter de ensino produtivo e construtivo, para que o mesmo possa deflagrar no aprendiz, uma curiosidade crescente, pois como afirma Freire (2019, p. 27): "quanto mais criticamente se exerça a capacidade de aprender, tanto mais se constrói e desenvolve o que venho chamando "curiosidade epistemológica", sem a qual não alcançamos o conhecimento cabal do objeto".

Matemática é um fenômeno sociocultural-histórico, isto é, seus objetos foram se constituindo ao longo de sua história, mas também foram modificados, o que nos condiciona a dizer que objetos também são processos ou vice-versa. O nosso exemplo transfez uma estrutura operatória em objetos (produto de dois números inteiros), ao passo que partimos também de dois objetos (pontos simétricos) e transformamos em processos por meio de mudanças isométricas.

Podemos concluir que a matemática lida com objetos, mas esses objetos pertencem a um universo do discurso limitado. Por outro lado, os métodos formais em matemática não reivindicam a existência de tais objetos, por exemplo, de números inteiros. Limitam-se ao campo processual da matemática e na manutenção da estrutura operacional, logo não temos garantias de que isso fornece conhecimento real. Em consequência temos que aceitar a existência de experiências de objetos representados, daí a importância dos experimentos mentais.

REFERÊNCIAS

Costa. N. C. A. (2008) Introdução aos fundamentos da matemática. São Paulo: Hucitec.

Cruz, W. J. (2018). Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais. Curitiba: Appris.

Cruz, W. J. (2019). O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica. Brasília: Educação Matemática em Revista, v. 24, n. 62, p. 6-28.

D' Ambrosio. (2008). Educação Matemática: da teoria a prática. Campinas-SP: Papirus. 16ª ed.

Einstein, A. Infeld, L. (1879 – 1955). A evolução da física. Trad: REBUÁ, Giasone. Rio de Janeiro (2008): Zahar.

Frege, J. G. (1884). Fundamentos da aritmética: Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Traduzido do original alemão Die Grundlagen der Arithmetik — Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau.

Freire, P. (2019). Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra. 59ª ed.

Hersh, R. (1997). What is mathematics, really? Oxford: University Press, Inc.

Otte, M. (1991). Construtivismo e os objetos da Teoria Matemática. Rio Claro – SP: Bolema, v. 6, n. 7.

Peirce, C. S. (1979). CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph). NEM = New Elements of Mathematics. Harvard UP.

Putnam, W. H. (1975). What is mathematical truth? Havard University: Historia Mathematica 2.

Silva, J. J. (2007). Filosofia Matemática. São Paulo: Editora UNESP.

Silva, M. R. (1972). A evolução do pensamento científico. São Paulo: HUCITEC.

Skovsmose, O. (2014). Um convite à educação matemática crítica. Campinas, SP: Papirus.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Objetos e processos: aspectos complementares na multiplicação de número inteiros negativos

Willian José da Cruz
Doutor em Educação Matemática
Professor adjunto da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Departamento de Matemática, Juiz de Fora, Brasil
Atua no programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFJF.
williancruz990@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-7509-1021

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Petruz Zaka, 125, apt. 202. Bairro Cascatinha. CEP: 36033204. MG, BRASIL

AGRADECIMENTOS
Agradeço a Deus que me permitiu fazer este grande trabalho.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: W. J. CRUZ
Coleta de dados: W. J. CRUZ
Análise de dados: W. J. CRUZ
Discussão dos resultados: W. J. CRUZ
Revisão e aprovação: W. J. CRUZ

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO
Recebido em: 11-01-2020 – Aprovado em: 14-05-2020