Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

COMO APREENDEMOS OS OBJETOS MATEMÁTICOS: UMA ANÁLISE À LUZ DE TRÊS TEORIAS

How we Understand Math Concepts: an Analysis in the Light of Three Theories

Jerson Sandro Santos de **SOUZA**
Secretaria Municipal de Educação, Manaus-AM, Brasil.
jersoncobain@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9812-5009

Leandro de Oliveira **SOUZA**
Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba-MG, Brasil.
https://orcid.org/0000-0003-1626-0766

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

No presente artigo, são apresentadas algumas reflexões, embasadas em uma pesquisa bibliográfica, sobre a apreensão/aquisição/construção de conceitos matemáticos. Discute-se como se dá o processo de apreensão conceitual a partir de três teorias: a teoria dos registros de representação semiótica, que é pautada em estudos sobre semiótica e semiologia, a teoria das imagens e definições conceituais, que é baseada em pressupostos cognitivistas, e a teoria das situações didáticas, que é fundamentada em estudos construtivistas. Destaca-se o papel da articulação de representações semióticas, das definições conceituais e da contextualização do saber matemático via resolução de problemas para a conceitualização. Conclui-se o trabalho apresentando algumas implicações pedagógicas, pautadas nas teorias discutidas, com o intuito de fornecer aos professores de Matemática subsídios teóricos que os auxiliem a organizarem situações didáticas que realmente favoreçam a aprendizagem dos conteúdos matemáticos com compreensão.

Palavras-chave: Representação Semiótica, Imagem Conceitual, Situações Didáticas.

ABSTRACT

In this paper, we present some reflections, grounded on bibliographical research, about the apprehension/acquisition/construction of mathematical concepts. We discuss how the process of conceptual apprehension takes place from three theories: the theory of registers of semiotic representation, which is built on studies on semiotics and semiology, the theory of images and conceptual definitions, which is developed on cognitivist assumptions, and the theory of didactical situations, which is based on constructivist studies. We highlight the role of articulating semiotic representations, of the conceptual definitions and of the contextualization of mathematical knowledge according with problem-solving for conceptualization. We conclude by presenting some pedagogical implications, based on the theories discussed, aiming to provide mathematics teachers with theoretical support that helps them to organize didactic situations that really favor the learning of mathematical content with understanding.

Keywords: Semiotic Representation, Concept Image, Didactical Situations.

1 INTRODUÇÃO

Certamente, os objetos matemáticos são bem diferentes daqueles tratados pela Física, Química, Biologia e outras ciências. Esses objetos (conceitos, propriedades, estruturas, relações) são imateriais[1] e o modo de trabalhar em Matemática geralmente alcança patamares de abstração nos quais verificações empíricas são desnecessárias. Considerando essas especificidades, surgem, naturalmente, questionamentos relativamente à natureza dos objetos matemáticos.

O que são os objetos matemáticos? São livres invenções do espírito humano, como sustentam os idealistas? São objetos que existem num mundo que não se situa no espaço-tempo, como defendem os platonistas? São entes imateriais obtidos por abstração, a partir de objetos acessíveis aos sentidos, como sugeria, em especial, Aristóteles?

Se considerarmos correto o pressuposto platonista de que as entidades matemáticas existem independentemente do sujeito, ou se acharmos correto reduzir os entes matemáticos a uma sintaxe e a uma semântica gerais, como pretendiam os positivistas lógicos, então estaríamos justificando, em ambos os casos, um ensino de Matemática focado na transmissão de verdades, do professor para os alunos, e no uso, logo que possível, da linguagem do professor de Matemática, ou seja, da linguagem postulacional-dedutiva, sem muita preocupação de levar em conta as ideias espontâneas dos educandos.

Isso quer dizer, segundo observa Piaget (1973), que a orientação dada à Educação Matemática depende naturalmente da interpretação adotada do desenvolvimento psicológico ou da construção das operações e das estruturas lógico-matemáticas. O autor acrescenta que essa orientação depende tanto do sentido psicogenético quanto da significação epistemológica dada a essas questões. Nesse sentido, a consecução de um ensino que realmente favoreça a aprendizagem com compreensão dos conteúdos da Matemática pressupõe a adoção de uma postura epistemológica e psicológica diferenciadas.

Assim sendo, é necessário que os professores de Matemática tenham acesso, sobretudo, a esse corpo de fatos que dizem respeito a como são

[1] A imaterialidade dos objetos matemáticos refere-se ao fato de que as investigações matemáticas incidem sobre coisas prescindindo de todas as qualidades sensíveis, como peso, leveza ou dureza, ou seja, elas incidem sobre noções atingidas por abstração.

apreendidos/adquiridos/construídos[2] os objetos matemáticos, em geral pouco conhecido por eles. Uma vez que eles melhorem seu conhecimento sobre esses fatos, ampliam-se suas possibilidades de organizarem um ensino que torne o saber matemático acessível e desejável aos educandos. Dito de outra forma, o processo de ampliação das possibilidades de ação docente requer que a percepção do professor de Matemática, sobre como se dá o processo de construção dos conceitos de sua disciplina, se alargue para além de sua epistemologia pessoal.

> Embora uma teoria válida da aprendizagem não nos possa dizer como ensinar no sentido prescritível, pode nos oferecer pontos de partida mais viáveis para a descoberta de princípios gerais do ensino que podem ser formulados tanto em termos de processos psicológicos intervenientes como em termos de relações de causa e efeito. (Ausubel, Novak & Hanesian, 1980, p.13).

Com base nas preocupações supracitadas, o presente artigo foi norteado pela seguinte questão de pesquisa: como apreendemos os objetos matemáticos? Buscamos respondê-la a partir de um estudo bibliográfico que contemplou três perspectivas teóricas: a teoria dos registros de representação semiótica, de Raymond Duval, a teoria das imagens e definições conceituais, David Tall e Shlomo Vinner, e a teoria das situações didáticas, de Guy Brousseau. Concluímos o trabalho elencando algumas orientações baseadas nessas teorias, a fim de auxiliar aquele que ensina Matemática a organizar situações didáticas aptas a fortalecerem as relações entre ensino e aprendizagem.

2 METODOLOGIA

Optou-se pela realização de uma pesquisa bibliográfica, pois esse tipo de metodologia permite “ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (Gil, 2008, p.50). Essa característica torna a pesquisa bibliográfica ideal para os fins deste artigo, já que o processo de apreensão de objetos matemáticos assume inúmeras facetas que são quase impossíveis de serem contempladas diretamente.

A pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e análise de documentos decorrentes de fontes científicas, como livros, monografias, dissertações, teses e artigos científicos. Ela pauta-se, portanto, na contribuição de diferentes autores sobre o tema; entretanto, mesmo que os documentos já tenham recebido tratamento analítico, “a

[2] Os termos *apreensão, aquisição* e *construção* (de conceitos/objetos) têm, neste artigo, guardadas as devidas proporções, o mesmo sentido: apropriação, por parte do aprendiz, de significados claros, estáveis, precisos e transferíveis referentes aos conteúdos matemáticos em questão.

pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras" (Marconi & Lakatos, 2003, p.183). De modo geral, a pesquisa bibliográfica implica um "conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório" (Lima & Mioto, 2007, p.38).

Considerando os pressupostos mencionados, realizou-se, inicialmente, a seleção e análise de diferentes textos científicos que apresentassem discussões de natureza psicológica, histórico-epistemológica e didática sobre o fenômeno da apreensão de objetos matemáticos. Em um segundo momento, com base nas leituras, procedeu-se à escolha das teorias a serem discutidas. No processo de escolha, levaram-se em conta três pontos fundamentais: 1) a dificuldade de apreender objetos que possuem múltiplas representações semióticas; 2) a importância das definições para a aquisição de conceitos matemáticos; e 3) o papel da contextualização do saber matemático com base na resolução de problemas para a conceitualização. Cada uma das teorias escolhidas debruça-se sobre um desses pontos. Em seguida, por meio do confronto das várias perspectivas oriundas dos textos, buscaram-se convergências que sinalizassem para formas de possibilitar uma organização do ensino que torne o saber acessível e desejável aos educandos.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Se os objetos matemáticos são imateriais e o modo de trabalhar em Matemática independe, na maior parte das vezes, de verificações empíricas, então como é possível acessar esses objetos, salientado que eles não são diretamente acessíveis à percepção sensível? Em meio a essa problemática, faz-se essencial compreender o que é uma representação, ou, mais precisamente, uma representação semiótica.

A *teoria dos registros de representação semiótica* assume que toda a comunicação em Matemática se fundamenta em representações. Suponha que certo professor tenha sido incumbido de apresentar o conceito de função para determinada turma. Muito provavelmente ele começaria definindo função e depois trabalharia com diagramas, fórmulas, tabelas e gráficos. Neste exemplo, o acesso ao objeto matemático função depende de uma escrita, uma notação, figuras, expressões algébricas e gráficos cartesianos, ou seja, de *representações semióticas*. Segundo Duval (2012), "As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e funcionamento" (p.269).

Uma representação semiótica é a forma (o representante) sob a qual um conteúdo (o representado) pode ser descrito. Ela é produzida com base em sistemas particulares de signos que possuem regras específicas para o tratamento dos conteúdos veiculados.

Para diferenciar os sistemas semióticos utilizados em Matemática daqueles utilizados fora dela, Duval (2013) utiliza o termo *registro*. Um registro "é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios" (Duval, 2012, p.266). Por exemplo, a expressão $y = x^2 - 5x + 6$ é uma representação semiótica de certa função quadrática e pertence ao registro algébrico, e este, por sua vez, é detentor de regras específicas, ou seja, trabalhar corretamente dentro desse registro implica dominar tais regras.

Como resposta à pergunta apresentada no início desta seção, pode-se afirmar que as representações semióticas são os instrumentos que, além de permitir alcançar e utilizar os objetos matemáticos, também "determinam os processos cognitivos e epistemológicos dos tratamentos matemáticos" (Duval, 2013, p.15).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação, ele deve permitir três atividades cognitivas fundamentais: a formação, o tratamento e a conversão (Duval, 2012).

A atividade de *formação* é comparável à realização de uma descrição e deve respeitar regras. Essas regras têm por função assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamentos. São regras de conformidade, ou seja, o aprendiz não precisa criá-las, mas somente utilizá-las para identificar as representações. Por exemplo, a escrita e a leitura de números no sistema de numeração hindu-arábico devem obedecer às noções de valor posicional e de base dez.

O *tratamento* é a transformação de uma representação no interior do registro no qual ela foi formada. Cada registro possui regras próprias de tratamento, com variados graus de dificuldade. A natureza e a quantidade dessas regras variam de um registro para outro. Por exemplo, o cálculo (numérico, algébrico, proposicional etc.) é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas.

A *conversão* é a transformação de uma representação em uma representação "equivalente" em um outro registro, sem alterar, em sua totalidade, os objetos matemáticos em jogo. Não há regras de conversão, assim como há regras de conformidade e de tratamento; o que é exigido na conversão é o estabelecimento da diferença entre forma e conteúdo. A ilustração é um exemplo de conversão; nesse caso, transforma-se uma representação linguística em uma representação figural. A conversão é didaticamente favorecida, quando as atividades propostas incentivam o aluno a investigar as variações da representação no registro de origem e as variações correspondentes em outro registro, o que permite perceber os contras e prós de cada representação.

Vale ressaltar que a conversão e o tratamento são atividades cognitivas diferentes e independentes. Um aluno pode muito bem ser capaz de realizar operações com números racionais na forma fracionária e com números racionais na forma decimal, mas, quando necessário, se mostrar incapaz de pensar um número fracionário em sua forma decimal e vice-versa, ou pior, não conseguir efetuar a conversão.

Para Duval (2012), a conversão é a atividade cognitiva fundamental mais negligenciada, pois considera-se, geralmente, que "a conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro" (p.277).

Relegar a atividade de conversão a segundo plano, percebendo-a como mera consequência das atividades de formação e tratamento, é desconsiderar o importante papel dessa atividade cognitiva para a apreensão dos objetos matemáticos.

A conversão está no centro da atividade matemática, sendo que as dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade envolvidas nas transformações de representações semióticas em outras (Duval, 2012).

> O que se constatou em diversas pesquisas em Educação Matemática é a dificuldade que o aluno encontra em passar de uma representação a outra. Ele consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto. Essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e "passar" de um a outro o mais naturalmente possível (Damm, 2012, p.168).

Mais adiante tornaremos a falar sobre a importância das conversões para a aquisição de conhecimentos matemáticos.

A teoria dos registros de representação semiótica traz à baila, para a compreensão de como se processa a aquisição de conhecimentos matemáticos, a seguinte ideia fundamental: a compreensão em Matemática depende mais da forma do que do conteúdo.

Isso fica claro quando percebemos que tanto as representações quanto a maneira de se trabalhar com elas depende do registro utilizado; mudando-se o registro, mudam-se, portanto, a forma e as regras.

No que toca à forma ser mais importante que o conteúdo, Duval (2013, p.14) afirma que "do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de *transformações de representações semióticas* e não de conceitos puramente mentais e, portanto, assemióticos".

Duval (2012) discute a ideia enganosa, geralmente aceita, de que uma representação semiótica serve apenas para comunicar as representações mentais (ideias, crenças, concepções). Critica essa visão reducionista da funcionalidade das representações, afirmando que elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, seja, por exemplo, no desenvolvimento das representações mentais, seja na realização de diferentes funções cognitivas, ou mesmo na produção de novos conhecimentos. A referida teoria atribui às representações semióticas um lugar de destaque, e não apenas secundário.

Entretanto, não se pode esquecer que o que importa não são as várias representações, embora sejam de suma importância, mas sim os objetos matemáticos que são representados (o conteúdo). Ora, os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a forma, isto é, com as representações que se fazem deles.

Conforme essa perspectiva teórica, a confusão entre forma e conteúdo representa um obstáculo para a aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, a distinção entre o objeto matemático e sua representação semiótica assume a qualidade de ponto estratégico para a compreensão da Matemática.

Como foi mencionado, o acesso aos objetos matemáticos não se dá de forma direta, não sendo possível fora das representações semióticas, o que torna a confusão representação-objeto praticamente inevitável.

Duval (2012) nomeia esse inimigo em potencial do processo de ensino e aprendizagem da Matemática de *paradoxo cognitivo do pensamento matemático*: "de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível" (p.268).

Esse paradoxo encontra força no desconhecimento da importância das representações semióticas para a apreensão dos objetos matemáticos, e é potencializado pela percepção de que a atividade matemática equivale à atividade conceitual.

Em forma de pergunta, o paradoxo cognitivo do pensamento matemático pode ser enunciado da seguinte maneira: *Como os aprendizes poderiam não confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas, se eles não têm acesso aos objetos matemáticos fora dessas representações?*

Duval (2012) apresenta duas repostas a essa pergunta, são elas: 1) o recurso a vários registros de representação semiótica; e 2) a coordenação de vários registros de representação semiótica. E essas respostas conduzem, naturalmente, a um novo questionamento: *Qual a necessidade da diversidade de registros de representação e por que a coordenação desses muitos registros é importante para o funcionamento do pensamento humano?*

O autor apresenta três respostas a essa nova pergunta: 1) economia de tratamentos; 2) complementaridade de registros; e 3) a conceitualização implica uma coordenação de registros de representação.

Resposta 1 – *Economia de tratamentos*. Imagine que alguém tivesse de resolver a seguinte operação com números racionais na forma fracionária: $1/2+1/4+1/5+3/4$. Um aluno com um razoável entendimento de operações com frações poderia resolver essa adição recorrendo, por exemplo, à construção de frações equivalentes às apresentadas, mas com denominadores iguais, via mínimo múltiplo comum (MMC). Ou poderia utilizar outro registro; um cujo custo de tratamento fosse menor. Se recorresse ao registro decimal, obteria: $0,5+0,25+0,2+0,75=1,7$. Ou seja, ao trabalhar com vários registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático, o aprendiz tem a oportunidade de trocar de registro e realizar tratamentos de forma mais eficiente e econômica.

Resposta 2 – *Complementaridade de registros*. Suponha que um indivíduo pretenda estudar a relação funcional entre duas variáveis, x e y. Ele possui uma tabela com uma grande quantidade de valores para as duas variáveis. A contemplação do comportamento da relação funcional entre as variáveis x e y ficaria prejudicada, se ele tentasse analisar diretamente os valores particulares que constituem a tabela. Mas um gráfico cartesiano sintetizaria a grande quantidade de informações contidas na tabela, revelando o aspecto global da relação. Quer dizer, dependendo da situação, uma representação pode se mostrar mais adequada que outra, mesmo que cada uma represente o mesmo objeto.

Cada registro tem limitações representativas específicas; nenhuma representação nos fornece a descrição da totalidade do objeto matemático representado. Como as informações veiculadas são sempre parciais, nenhum objeto matemático pode ser reduzido a uma de suas representações. E essa parcialidade acaba exigindo o trabalho com várias representações de um mesmo objeto. Dessa forma, a comparação de diferentes modos de representação de um mesmo objeto permite que percebamos as várias dimensões que o compõem, o que fornece um caminho para o entendimento do objeto matemático como um todo.

Resposta 3 – *A conceitualização implica uma coordenação de registros de representação*. Essa resposta baseia-se na ideia de que a apreensão de objetos matemáticos (conceitualização) depende da articulação de diferentes registros de representação semiótica. Segundo Duval (2012), “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (p.282).

Embora um contexto de aprendizagem pautado na utilização de uma variedade de registros seja fundamental, ele não garante a apreensão conceitual, pois é somente durante a articulação entre as múltiplas representações de um mesmo objeto que se percebe a diferença entre representante e representado. Daí a necessidade de se trabalhar com uma variedade de registros de representação e a importância da coordenação desses registros para o funcionamento do pensamento humano.

A teoria discutida nesta seção mostra como a forma é essencial para a aprendizagem dos conteúdos da Matemática, enfatizando que a atividade matemática, do ponto de vista cognitivo, não deveria ser analisada em termos de conceitos puramente mentais, mas sim a partir do funcionamento representacional próprio do registro no qual as representações são produzidas. A forma nos dá acesso aos objetos abstratos da Matemática, dita como devemos trabalhar com esses objetos, é absolutamente necessária para o funcionamento cognitivo do pensamento humano e sugere um novo caminho para compreendermos como se processa a apreensão dos objetos matemáticos.

4 TEORIA DAS IMAGENS E DEFINIÇÕES CONCEITUAIS

A fim de descrever e explicar o processo cognitivo de aquisição de conhecimentos matemáticos, atentando para o diálogo entre conceitos e definições, Tall e Vinner (1981) cunharam os termos definição conceitual e imagem conceitual.

A *imagem conceitual* designa a estrutura cognitiva total associada a um conceito, o que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados ao seu nome. Já o termo *definição conceitual* refere-se ao enunciado utilizado para especificar um conceito. Uma definição conceitual pode ser *formal*, ou seja, aquela aceita pela comunidade matemática em geral, ou *pessoal*, que é uma reconstrução particular feita pelo aprendiz com base na definição conceitual formal.

Tome, por exemplo, o conceito de força em Física. Quando ouvimos a palavra força, podemos evocar várias ideias, tais como empurrar, puxar, suspender. Podemos pensar na equação do princípio fundamental da dinâmica, na definição de força, ou ainda em forças específicas, como a força gravitacional e a força nuclear forte, enfim, são várias as representações que podem ser evocadas, todas concorrendo para a formação de um todo: a imagem conceitual de força.

Dito de outra forma, a imagem conceitual é uma entidade cognitiva não verbal formada pela soma de todas as representações verbais e não verbais de todos os tipos, associadas ao nome do conceito. As formas verbais surgem como uma fase posterior. Por exemplo, ao ouvirmos a palavra mesa, a imagem de certa mesa pode ser evocada por nossa mente, ou podemos nos lembrar de uma reunião que aconteceu ao redor de uma mesa, refeições realizadas em uma mesa, enfim, experiências vivenciadas ao estar sentado à mesa. São as experiências que dão significado à palavra mesa e a palavra mesa, por sua vez, recria imaginativamente essas experiências, ela as sintetiza e as representa. Portanto, sem representações visuais, impressões e experiências as representações verbais não passariam de meros formalismos sem sentido e sem utilidade.

Segundo essa perspectiva teórica, memorizar a definição de um conceito não denota que o indivíduo tenha compreendido o seu significado. Para que a compreensão ocorra, é necessário que se associe uma série de figuras mentais, propriedades e processos ao nome do conceito, construindo uma estrutura cognitiva que nutra de significados o objeto matemático representado.

Desta forma, a imagem conceitual permite a assimilação da definição conceitual formal. Quanto mais desenvolvida for a imagem conceitual, tanto mais capaz ela será de suportar a compreensão da definição formal.

Por outro lado, é a definição conceitual formal que modela a imagem conceitual, e a torna coerente com a epistemologia da disciplina – o que desprende o conceito da exclusividade de impressões e representações mentais pessoais, que podem estar em desacordo com a definição formal. Nessa perspectiva, a aquisição de conceitos matemáticos pressupõe um diálogo entre imagem conceitual e definição conceitual.

Um indivíduo pode muito bem saber utilizar um conceito em determinados contextos sem saber defini-lo, visto que um conceito transcende as diferentes formas de representá-lo. Ou saber defini-lo exatamente como está no manual, mas acabar se contradizendo em situações cujo uso da definição é essencial. Nessas duas situações há falta de diálogo entre definição conceitual e imagem conceitual. Tem-se apenas um conceito instável, que pode ser útil em situações restritas, mas que a qualquer momento pode se mostrar um verdadeiro obstáculo para a compreensão dos conteúdos em jogo.

Tall e Vinner (1981) chamam *imagem conceitual evocada* qualquer fragmento da imagem conceitual que é ativado em determinado momento, por meio de certo estímulo. Se um sujeito estivesse diante de um problema que solicitasse o cálculo da intensidade da força resultante que atua sobre um corpo, esse tipo de problema, dependendo da experiência do indivíduo, poderia ser um estímulo para que ele ativasse a equação do princípio fundamental da dinâmica. Sem dúvida, a qualidade desses fragmentos depende, em especial, da experiência e da aprendizagem.

Essas partes da imagem conceitual, segundo Tall e Vinner (1981), podem ser contraditórias entre si e com a estrutura cognitiva geral, tendo em vista o exercício de algumas dessas partes e a negligência em operacionalizar as outras. Nesse contexto, tem-se o que os autores chamam *fator de conflito potencial*.

Potencial porque partes incoerentes da imagem conceitual podem coexistir, desenvolvendo-se paralelamente, quando não percebidas como contraditórias. Mas a qualquer momento podem colidir, causando confusões imediatas ou desconfortos inconscientes. Isso ocorrerá quando aspectos conflitantes forem evocados simultaneamente, como consequência de alguma solicitação externa, como uma pergunta na avaliação; nesse caso, tais incoerências são chamadas *fatores de conflito cognitivo*.

Assim, os fatores de conflito são potenciais, quando coexistirem sem constituírem obstáculos para a aprendizagem. Mas quando esses aspectos contraditórios da imagem conceitual forem ativados simultaneamente, criando situações ambíguas, tornam-se fatores de conflito cognitivo.

O tipo mais grave de fator de conflito potencial é aquele em que a imagem conceitual está em contradição com a própria definição conceitual formal. Esses fatores podem impedir seriamente o aprendizado da linguagem formal de uma área do conhecimento (Tall & Vinner, 1981).

A ausência de uma relação dialética entre imagem conceitual e definição conceitual é fruto do trabalho pautado em contextos lineares, nos quais problemas típicos são apresentados e respostas típicas são exigidas. Esses contextos estimulam o exercício de algumas partes da imagem conceitual, enquanto outras são negligenciadas dado o alcance limitado da abordagem exemplo–definição–exercício, o que contribui para a construção de um conceito instável.

Sem o diálogo, uma imagem conceitual pode ser formada e uma definição memorizada e coexistirem paralelamente, mas quando esses aspectos conflitantes forem evocados simultaneamente podem gerar uma situação ambígua, privando o conceito de qualquer utilidade.

As definições têm um importante papel na apreensão de conceitos científicos. Na Matemática, a compreensão de seus objetos a fim de torná-los operacionais depende muito de uma definição precisa, clara e concisa, pois o enunciado que especifica o objeto dará vida ao mesmo, estabelecendo limites, especificando até onde este objeto é diferente de outro aparentemente semelhante e possibilitando a sua utilização na resolução de problemas. Além disso, “as definições, em contextos científicos, impõem diferentes hábitos de raciocínio necessários à evolução do conceito” (Silva, 2011, p.73). Assim sendo, a aquisição de conceitos matemáticos deve combinar, numa ação recíproca, a definição conceitual e a imagem conceitual (Andrade & Saraiva, 2012).

No entanto, como foi mencionado, um aluno pode apresentar uma definição formal precisa, mas acabar se contradizendo em situações que exijam o seu uso. Tal ideia é discutida por Saraiva e Teixeira (2009). Os sujeitos da pesquisa desses autores conseguiram enunciar a definição de função, mas falharam quando solicitados a escolher em um conjunto de gráficos os que representavam funções. De um modo geral, os resultados dessa pesquisa evidenciaram os prejuízos que a falta de diálogo entre imagem conceitual e definição conceitual podem acarretar. Portanto, podemos perguntar: *o que deve ser feito para fomentar esse diálogo?*

Tall e Vinner (1981) esclarecem que a aquisição da estrutura formal do conteúdo é necessária, pois torna a imagem conceitual mais elaborada e mais coerente com a epistemologia da matéria, mas não é suficiente para a aprendizagem. Destacam que o ensino da Matemática não deve visar apenas às formalizações e à reprodução de definições conceituais formais, que formam apenas uma das ramificações da rede de significados, mas ao enriquecimento da imagem conceitual dos aprendizes. E é esse enriquecimento que garante o diálogo entre imagens e definições conceituais, conduzindo os aprendizes ao aprendizado dos conteúdos matemáticos com compreensão.

O processo de apreensão de um conceito exige que a definição modele a imagem conceitual de tal maneira que ela se encaixe perfeitamente na sua definição. A imagem conceitual é modelada por experiências vivenciadas em sala de aula, situações de ensino apresentadas em livros-texto, como também por tarefas cognitivas realizadas pelo indivíduo; ou seja, diferentes conjunturas podem contribuir para que a imagem conceitual seja modelada de acordo com a definição, e essa multiplicidade de contextos deve ser explorada no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos da Matemática.

5 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A *teoria das situações didáticas* é um modelo teórico desenvolvido por Guy Brousseau, em contraposição aos trabalhos das décadas de 60 e 70, que visavam a promover o estilo formalista conhecido como movimento da matemática moderna. Sua teoria é baseada em estudos construtivistas, oriundos da teoria da epistemologia genética de Jean Piaget.

Na visão piagetiana, o conhecimento lógico-matemático resulta da criação e combinação de relações (mentais) que o sujeito estabelece entre os objetos, ao agir sobre eles. Por exemplo, a semelhança ou diferença entre objetos não está, isoladamente, em nenhum deles; ou seja, não são propriedades desses objetos. São, na verdade, relações criadas na mente do sujeito, no momento em que ele os relacionou. De modo similar, a classificação, a seriação, a relação “maior que” e a relação “menor que” também fazem parte da experiência lógico-matemática.

Isto sugere que o conhecimento lógico-matemático não é abstraído diretamente dos objetos, nem é adquirido por transmissão social, como acontece com as normas das convenções sociais. O conhecimento lógico-matemático é construído. E essa construção é favorecida na medida em que se possibilita aos educandos experiências e vivências nas quais possam manipular e relacionar objetos, interagir com outras pessoas e ser questionados e desafiados dentro dos limites de suas possibilidades cognitivas. É neste contexto que se insere a teoria das situações didáticas.

Opondo-se à ideia de apresentar de forma precoce os aspectos formais dos conteúdos matemáticos, privilegiando, dessa forma, o simbolismo da linguagem matemática, a teoria das situações didáticas é colocada a partir da questão da apresentação dos conteúdos, e busca, no vínculo com a realidade, um campo de significado do saber para o aprendiz. Essa teoria valoriza os conhecimentos mobilizados pelo sujeito e o seu papel ativo no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Freitas (2012, p.78), "Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios".

Nessa perspectiva teórica, o professor deve desenvolver atividades voltadas para possibilitar a aprendizagem de um conceito específico, não apenas comunicando um conhecimento, mas apresentando um bom problema: um que engaje o aprendiz de tal forma que ele aceite o desafio de resolvê-lo e inicie um trabalho autônomo.

Sob a gerência do professor, sempre que possível, o aluno deve ser aproximado do trabalho de um pesquisador, colocando questões, formulando e testando hipóteses, explicando, provando a veracidade de suas respostas e socializando os resultados, para que possa agir sobre o saber matemático, transformando-o em conhecimento.

Segundo Brousseau (1996), o trabalho do professor é o inverso do trabalho do investigador, uma vez que ele tem de produzir uma "recontextualização" dos conhecimentos, enquanto o pesquisador busca sintetizar e formalizar suas descobertas, descontextualizando-as. Nesse sentido, o professor deve simular na sala de aula uma microssociedade científica, proporcionando a seus alunos os meios para descobrirem aquilo que é saber cultural e comunicável dentro do que pretendeu ensinar-lhes.

Embora docentes e estudantes sejam atores indispensáveis no processo de ensino e aprendizagem, a teoria das situações didáticas destaca um terceiro elemento: o *mileu*, ou seja, o meio no qual esse processo se desenvolve.

O *mileu* é tudo aquilo que interage com o aprendiz de forma antagônica, causando contradições, conflitos e desafiando o aluno a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de uma situação-problema. Isto ocorre, por exemplo, em um jogo, que estimula o jogador a usar o que já sabe para criar uma estratégia que seja adequada.

O exemplo do jogo ilustra que a aprendizagem está intrinsecamente relacionada com a criatividade, ou seja, aprender pressupõe uma atividade em que tanto os conhecimentos e habilidades previamente aprendidos como os componentes da situação problemática em questão são mobilizados para atingir determinado objetivo.

Pais (2011, p.69) acrescenta que “a aprendizagem se expressa pela componente da criatividade, pois, para resolver um problema, é preciso que o aluno ultrapasse o seu próprio nível de conhecimento, revelando a operacionalidade dos conteúdos dominados até então”.

Uma *situação didática* é um conjunto de relações estabelecidas explícita ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos e o professor, num certo meio que envolve instrumentos e objetos, com a finalidade de possibilitar a esses alunos a aquisição de um saber constituído ou em vias de constituição (Brousseau, 1996).

Uma situação didática envolve uma intencionalidade pedagógica: o professor quer orientar o aluno para a aprendizagem de determinado conteúdo. Ela se constitui numa forma de apresentação de conteúdo específico, baseada no trabalho com a resolução de problemas e que valoriza os momentos em que o aluno, por seu próprio esforço, desenvolve de forma autônoma seus próprios métodos de resolução dos problemas. Para tanto, o professor deve estruturar as situações didáticas de modo a causar no aprendiz, durante seus momentos de esforço individual, a necessidade de adequar o seu conhecimento às condições do problema proposto. As influências de uma situação didática devem se estender para além da sala de aula.

Por meio de situações didáticas, o professor deve oferecer os meios e as condições para que o aluno se aproprie das situações. Caso isso ocorra, a responsabilidade da resolução do problema é deslocada para o aluno. Esse movimento de transferência de responsabilidade, que envolve o desejo pessoal do aluno em resolver o problema proposto, é chamado *devolução.*

> A devolução, aqui, tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ele aceita participar desse desafio intelectual e se consegue sucesso nesse empreendimento, então, inicia-se o processo da aprendizagem (Freitas, 2012, p.83).

Após a devolução, inicia-se a outra dimensão de uma situação didática: a *situação adidática*. Nesta etapa, a intenção de ensinar não tem uma influência direta sobre o trabalho do aprendiz. É o momento em que o aluno desenvolve certa autonomia intelectual e, mesmo sem um controle didático do professor, contribui para a construção de conhecimentos matemáticos.

A inserção do aprendiz em situações que valorizam o seu compromisso na construção dos seus conhecimentos não se trata de uma tentativa de abandono por parte do professor. Pelo contrário, a construção de situações que possibilitem a devolução e desencadeie o trabalho autônomo do aluno é um desafio didático. Nesse sentido, considerar as situações adidáticas é ultrapassar a velha concepção de que o professor seja apenas um transmissor de conhecimentos.

Assim, possibilitar a progressão da aprendizagem escolar, por meio de situações adidáticas, implica a busca de um equilíbrio na quantidade de informações que deve ser passada aos alunos. Se a quantidade de informações for insuficiente, é bem provável que o aprendiz não consiga reelaborar seus conhecimentos para propor estratégias de resolução para os problemas colocados; se a quantidade for excessiva, comete-se os mesmos erros da forma tradicional de ensinar.

O sucesso de um aluno numa situação adidática significa que ele sintetizou algum conhecimento, pois se envolveu em um momento de busca de solução, no qual diversos procedimentos de raciocínio ocorreram sem a intervenção do professor. O professor deve planejar situações didáticas potencialmente ricas em situações adidáticas, estimulando o aluno a engajar-se pela linha da autonomia durante todo o processo de ensino e aprendizagem.

> Nessa teoria, há um pressuposto de que cada conhecimento matemático específico pode ser caracterizado por uma ou mais situações adidáticas que lhe dão sentido [...] Dessa forma, uma atividade matemática é tão melhor quanto mais favoreça o aparecimento de situações adidáticas (Freitas, 2012, p.94).

Brousseau (1996), a fim de operacionalizar uma análise didática, separou as situações didáticas em quatro categorias: 1) situações de ação; 2) situações de formulação; 3) situações de validação; e 4) situações de institucionalização.

Situação de ação. Nesta situação, engajado ativamente na busca da solução do problema proposto pelo professor, o aluno apresenta uma solução não baseada no aspecto teórico dos conteúdos envolvidos, mas quase totalmente fundamentada no aspecto experimental do conhecimento, proveniente de ações mais imediatas e operacionais. Nesse tipo de situação, o aprendiz ainda não se preocupa com a explicitação de como elaborou a resposta, ou com a justificativa de sua validade.

Situação de formulação. Nesse tipo de situação, há certo avanço em relação às situações de ação, pois o aprendiz passa a utilizar explicitamente, na resolução do problema, algum esquema teórico, contendo um raciocínio mais elaborado do que um procedimento experimental, além de aplicar conhecimentos anteriores. Mesmo com esse progresso, o saber ainda não tem uma função de justificação e de controle das ações. Trata-se de situações em que o aluno faz afirmações sobre o problema sem a intenção de julgar explicitamente a validade do conhecimento, ou seja, ele não indica expressamente os porquês da validade, embora tenha implicitamente intenções de validá-lo.

Situação de validação. Neste momento, o aluno já utiliza mecanismos de prova e o saber é utilizado com essa finalidade. Essas situações estão relacionadas com a aplicação e com a articulação de conceitos, sendo diretamente voltadas para o problema da verdade. Nesse tipo de situação, o aluno elabora algum tipo de prova daquilo que concluiu de alguma forma pela ação. Para suas elaborações, tanto na situação de formulação quanto na de validação, o aluno pode recorrer a dois tipos de linguagem: a natural e a simbólica, sendo mais comum o uso simultâneo das duas formas.

Situação de institucionalização. As três situações supracitadas são adidáticas, enquanto esta é somente didática, pois está sob o controle didático do professor. Esta é a situação na qual o professor organiza uma síntese dos principais aspectos formais do conteúdo, procurando fazer a passagem do conhecimento do plano individual e subjetivo à dimensão de referência histórica e cultural do saber.

O problema proposto no início da situação didática serve para dar significado ao conteúdo relacionado a ele, mas o conhecimento oriundo da interação do aluno com o problema é limitado às particularidades desse problema, por isso justifica-se a situação de institucionalização. Seu objetivo é estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento, para a sua utilização em situações posteriores.

A classificação das situações didáticas não tem o objetivo de induzir uma separação nítida entre elas, pois aparecem entrelaçadas. A intenção é operacionalizar e precisar a análise didática, tendo em vista a especificidade dos tipos de procedimentos que se espera do aluno. Ou seja, são situações distintas, mas inseparáveis. Representam, portanto, os desdobramentos do complexo conceito de situação didática.

É importante destacar que as múltiplas ligações que se estabelecem no trinômio aluno-professor-saber não ocorrem diretamente, elas não são sociologicamente neutras. Essas ligações sofrem a interferência de regras que se baseiam em percepções, crenças, concepções. Essas regras, que se referem às mútuas obrigações que se estabelecem entre o professor e os alunos, e que dependem estritamente dos conteúdos em questão, constituem o chamado *contrato didático*.

Para Pais (2011, p.77), o contrato didático refere-se

> ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo [...] No nível de sala de aula, o contrato didático diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre o professor e os alunos. Por certo, as ramificações dessas obrigações se estendem e se multiplicam para fora do espaço físico da sala de aula, revelando a multiplicidade de influências inerentes ao contexto escolar.

Uma das características do contrato didático é que suas regras são quase sempre implícitas, mas elas se manifestam principalmente quando são transgredidas. E como o contrato didático depende do conteúdo visado, algumas características do saber matemático, tais como formalismo, abstração e rigor, condicionam algumas dessas regras.

Chevallard (1988) analisa uma experiência realizada por uma equipe do *Institut de Recherche sur L'enseignement des Mathématiques de Grenoble*, na França, cujos resultados foram difundidos entre os profissionais do ensino de matemática com o nome genérico de “A idade do Capitão”.

O trabalho da equipe iniciou-se com a proposta do seguinte problema a 97 alunos do curso elementar (7-8 anos de idade): Num navio há 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão? 76 alunos calcularam a idade do capitão operando com os números do enunciado.

O autor infere que os alunos dispõem de duas “lógicas”. Uma delas depende do contrato didático vigente e a outra se revela fora do espaço da sala de aula. Os alunos que responderam ao problema utilizaram a “lógica” que está subordinada ao contrato didático, eles obedeceram à cláusula que diz: o problema tem apenas uma resposta e chegamos a ela através da utilização de todos os dados do enunciado, dentro das possibilidades de ação que o conteúdo em questão pressupõe, sem que haja necessidade de nenhuma outra indicação. A segunda lógica é aquela que questiona a pertinência dos dados contidos no problema proposto, mas que se encontra silenciada, pois, segundo o contrato vigente, o que se quer é a resposta do problema e somente ela será objeto de avaliação.

O problema “A idade do capitão” deixa claro que, no espaço da sala de aula, existem regras suficientemente poderosas para conduzir os aprendizes a responderem automaticamente a questões absurdas.

O conjunto de obrigações recíprocas que caracterizam o contrato didático depende do conhecimento matemático visado, bem como da estratégia de ensino adotada. Desse modo, é impossível pormenorizar todas essas obrigações. Entretanto, o mais importante não é especificar a totalidade dessas obrigações, mas sim os pontos de *ruptura do contrato didático* (Brousseau, 1996).

O autor esclarece que a ruptura do contrato ocorre quando a aquisição dos conhecimentos não se produz; neste momento, abre-se um processo aos parceiros da relação didática; ao aluno, que não fez aquilo que se tem o direito de esperar dele, mas também ao professor, que não fez aquilo que era sua obrigação, mesmo que implícita.

Pais (2011) cita três exemplos de ruptura do contrato didático. Por parte do aluno, quando ele mostra desinteresse pela resolução dos problemas que o professor propõe no desenrolar de uma situação didática, ou quando ele não se envolve devidamente nas atividades propostas. Por parte do professor, quando o mesmo propõe a resolução de um problema cuja estratégia de solução transcende o nível cognitivo do aluno. E ainda por parte do professor, quando ele perde a paciência e passa a aplicar retaliações ao aluno que se comportou de forma inadequada, postura esta incompatível com a sua função de orientador das situações de aprendizagem.

Para uma melhor compreensão das várias relações que se estabelecem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é importante desvelar algumas dessas regras e estimar possíveis pontos de ruptura. Conforme Silva (2012, p.54), “Em muitos casos, é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo [contrato didático] para o avanço do aprendizado”.

Em resumo, pelos pressupostos da teoria das situações didáticas, o professor deve proporcionar situações de aprendizagem que envolvam os alunos, simulando ambientes de investigação e propondo problemas, para que eles “refaçam” alguns passos dados por aqueles que produzem conhecimento.

O professor escolhe um bom problema, comunicando seu enunciado e o contextualizando, buscando sempre criar condições para que o aluno tome para si a responsabilidade de resolvê-lo. Dessa forma, o professor procura transmitir ao aluno uma situação adidática que provoque nele a interação mais independente e fecunda com o problema proposto.

A partir do momento em que o aluno se envolve pessoalmente com a resolução do problema, há uma transferência de responsabilidade e o progresso da aprendizagem transcende a sala de aula, desenvolvendo-se numa busca autônoma pela solução.

Nesse momento, o meio exige que o aluno mobilize seus conhecimentos e os elabore às suas condições. Se o aprendiz alcançou a resposta correta, podemos afirmar que ele adquiriu verdadeiramente esse conhecimento, pois foi capaz de aplicá-lo por si próprio aos problemas propostos, fora do contexto do ensino e na ausência de qualquer indicação intencional.

Após todo o processo autônomo, o controle didático do professor é restaurado. Ele deve selecionar algumas questões essenciais e aspectos formais do conteúdo, procurando elevar o conhecimento do plano subjetivo e particular à dimensão histórica e cultural do saber científico. Conforme Brousseau (1996, p.51), "Na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação adidática e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação".

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quadro 1: Resumos das Teorias

Teoria dos Registros de Representação Semiótica	A teoria dos registros de representação salienta que, na atividade matemática, a forma é mais importante que o conteúdo, isso porque tanto a maneira de operar com os objetos matemáticos quanto a apreensão conceitual dependem de transformações de registros de representação e não de conceitos puramente mentais. Nessa perspectiva, a compreensão de um conteúdo conceitual depende da coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica, sob pena de se confundir o objeto matemático com uma de suas representações.
Teoria das Imagens e Definições Conceituais	Segundo a teoria das imagens e definições conceituais, para adquirir um conceito não basta a memorização da definição. Para que a compreensão ocorra de fato, é necessário que se associe uma série de imagens mentais, propriedades e processos ao nome do conceito. Por outro lado, o processo de apreensão de um conceito exige que a definição modele a imagem conceitual de tal maneira que ela se encaixe perfeitamente na sua definição. Em síntese, a aquisição de conceitos matemáticos pressupõe uma interação entre imagem conceitual e definição conceitual.
Teoria das Situações Didáticas	De acordo com a teoria das situações didáticas, o professor não deve apenas comunicar um conteúdo ao aluno, mas sim contextualizar o saber matemático em questão e agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolver os problemas propostos. No momento em que o aluno se envolve numa busca autônoma pela solução, o meio exigirá que ele mobilize seus conhecimentos e os elabore às suas condições. Se o aprendiz alcançou a resposta correta, podemos afirmar que ele adquiriu verdadeiramente esse conhecimento, pois foi capaz de aplicá-lo por si próprio aos problemas propostos, fora do contexto do ensino e na ausência de qualquer indicação intencional. Nesse sentido, a aprendizagem é a adaptação a uma situação adidática.

Fonte: Elaborado pelos autores

Essas teorias não são absolutamente incompatíveis, apenas descrevem diferentes modos de se favorecer a apreensão/aquisição/construção de conceitos matemáticos.

Assim sendo, elencamos, à guisa de conclusão, algumas orientações baseadas nessas teorias, que podem ser simultaneamente consideradas, caso a intenção seja organizar situações didáticas capazes de fortalecerem as relações entre ensino e aprendizagem:

1. na atividade matemática, a forma é mais importante que o conteúdo, já que tanto o tratamento dos conhecimentos como a conceitualização dependem de transformações de representações semióticas e não do conteúdo envolvido;
2. é necessário organizar ambientes de aprendizagem que, além de propiciarem o trabalho com múltiplos registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático, também favoreçam a articulação entre esses vários registros de representação;
3. a articulação de registros de representação é didaticamente favorecida quando as atividades propostas incentivam o aluno a investigar as variações da representação no registro de origem e as variações correspondentes em outro registro, o que permite entender os contras e prós de cada representação e perceber o objeto matemático como um todo;
4. o enriquecimento da imagem conceitual dos aprendizes, que envolve o exercício de várias partes que compõem esse todo, permite a assimilação das definições formais e a construção de um conceito estável;
5. a imagem conceitual deve ser modelada de acordo com a definição formal, para que a estrutura cognitiva resultante seja compatível com a estrutura formal da disciplina e sirva eficazmente como fonte de argumentações plausíveis durante a resolução de problemas em contextos variados;
6. a aquisição de conceitos matemáticos deve combinar, numa ação recíproca, a definição conceitual e a imagem conceitual.
7. os aprendizes devem participar de situações que simulem ambientes de investigação, para que possam vivenciar alguns passos dados por aqueles que produzem conhecimento, como as inúmeras reflexões, as tentativas infrutíferas e as mudanças de percurso;
8. o professor deve comunicar um conhecimento, contextualizando-o por meio de um bom problema, e agir de tal forma que o aprendiz tome para si a responsabilidade de resolvê-lo;
9. a quantidade de informações passadas ao aprendiz precisa ser dosada, para que ele tenha os subsídios mínimos que a resolução do problema exige e o essencial do raciocínio não lhe seja repassado precipitadamente;

10. o professor precisa entender que as múltiplas relações pedagógicas que se estabelecem entre professor, alunos e saber matemático sofrem a influência de regras, e que estas regras devem ser conhecidas, para que os erros dos alunos sejam interpretados de forma coerente e usados de forma produtiva.

REFERÊNCIAS

Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(2), 137-169.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e métodos da didática da matemática. In J. Brun (Org.), *Didática das Matemáticas* (pp. 35-111). Lisboa: Instituto Piaget.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique: deux études sur les notions de contrat et de situation*. Marseille: Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.

Damm, R. F. (2012). Registros de representação. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação Matemática: uma (nova) introdução* (pp. 167-188). São Paulo: EDUC.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, *7*(2), 266-297.

Duval, R. (2013). Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. (Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e a Veridiana Rezende). *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campo Mourão, Paraná, *2*(3), 10-34, jul./ dez.

Freitas, J. L. M. (2012). Teoria das situações didáticas. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação Matemática: uma (nova) introdução* (pp. 77-111). São Paulo: EDUC.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas.

Lima, T. C. S., & Mioto, R. C. T. (2007). Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. *Revista Katálysis*, Florianópolis, *10*, 37-45.

Marconi, M. A., & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas.

Pais, L. C. (2011). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

Piaget, J. (1973). Comments on mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education: proceedings of the 2nd International congress on mathematical education* (pp. 79-87). London: Cambridge University Press.

Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, Palermo, Italy, *19*(4), 83-95.

Silva, A. L. V. (2011). *Números reais no ensino médio: identificando e possibilitando imagens conceituais* (Tese de Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Silva, B. A. (2012). Contrato didático. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação Matemática: uma (nova) introdução* (pp. 49-75). São Paulo: EDUC.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics: with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, *12*(2), 151-169.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Como Apreendemos os Objetos Matemáticos: uma análise à luz de três teorias

Jerson Sandro Santos de Souza
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Professor efetivo da Secretaria Municipal de Educação, Manaus-AM, Brasil.
jersoncobain@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9812-5009
http://lattes.cnpq.br/9398786685141669

Leandro de Oliveira Souza
Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.
Professor Adjunto III.
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Ituiutaba-MG, Brasil.
https://orcid.org/0000-0003-1626-0766
http://lattes.cnpq.br/5133010305349485

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Santa Cecília, nº 27, Bairro Colônia Santo Antônio, 69093-210, Manaus, AM, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. S. S. Souza.
Coleta de dados: J. S. S. Souza.
Análise de dados: J. S. S. Souza; L. O. Souza.
Discussão dos resultados: J. S. S. Souza; L. O. Souza.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica

PUBLISHER
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO
Recebido em: 09-11-2019 – Aprovado em: 25-05-2020