Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ENGENHARIA DIDÁTICA (ED): ANÁLISES PRELIMINARES E *A PRIORI* PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE *CLAIREAUT*

Didactical Engineering (DE): preliminary and a priori analysis for the Claireaut´s ordinary differential equation

Francisco Regis Vieira **ALVES**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Fortaleza, CE.
fregis@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

O estudo da teoria das equações diferenciais ordinárias está presente em vários cursos de graduação em Matemática no Brasil. A despeito do interesse desenvolvido pelos didatas franceses atentos ao seu ensino e aprendizagem, consta-se que muitos dos entraves registrados ainda consubstanciam uma situação que torna indefectível uma abordagem ortodoxa no “lócus” acadêmico. Diante dessa problemática, este trabalho apresenta, descreve e postula, do ponto de vista conceitual e teórico, elementos aplicáveis e reprodutíveis para o ensino da equação de Claireaut. Nele se discute as análises preliminares e “a priori”, previstas pela Engenharia Didática. O modelo de Claireaut é interessante por possibilitar a utilização do software GeoGebra para explorar propriedades qualitativas das soluções com ênfase na visualização.

Palavras-chave: Equação de Claireaut, Engenharia Didática, Ensino, Visualização.

ABSTRACT

The study of the theory of ordinary differential equations is present in various undergraduate courses in Mathematics in Brazil. Despite the interest developed by the French academics who are attentive to their teaching and learning, it´s find that many barriers still registered and embody a situation that makes unfailing an orthodox approach to "locus" academic. Faced with this problem, this paper presents, describes and postulates, the conceptual and theoretical point of view, applicable and reproducible elements for teaching Claireaut equation. The study discusses the preliminary analyzes and "a priori", provided by the Didactic Engineering. The Claireaut model is interesting because it allows the use of GeoGebra software to explore qualitative properties of solutions with emphasis on visualization.

Keywords: Claireaut´s equation, Didactical engineering, Teaching.

1 INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) representa elemento compulsório na formação, no *locus* acadêmico, em determinados cursos de graduação, mormente os cursos de licenciatura em Matemática e bacharelado em Matemática. Por outro lado, não nos parece oportuna uma visão parcial e acrítica sobre seu ensino e sua aprendizagem no ambiente acadêmico. Com este tirocínio perquiridor, assinalamos as advertências cabíveis produzidas por Figueiredo & Neves (2002, p. 6) quando mencionam que "muito se fala sobre problemas, em cursos de Matemática. Muito pouco se diz sobre a origem desses problemas e do que fazer com as respostas".

Ora, as ponderações de Figueiredo & Neves (2002) demarcam a necessidade de uma vigilância constante para com o ensino das EDO´s, de modo particular, o combate ao avanço de hábitos indevidos e/ou equivocados sobre o saber matemático. Com efeito, Figueiredo & Neves (2002, p. 48) comentam sobre "a impossibilidade de resolver a maior parte das equações, em forma explícita, põe-se a questão de saber se o problema sob estudo tem solução". Assim, mensagem anterior dos importantes autores atua no sentido de acompanhar uma perspectiva açodada dos aprendizes que, de modo não marginal, reduz a Matemática ao "malabarismo algébrico" de equações intrincadas e estruturantes.

Por outro lado, a evolução histórico-epistemológica (KATZ, 2009) nos permite a extração de ensinamentos alvissareiros que carecem de maior espaço e ampla divulgação no ambiente acadêmico. Com efeito, um elemento de ordem epistemológica, impulsionadora do processo evolutivo da teoria das EDO´s pode, em muitas situações, ser observado a partir do posicionamento dos matemáticos profissionais diante de sérios obstáculos científicos, aparentemente incontornáveis ou de intrincado tratamento.

Nesse sentido, Figueiredo & Neves (2002, p. 49) recordam que "um dos problemas básicos no estudo da equação diferencial $y'=f(x,y)$ é a determinação de suas soluções [...]. Entretanto, a obtenção de soluções para $y'=f(x,y)$ da forma fechada, isto é, numa forma explícita em termos de funções elementares, é um problema impossível de resolução para o caso geral de equações [...]". Ora, de modo inconteste, os autores acima apontam as limitações dos instrumentos conceituais matemáticos, em um quadro analítico, capazes de solucionar e descrever soluções para as EDO´s, tendo em vista determinadas "dificuldades técnicas apreciáveis" (Figueiredo & Neves, 2002, p. 49). Não obstante, o pensamento matemático evolui de modo inexorável, e se apropria de novas perspectivas e pontos de vista[1] para o trato e a resolução, ao menos, indireta do mesmo problema matemático. Assim, Figueiredo & Neves (2002) comentam ainda que:

> Em muitos problemas de aplicação não se faz necessário saber a expressão algébrica das soluções da equação diferencial. Basta saber propriedades dessas soluções, como por exemplo, seu comportamento quando x tende para algum valor pré-estabelecido. Com isso em vista, é interessante e importante estudar as propriedades geométricas da família das soluções da equação diferencial. Este é outro problema básico no estudo das equações diferenciais, que pertence à chamada teoria qualitativa. (Figueiredo & Neves, 2002, p. 49).

Assim, no excerto anterior, observamos a exigência de uma mudança substancial de perspectiva, na medida em que consideramos a Teoria Qualitativa (Braun, 1991) como um ângulo de vanguarda para o estudo das EDO´s. Não obstante, os indícios de tal perspectiva pode ser detectada há décadas ou séculos atrás. Com efeito, na figura 1, Levy (1912) discute de modo pioneiro, alguns elementos qualitativos concernentes ao comportamento de soluções de equações e a correspondente determinação de sua envoltória. Na figura 1, ao lado esquerdo, divisamos o processo infinitesimal de aproximação dos pontos de interseção das curvas envolventes, tendo em vista a determinação final de sua envoltória, bem como uma interpretação dinâmica do referido processo (Alves, 2014; 2016b).

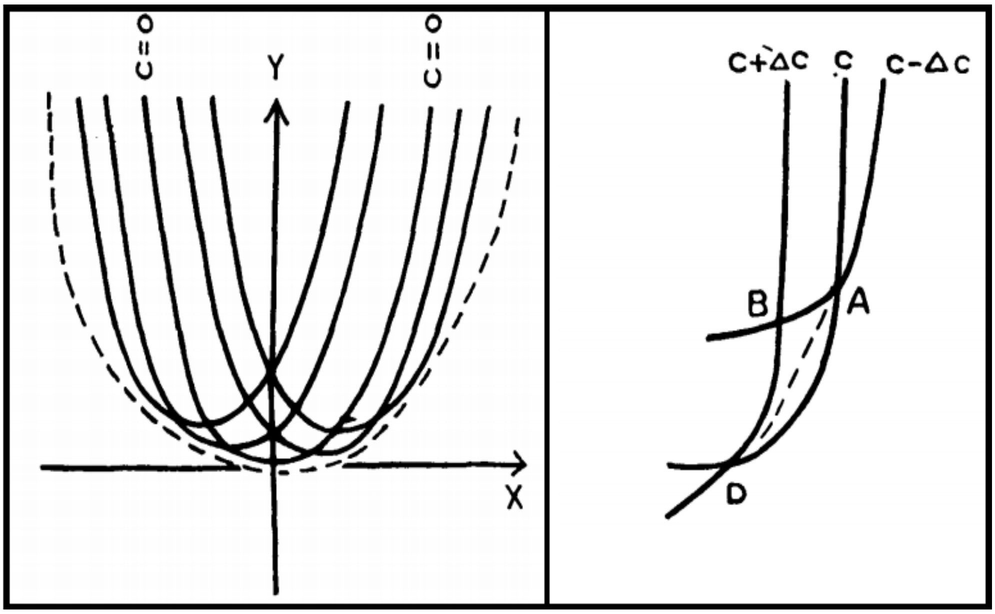

Figura 1: Levy (1912) acentua o caráter geométrico de um sistema de parábolas que determinam um comportamento de aproximação e determinação da envoltória.
Fonte: Levy (1912, p. 46)

[1] Raffy (1895, p. 50) recorda que segundo o ponto de vista empregado, há séculos, por Leonard Euler, para a solução de certas equações, “suas soluções, mais intuitivas, do que estruturalmente formuladas, se mostraram distantes de serem completas”.

Ademais, ao lado direito, Levy considerou aproximações infinitesimais (sucessivas) tendo em vista a paulatina determinação da curva ou envoltória, como uma espécie de "curva limite" (outra categoria de limite). Cabe acentuar o empenho do autor no sentido de transmitir/registrar o significado heurístico e geométrico do processo. Logo em seguida, na figura 2, divisamos um desenho atribuído ao próprio matemático françês Alexis Claude Claireaut (1713 – 1765) vinculado ao modelo de generalização e possibilita a passagem para o caso de mais variáveis, na resolução de determinadas equações de cunho mais geral. Mais uma vez registramos a intepretação geométrica e de ordem qualitativa, como elemento apoiador de um pensamento matemático estruturante.

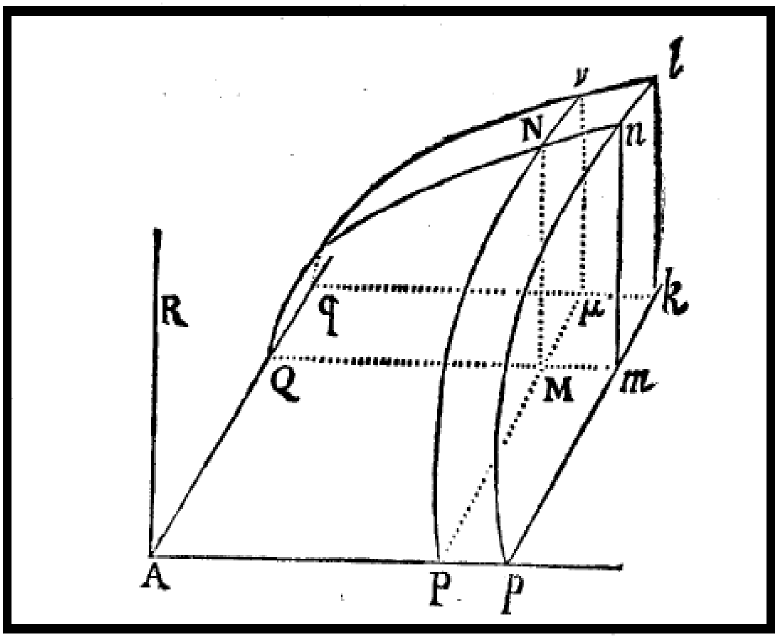

Figura 2: Claireaut (1762, p. 313) explora a terceira dimensão afim de explicar seus argumentos para a resolução de equações diferenciais com mais de duas variáveis.
Fonte: Claireaut (1762)

Cabe registrar o comentário de Claireaut (1762, p. 315), ao observar sobre o método que "relativamente ao que mencionamos sobre as equações diferenciais em três variáveis, que facilmente as regras para a integração das equações podem ser extraídas, tendo em vista um maior número de variáveis". Ora, no excerto anterior registramos o elemento impulsionador evolutivo do modelo discutido por Alexis Claude Claireaut, mormente o quadro de representação analítica, embora, o quadro analítico centrado na representação geométrica, como mencionamos há pouco, se presta ao papel explicativo e garantidor de um significado intuitivo e heurístico do modelo de interesse e de discussão há séculos atrás. Já no âmbito da pesquisa e pioneirismo de alguns matemáticos, Ávila (2002, p. 87) enaltece a atitude dos matemáticos profissionais tendo em vista a evolução (do rigor científico) de determinada teoria estruturante em Matemática. Nesse sentido, comenta que:

> Ao lado disso, há que se considerar a atitude dos matemáticos da época, que não se pautavam pelos mesmos padrões de rigor dos matemáticos gregos. Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), que popularizou bastante as técnicas infinitesimais dos indivisíveis, cuidava de suas aplicações ao cálculo de áreas e volumes, deixando de lado qualquer preocupação com a demonstração rigorosa dos resultados, coisa que, segundo ele, deveria preocupar os filósofos, não os matemáticos. Essa atitude prática, seguindo raciocínios intuitivos e a visualização geométrica, predominou por 200 anos [...]. (Ávila, 2002, p. 87)

Agora, diante dessas ponderações preliminares, tencionamos evidenciar duas lições ou perspectivas teóricas que buscaremos explorar nas seções subsequentes. A primeira lição, afetada pelo tirocínio distinguido de Figueiredo & Neves (2002) quando, em certos momentos, acentuam o caráter profícuo em torno da discussão de determinados argumentos prosaicos e simplistas que, de forma inicial, podem se mostrar desprovidos de sentido matemático (e mesmo serem negados), todavia, indicam a necessidade de "tomar uma atitude persistente e procurar extrair algo do raciocínio [...]". (Figueiredo & Neves, 2002, p. 180)

Enquanto que, a segunda lição envolve assumirmos um posicionamento relativo ao conhecimento matemático, de modo que nossa atitude tenderá a valorizar os raciocínios locais intuitivos e tácitos, estimulados pela visualização. Ademais, manifestaremos um interesse particular por uma classe particular de equações diferenciais e uma clássica noção correlacionada, chama de envoltória[2]. Não obstante, não podemos desconsiderar o contexto de ensino das EDO´s que manifestava problemas preocupantes há décadas, como podemos depreender a partir das considerações de Artigue (1989), quando comenta que "é assim que constatamos um ensino bastante algoritimizado, tendo em vista uma redução operacional, que se mostra mais fácil para os mestres e alunos, todavia, desprovido de um real engajamento, diante da importância do domínio de referência".

Ademais, o próprio contexto de pesquisa em Matemática sobre a equação de Claireaut, estudada há cerca de 260 anos (Claireaut, 1734), nos fornece indícios relevantes sobre os entraves, soluções parciais do problema, sua busca de generalização, possíveis equações análogas (Levy, 1912; Klamkin, 1953; Sispanov, 1945; Witthy, 1952) e, inclusive, os erros cometidos por parte de matemáticos profissionais. Isso posto e, com a intenção de

[2] Yates (1974, p. 75) recorda que Leibniz (1694) e Taylor (1715) foram os primeiros a encontrar soluções singulares (envoltória) de uma equação diferencial. Sua significação geométrica foi primeiramente indicada por Lagrange (1774). Além disso, estudos particulares foram desenvolvidos por Cayley (1872) e Hill (1988).

identificarmos um problema atinente ao ensino de determinado conteúdo ou tema, deflagraremos a seção subsequente que aborda alguns traços essenciais para a discussão do *design* de investigação adotado no presente escrito, impregnado por determinados pressupostos da vertente francesa da Didática da Matemática.

2 SOBRE A ENGENHARIA DIDÁTICA (ED)

Recordamos que o termo da Engenharia Didática designa "um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (Douady, 1995, p. 62). Não obstante, cabe explicarmos o emprego de determinados termos ou "metáforas" presentes excerto anterior.

Reconhecemos uma profusão de trabalhos que permitiu a consolidação e a demarcação de um campo de estudos, bem como a evolução de um *design* de investigação cientifica, que se apoiou numa metáfora que remete a um planejamento sistemático e estruturado de um engenheiro (professor), tendo em vista a concepção, proposição e o ajuste de um projeto preciso (Alves, 2016a). Desse modo, a terminologia Engenharia Didática (ED) foi usada para designar/envolver um *modus operandi* de investigação ou ainda como "uma metodologia para a análise de situações didáticas" (Robinet, 1983, p. 2). Não obstante, apesar de não se constitui tema central em nossa discussão do presente artigo, cabe demarcar algum entendimento histórico sobre a noção de Engenharia.

Com efeito, Hebrard (2011) desenvolve um exame minucioso sobre a história do nome ou do termo de engenharia que, em francês, se escreve "*ingénierie*" e, por sua vez, deriva do termo em inglês "*engineering*". Nesse sentido, o autor comenta que "o que as vezes esquecemos é que, como engenheiro (*l´ingénieur*), deriva de "*engine*", o que significa motor ou máquina do motor" (Herbrad, 2011, p. 110). O inglês havia emprestado o termo para engenheiro do francês antigo, onde uma máquina é antes de tudo uma máquina de guerra, antes de designar todos os tipos de máquinas e ferramentas, e onde um engenheiro é um construtor de máquinas de guerra. Herbrad (2011) explica, ainda, que tal etimologia do engenheiro (*l´ingénieur*) requer maior discussão, pois, alguns emputam origem do italiano e é claro que a origem de tais palavras deriva do latim "*ingenium*" (caráter inato, disposições naturais, talento). "Mas, a partir da complexa história dessas palavras, podemos observar em particular que a passagem pelo inglês deu à engenharia uma conotação técnica, sendo o engenheiro também o mecânico, aquele que mantém e opera uma máquina, por exemplo, uma locomotiva". (Herbrad, 2011, p. 110). Cabe ainda o entendimento de que "o termo engenharia, no que denota e em suas conotações, vinculado à sua história e à dos engenheiros, como grupo social e profissional". (Herbrad, 2011, p. 109).

Após uma pequena digressão, podemos vislumbrar a relevância dessa perspectiva *sui generis* de análise estruturada e investigação dos problemas envolvendo o binômio ensino-aprendizagem, no contexto da Didática da Matemática, quando observamos Brousseau (1989, p. 14) ao mencionar que "o matemático não comunica seus resultados sob a forma que eles o encontra; ele os organiza, ele os fornece uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma 'didática prática' que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada". Entretanto, no âmbito do ensino, deparamos um caráter antagonista (Margolinas, 1995, p. 343) ao fato indicado no excerto anterior. Com efeito, na frente do ensino, registramos um trabalho no sentido inverso, posto que o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico, isto é, realizar uma transposição didática (Chevallard, 1991) eficiente, planejada e situada.

Todavia, como todo processo de organização envolvendo grupos humanos em torno de um determinado saber, prática de pesquisa (ou conhecimento), sua visibilidade (e evolução) maior ocorreu nos anos 80, mais precisamente a partir de 1977, como indicado por Douady (1995, p. 4). Brousseau (1994) explica tal processo produtivo, em território francês, quando menciona:

> A Didática da Matemática nasceu do interesse mobilizado nos anos 60 relativamente aos meios de melhorar o ensino de Matemática, e do orgulho de encontrar seus meios em estudos científicos apropriados. Como campo científico, ela deve acolher toda sorte de declarações e prescrições originadas de um enorme campo de disciplinas com a qual possui uma fronteira quase fractal. (Brousseau, 1994, p. 52)

Por outro lado, posto que assumimos determinados elementos da Engenharia Didática (ED), de um ponto de vista sistemático de desenvolvimento e de acordo com extensa literatura (Artigue, 1984; Douady, 1984; Haddad, 2012; Laborde, 1997; Malonga Moungabio, 2008; Robinet, 1983), identificamos as seguintes etapas: (1) análises preliminares; (2) análise *a priori*; (3) experimentação; (4) análise *a posteriori* e validação. Por outro lado, desde que, no início do presente trabalho, manifestamos forte interesse pelo ensino das EDO´s, todavia, restringir-nos-emos ao caso da equação de Claireaut. E, no que concerne aos momentos previstos por uma (ED), discutiremos aqui apenas as duas primeiras etapas, isto é, as etapas correspondentes aos itens (1) análises preliminares e (2) análise *a priori.*

Para tanto, cabe observar que Laborde (1997, p. 104) indica três categorias de interesse nos relatos balizados pela (ED), sobretudo, no final dos anos 80 para o início dos anos 90, a saber: a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e a dimensão didática. Diante disso, apresentaremos, de modo prioritário e substancialmente enfático, elementos capazes de consubstanciar a dimensão epistemológica, bem como a dimensão didática relacionada com o nosso objeto matemático de interesse que, de modo *standard*, é denotado por $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, onde f é uma função diferenciável.

2.1 Análises preliminares

De modo geral, a equação de Alexis Claude Clairaut[3] (1713 – 1765) é descrita nos compêndios ou manuscritos especializados (Costa, 2009; Goursat, 1895; Lazarov, 2011; Levy, 1912; Mansion, 1877; Mitrinovic & Keckic, 1981; Raffy, 1985; 1897) por intermédio da seguinte equação $y = xy' + f(y')$ ou $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, aonde f é uma função diferenciável. Mansion (1877, p. 91) recorda que a equação de Claireaut "é a única equação de segunda ordem cuja integral é obtida pela substituição de y' por uma constante arbitrária". Por outro lado, a despeito da tentativa de generalizar as propriedades da mesma para mais de uma variável, Goursat (1895) advertiu que determinadas ilações de Mansion (1877) não se mostravam completamente corretas ou generalizáveis.

Desse modo, Goursat (1895, p. 88) forneceu duas equações, do tipo: $y = y' + \frac{e^x}{y'}$ e $u = u_x + u_y + \frac{e^x}{u_x} + \frac{e^y}{u_y}$. Goursat apontou, sem muitos pormenores, suas soluções respectivas: $y = C + \frac{e^x}{C}$ e $u = C_1 + C_2 + \frac{e^x}{C_1} + \frac{e^y}{C_2}$. Grosso modo, o matemático substituiu, nesses casos, y' por uma constante arbitrária "C". Ou seja, a referida propriedade pode ser

[3] Katz (2009, p. 605) recorda que Alexis Claireaut foi aluno um aluno prodígio que, aos dez anos, dominou a teoria e abordagem proposta na obra de L´Hospital et *Les infiniment petites*. Foi eleito para academia aos 18 anos e, no final de sua obra, se dedicou à Mecânica Celeste e a Pedagogia.

verificada/constatada, ainda, em outras equações diferenciais ordinárias de classes distintas da equação de Claireaut.

Mas, em nosso caso específico, para sua solução analítica, consideraremos a seguinte substituição indicada $p(x)=\frac{dy}{dx}$, isto é, poderemos escrever a equação $y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)\leftrightarrow y=x\cdot p(x)+f\left(p(x)\right)$. No próximo passo, derivamos a equação anterior $y=x\cdot p(x)+f\left(p(x)\right)$ em relação à variável real 'x', obteremos ainda que: $\frac{dy}{dx}=p(x)+\mathrm{x}\cdot\frac{dp(x)}{dx}+f'\left(p(x)\right)\cdot\frac{dp(x)}{dx}$, ou ainda, veremos que ocorre também $p(x)=\frac{dy}{dx}=p(x)+\mathrm{x}\cdot\frac{dp(x)}{dx}+f'\left(p(x)\right)\cdot\frac{dp(x)}{dx}\leftrightarrow\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)\cdot\left(x+f'\left(p(x)\right)\right)=0$.

Ora, a partir da equação anterior, é preciso inferir duas possibilidades: (a) $\frac{dp(x)}{dx}=0$ ou (b) $\left(x+f'\left(p(x)\right)\right)=0$. Reparemos que, no primeiro caso, se tivermos que $\frac{dp(x)}{dx}=0\therefore p(x)=c(cte)$ e, por essa via, encontramos $y=x\cdot c+f\left(c\right)$(*) o que representa uma família de retas (nominada de solução geral). Mas, no caso de $x+f'\left(p(x)\right)=0\leftrightarrow x=-f'\left(p(x)\right)$. E, assim, segue $y=\left(-f'\left(p(x)\right)\right)\cdot p(x)+f\left(p(x)\right)$. No passo seguinte, efetuamos outra substituição, para o caso $p(x)=t\ (parâmetro)$ e, dessa forma, reescrevemos o sistema: $\begin{cases}x=-f'\left(t\right),t=p(x)\\ y=f\left(t\right)-t\cdot f'\left(t\right)\end{cases}$ (**) o qual designa sua solução singular (Mitrinovic & Keckic, 1981, p. 717). Geometricamente, a solução singular é, justamente a envoltória da família de retas indicadas há pouco em (*).

Por outro lado, com origem nesses argumentos, podemos ainda notar que se tem $y(x)=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right)\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$, com um pequeno ajuste notacional. Vem, pois, que $0=x\frac{d^2y}{dx^2}+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\left(x+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$. Assim, mais uma vez, indicaremos as condições: $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ou $x+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$. A última notação, em termos da segunda derivada, possibilita uma descrição imediata da equação de Claireaut, para o caso de funções na variável complexa, como deparamos a discussão de Rajovic &

Dimitroskiski (2002). Fato que ratifica todo um processo de generalização possível deste modelo e que demonstra o vigor de sua evolução.

Raffy (1895) proporcionou importante contribuição ao problema, em sua época em aberto, para a classe de equações com a propriedade de Claireaut. Diante disso, formulou o seguinte teorema que confirma, o caráter evolutivo do modelo da equação de Claireaut.

Teorema (Raffy, 1895, p. 52): Qualquer equação diferencial da forma $y = F(f(y')) + F(x - f(y'))$, aonde F' e f são funções inversas, possui a solução geral $y = F(\mathrm{C}) + F(x - C)$, isto é, e suficiente substituir a derivada por uma constante arbitrária.

Observamos que os elementos indicamos nos parágrafos passados constituem nosso modelo matemático de interesse e, portanto, nosso terreno matemático e epistêmico de discussão (o que se enquadra nas análises preliminares). Por outro lado, afim de perspectivarmos um viés globalizante a respeito da equação de Claireaut, urge identificarmos a interface (seu caráter fractal) do referido conteúdo com, por exemplo, a Geometria Diferencial, bem como seu papel no interior da teoria das equações diferenciais ordinárias. De fato, Vilches (2009) explica o papel do estudo sobre envoltória:

> As envoltórias, inicialmente foram estudadas por Leibniz e Bernoulli interessados nos chamados problemas de tangência. As envoltórias de curvas planas são frequentemente utilizadas para definir novos tipos de curvas, a partir de outras conhecidas. Como envoltórias aparecem diversas curvas notáveis, como a astróide, a ciclóide e as chamadas roullettes ou rolantes. Atualmente, o interesse nas envoltórias vai da Geometria Algébrica `a Teoria das Catástrofes, passando pela Computação Gráfica, Arquitetura e pela Engenharia Mecânica. (Vilches, 2009, p. 19).

No excerto anterior evidenciamos a diversidade de *links* conceituais referentes da noção de envoltória de uma curva. Mas, se mostra imprescindível um entendimento à respeito do seu papel dentro de uma determinada teoria. Nesse sentido, Alves (2014) considera a seguinte equação $f(x, y, \lambda) = 0$ definidora de uma família de curvas dependentes de um ou mais parâmetros. Nesse caso, divisamos um parâmetro $\lambda \in IR$. Costa (2009) comenta que, sob determinadas condições, as soluções da equação de Claireaut são dadas ou descritas por retas, como indicamos por $y = x \cdot c + f(c)$, "cuja envoltória também é uma solução equação [...]". E, dessa forma, cada membro da família de retas será tangente à curva parametrizada descrita por (**).

Hodiernamente, Figueiredo & Neves (2002, p. 84) respondem ao problema conceitual que relaciona uma família de curvas planas a um parâmetro com uma equação diferencial, por intermédio da formulação do seguinte problema: Dada uma família de curvas planas a um parâmetro definida por $f(x, y, \lambda) = 0$, existe uma equação diferencial para a qual essa família representa suas soluções? Mas, como pode ser apreciado, o problema pode ser resolvido, ainda, num sentido contrário, isto é, para uma determinada equação diferencial ordinária, podemos determinar uma família de curvas que representa suas soluções.

Desse modo, depreendemos que, no caso da equação da Claireaut, asseguramos a existência de tal família que, de modo geral, recebe o nome de envoltória. Mas, vejamos sua definição formal: Dada a família de curvas $f(x,y,\lambda)=0$, definiremos a envoltória desta família como sendo uma curva em coordenadas paramétricas $(x(\lambda),y(\lambda))$, tal que $\begin{cases} f(x,y,\lambda)=0 \\ f_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$.

Por outro lado, pode ser constatado que pode existir uma ou mais envoltórias para uma mesma família de curvas em um parâmetro λ, como também poderá não haver nenhuma envoltória (como uma família de circunferências concêntricas, por exemplo).

De modo *standard*, as curvas da família definida por $f(x,y,\lambda)=0$ são nominadas de envolvidas. E, intuitivamente, podemos dizer que duas envolvidas infinitamente próximas, devem se cortar num ponto sobre a envoltória. “A envoltória de uma família de curvas planas que dependem de um parâmetro é uma curva, que não pertence à família e que é tangente a todas as curvas da família” (Vilches, 2009, p. 20). Noutros termos, poderemos interpretar que os pontos de uma envoltória são uma espécie de limite (ver figura 1), de aproximação infinitesimal, como sendo os limites das interseções das curvas definidas (envolvidas). Simbolicamente, tomaremos $f(x,y,\lambda)=0$ e $f(x,y,\lambda+\Delta\lambda)=0$, com a condição $\Delta\lambda\to 0$. Ora, as condições anteriores, nos permitem indicar o seguinte limite $f_\lambda(x,y,\lambda)=\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(x,y,\lambda+\Delta\lambda)-f(x,y,\lambda)}{\Delta\lambda}=0$.

Para exemplificar, vejamos, considerando a seguinte equação definida por meio de parâmetro $f(x,y,\lambda)=x\cdot sen(\lambda)+y\cdot\cos(\lambda)-d\cdot\cos(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda)$. Vilches (2009, p. 23), resolve o seguinte sistema definidor da família de curvas procuradas, ao escrever $\begin{cases} f(x,y,\lambda)=x\cdot sen(\lambda)+y\cdot\cos(\lambda)-d\cdot\cos(\lambda)\,\mathrm{sen}(\lambda) \\ \dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=x\cos(\lambda)-ysen(\lambda)-d\cos(2\lambda)=0 \end{cases}$

Os detalhes podem ser apreciados em Vilches (2009) e, por fim, indica a seguinte equação $x^{2/3}+y^{2/3}=d^{2/3}$, costumeiramente chamada de astróide, estudada por Roemer em

1674 (Yates, 1974, p. 1). Na figura 3 deparamos uma construção dinâmica proporcionada pelo *software GeoGebra*.

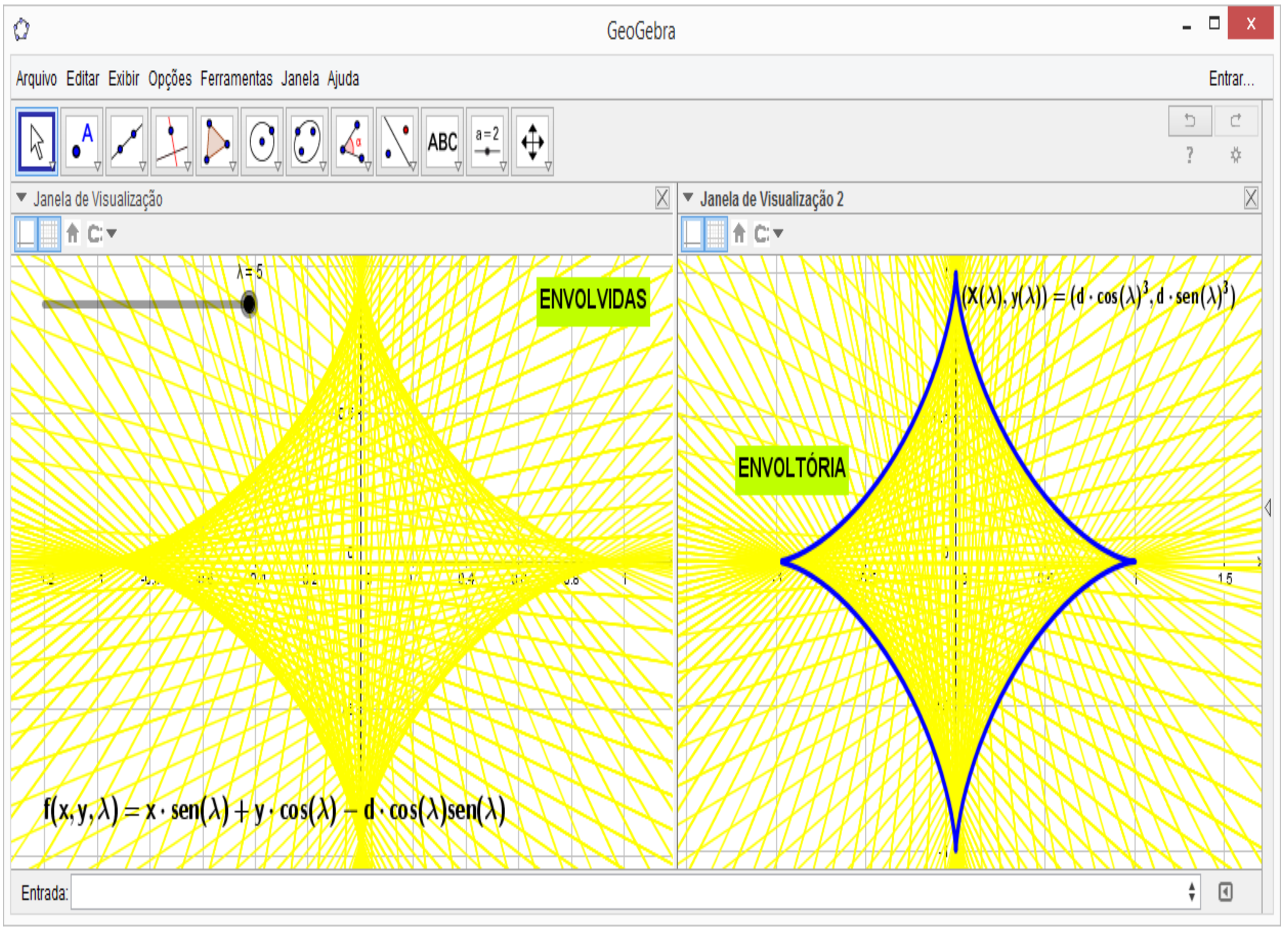

Figura 3: Visualização com arrimo do *software GeoGebra* das envolvidas e da envoltória (astróide) definida por uma família de curvas dependentes de um parâmetro λ
Fonte: Elaboração do autor

Na figura 3, com auxílio no software, proporcionamos a visualização e o entendimento dinâmico do processo de determinação de uma curva, por intermédio de um conjunto infinito de retas que, como propriedade fundamental, se mostram tangentes aos pontos candidatos à curva nominada de envoltória. Assim, ao lado direito, na cor azul, divisamos a curva determinada pelas envolvidas que representa uma solução para a uma equação diferencial ordinária, determinada por $(x(\lambda), y(\lambda)) = (\cos(\lambda)^3, sen(\lambda)^3)$, com $\lambda \in IR$.

Por outro lado, temos um interesse particular pelo modelo de Claireaut e, como os recursos visuais e dinâmicos do *software Geogebra*, poderemos perspectivar a superação de determinados elementos que consideramos atuar como obstáculos como, por exemplo, um quadro reducionista de natureza algébrica (Alves, 2014; Arslam, 2005). De fato, vejamos a seguinte equação $8x^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 x=0$. Logo de início, o solucionador do problema manifestará dificuldades na identificação de uma correspondente equação de Claireaut. Mas, de modo padrão, tomamos $p(x)=\frac{dy}{dx}\therefore 8x^2+2p^2y-p^3x=0$ e, assim, vem $2p^2y=p^3x-8x^2 \therefore 2y=px-8\frac{x^2}{p^2}$.

Em seguida, derivamos em relação à variável 'x', conduzindo ao seguinte: $2\frac{dy}{dx}=p+x\frac{dp}{dx}-16\frac{x}{p^2}+16\frac{x^2}{p^2}\frac{dp}{dx}\leftrightarrow 2p=p+x\frac{dp}{dx}-16\frac{x}{p^2}+16\frac{x^2}{p^2}\frac{dp}{dx}$ e, ainda que $p=x\frac{dp}{dx}-16\frac{x}{p^2}+16\frac{x^2}{p^3}\frac{dp}{dx}$ e, ainda vem que $p^4-xp^3\frac{dp}{dx}-16px+16x^2\frac{dp}{dx}=$ $=\left(16px+p^4\right)-\left(xp^3\frac{dp}{dx}+16x^2\frac{dp}{dx}\right)=0$. E, por fim, chegamos na seguinte forma $p\left(p^3+16x\right)-\left(p^3+16x^2\right)x\frac{dp}{dx}=0\leftrightarrow\left(p^3+16x^2\right)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0$. Mas, nesse ponto, temos as possibilidades: $\left(p^3+16x^2\right)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0\leftrightarrow\left\{p^3+16x^2=0 \text{ e } p-x\frac{dp}{dx}=0\right.$.

Ora, no caso de $p-x\frac{dp}{dx}=0\leftrightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\therefore \ln(p(x))=\ln(x)+C$ e, segue que $p(x)=Cx$. Mas, nesse caso, substituindo os termos adequados, encontramos que $8x^2+2p^2y-p^3x=0\therefore 8x^2+2Cx^2y-C^3x^4=0$. Agora, para o caso da condição descrita por $p^3+16x^2=0\leftrightarrow p(x)=\sqrt[3]{-16x}$. Agora, vamos considerar a seguinte equação $8x^2+2p^2y-p^3x=0\therefore 8x^2+2\left(\sqrt[3]{-16x}\right)^2y-\left(\sqrt[3]{-16x}\right)^3x=0$ e, fazendo as contas, devemos determinar que $8x^2+2\sqrt[3]{16^2x^2}\,y+16x^2=0\therefore 24x^2+2\sqrt[3]{16^2x^2}\,y=0$ e, por fim, vemos que $y=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{4}{3}}$. Todavia, após o extenso e laborioso conjunto de inferências anteriores e obtenção das soluções da equação $8x^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2y-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3x=0$, que expediente poderemos explorar afim de impulsionar o entendimento intuitivo e heurístico do estudante? Que relações podem ser estimuladas, de ordem qualitativa, poderemos estimular, tendo em vista o entendimento com amparo conceitual?

Cabe observar que, para perspectivarmos a resposta para os últimos questionamentos, não podemos negligenciar uma prática ortodoxa acadêmica, característica de determinados assuntos matemáticos, que tende a fortalecer um estilo algebrizante (Oliveira & Igliori, 2013, p. 22) reducionista e, em certos casos, estruturante para determinados vieses da matéria discutida. Com efeito, Arslan (2005, p. 209) comenta que "[...] nos questionamos sobre a abordagem qualitativa no ensino, uma integração que se mostra praticada depois de um certo tempo no nível superior. Vários trabalhos têm demonstrado a limitação da abordagem algébrica e a necessidade da abordagem qualitativa". Por outro lado, outros trabalhos acentuam que os estágios evolutivos da teoria das EDO´s, com predominância alternadas dos quadros numéricos, analíticos e geométricos, não podem ser negligenciados, inclusive, no contexto histórico para o seu ensino (Valdez, 2003).

Nesse âmbito ainda, Saglam-Arslam (2008) conclui, em sua tese de doutorado, que:

> Num segundo momento, esta análise nos mostrou que a noção de equação diferencial teve uma existência completamente diferente do que conhecemos atualmente. De fato, tal noção conheceu três períodos importantes, cada um deles correspondentes a um modo de resolução. Nossa análise colocou em evidência da simultaneidade da aparição das três abordagens na resolução das equações diferenciais e os problemas geradores em outras disciplinas que culminaram com sua aparição ao longo do desenvolvimento. (Saglam-Arslam, 2008, p. 201)

Javaroni (2007; 2009) manifestou profundo interesse pelo ensino e aprendizagem do conteúdo de equações diferenciais ordinárias a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos auxiliada pela tecnologia de informação e comunicação. Em sua perspectiva, o papel da visualização assume função primordial, possibilitando "transitar pelas representações visuais e analíticas de uma mesma situação" (Javaroni, 2009, p. 24). Ora, diante dos indícios preocupantes relatados por esses e outros autores (Oliveira & Igliori, 2013; Dullius, 2009), podemos depreender a relevância de uma vigilância constante sobre o contexto do seu ensino/aprendizagem dessa matéria.

E, após esse pequeno relato do ensino atual, descrevemos *a* problemática de nossa investigação não empírica. Destacamos que esta se caracteriza como "o conjunto de questões coordenadas que se coloca num determinado quadro teórico para esclarecer o problema levantado e os objetivos do estudo" (Almouloud, 2007, p. 169). Isso posto, com origem nas ponderações anteriores, formulamos o seguinte questionamento: De que modo, por intermédio de uma abordagem apoiada na tecnologia, podemos proporcionar aos estudantes, situações de ensino envolvendo a equação de Clairaut, de modo que, promovamos um entendimento matemático estimulado/impulsionado pela visualização

Apesar de não ensejarmos sua verificação empírica na presente discussão teórico-conceitual, formulamos a seguinte hipótese de investigação: O uso do *software GeoGebra* permite a exploração de propriedades qualitativas relacionadas com a equação de Claireaut, por intermédio da mobilização de conhecimentos que extrapolam uma natureza analítico-procedural.

2.2 Elementos de análise *a priori*

Trazemos quatro situações-problema que, com o arrimo na perspectiva de Almouloud (2007, p. 174), detêm como finalidade responder questões e validar (eventualmente) a hipótese levantada na fase anterior. Por outro lado, as seguintes características (Brousseau, 1986, p. 422) devem ser buscadas: os alunos devem compreender o problema e, a mesma, possibilita o engajamento dos mesmos; as situações-problema colocam em jogo o campo conceitual almejado; os problemas envolvem vários domínios de conhecimento e os métodos de resolução conhecidos não são suficientes. Acrescentamos ainda que “com seus conhecimentos, os alunos não conseguem resolver completamente a situação” (Douady, 1993, p. 26), dessa forma, a ação/mediação direta do professor se torna, em determinado momento, imprescindível, tendo em vista a devolução (Brousseau, 1988) adequada do problema.

Na fase atual, manifestamos um profundo interesse pela “determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado” (Artigue, 1995, p. 45). Por tal via, de modo sistemático e seguindo a tradição dos estudos dessa vertente, patenteamos uma parte descritiva e outra parte preditiva do presente aparato conceitual, embora desconsiderando sua ulterior confrontação com eventuais dados empíricos circunstanciados.

Outrossim, recordamos que num processo de ensino, “o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos” (Margolinas, 1995, p. 344). E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela (TSD), registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (Brousseau, 1986; 1988; 1998).

3 CONCEPÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Na fase atual, descreveremos quatro situações didáticas que detêm a possibilidade de sua exploração em sala de aula. Tendo em vista os elementos coligidos nas duas seções anteriores e, a partir da perspectiva e do exame de determinadas fases previstas e modelização do saber matemático, segundo a (TSD), passaremos à abordagem de quatro situações didáticas e, nelas, acentuaremos o caráter imprescindível da visualização, no sentido da promoção de uma ação tácita, intuitiva e preliminar dos estudantes, culminando seu engajamento correspondente em cada tarefa.

Situação problema I: Na figura 4, divisamos duas famílias de retas, dependentes de um parâmetro, que indicamos por $f(x,y,\lambda)=y-\lambda x-3\lambda^2=0$ e $g(x,y,\lambda)=y-\lambda x-\frac{1}{\lambda^2}=0$. Agora, considerar as seguintes equações diferenciais: (i) $y'+\frac{2}{x}y=xy^3$; (ii) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+3$; (iii) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$; (iv) $y-x\left(\frac{dy}{dx}\right)=3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; (v) $y-x\left(\frac{dy}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)$; (vi) $w=\bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2$. Escolher/decidir dois itens correspondentes a uma equação que determinará, como solução, as famílias de retas que divisamos na figura 4, que indicamos por $y-\lambda x+3\lambda^2=0$ e $y-\lambda x-\frac{1}{\lambda^2}=0$.

Comentários: No rol dos conhecimentos mobilizados pelo estudante, constitui fator determinante o reconhecimento analítico do modelo da equação de Claireaut. Por outro lado, nos itens acima, o estudante deverá distinguir os modelos de equações diferenciais de Bernoulli, de Ricatti, de Lagrange e, por fim, de Claireaut. Nesse caso preliminar, os itens que devem ser escolhidos serão (iii) e (iv). Tendo em vista que a equação $y'+\frac{2}{x}y=xy^3$ (i) é do tipo Bernoulli, enquanto que a equação $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+3$ (ii) é do tipo Ricatti. Por fim, no item (vi) $w=\bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2$ divisamos uma equação na variável complexa (do modelo de Claireaut).

Situação de ação. As relações e significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (Almouloud, 2007, p. 38). Assim, com arrimo das figuras 4, 5 e 6, os estudantes podem explorar uma construção dinâmica do *software GeoGebra*, que estimulará a atividade de produção de conjecturas dos estudantes. Nesse caso, produzimos duas famílias de retas que podem ser identificadas como dois conjuntos de envolvidas e, a partir disso, relacioná-las com uma equação diferencial ordinária correspondente. Na figura 4 proporcionamos uma compreensão sobre o comportamento das envolvidas e da envoltória, que corresponde à astróide, definidas por uma família de curvas no parâmetro λ.

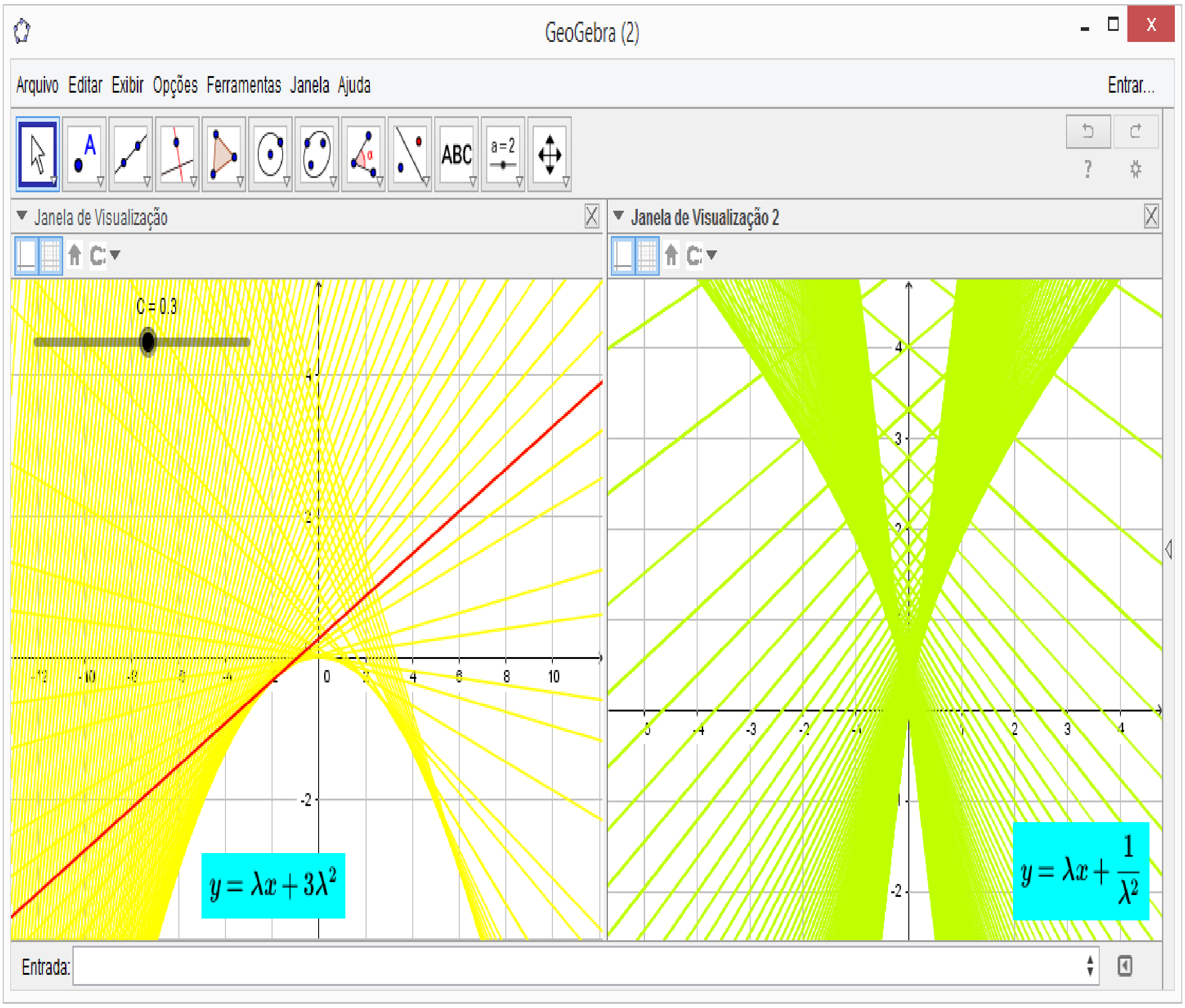

Figura 4: Visualização com arrimo do *software GeoGebra* das envolvidas e da envoltória (astróide) definida por uma família de curvas dependentes de um parâmetro λ
Fonte: Elaboração do autor

Logo em seguida, visualizamos, ainda, nas figuras 5 e 6, o processo de aproximação e determinação da envoltória como "pontos limites" das interseções das envolvidas. A perspectiva explorada nas figuras 5 e 6 pode ser comparada com o processo matemático de aproximação que abordamos na figura 1, proveniente da discussão de Levy (1912). O leitor poderá observar a construção dinâmica com o *software Geogebra* e uma sequência de pontos resultantes da interseção das envolvidas que tendem a se acumular, progressivamente, nas vizinhanças da origem. Com origem na construção que exibimos nas figuras 5 e 6 proporcionamos um entendimento não estático sobre a determinação de uma envoltória, o que confirma a importância da visualização no ensino (Alves, 2016b).

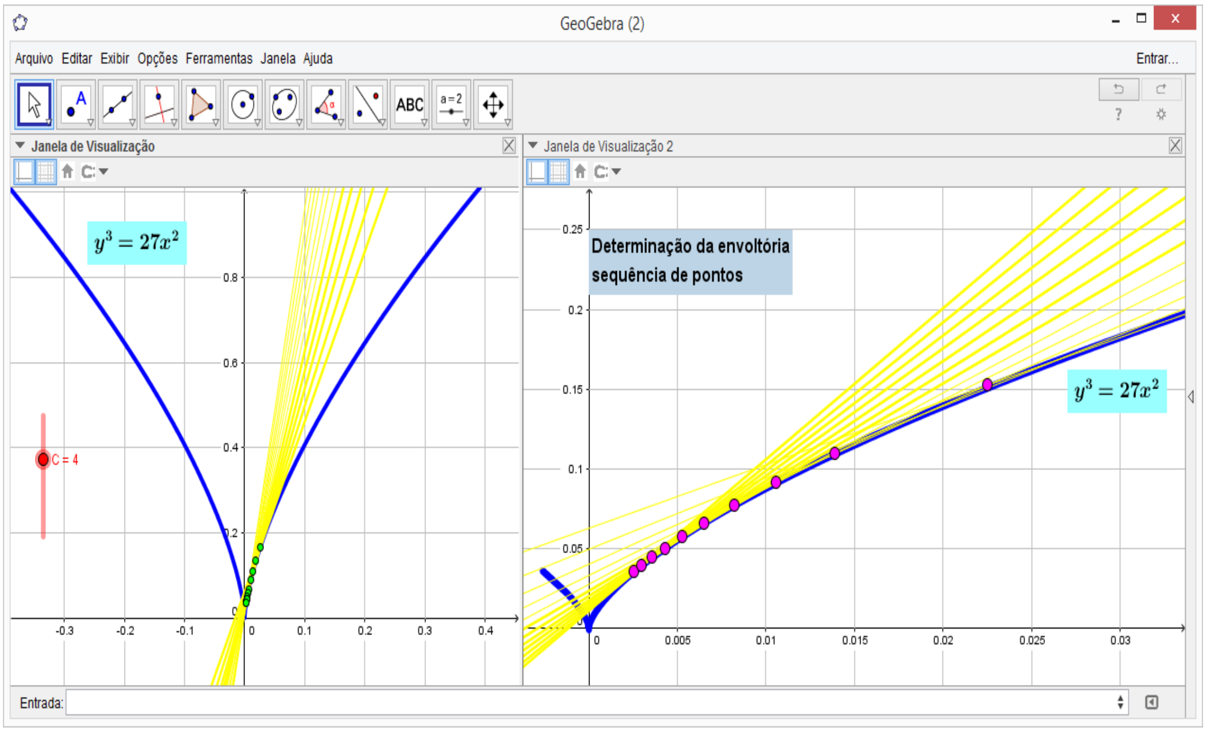

Figura 5: Visualização de uma construção dinâmica com o Geogebra e uma sequência de pontos resultantes da interseção das envolvidas que tendem a se acumular nas vizinhanças da origem
Fonte: Elaboração do autor

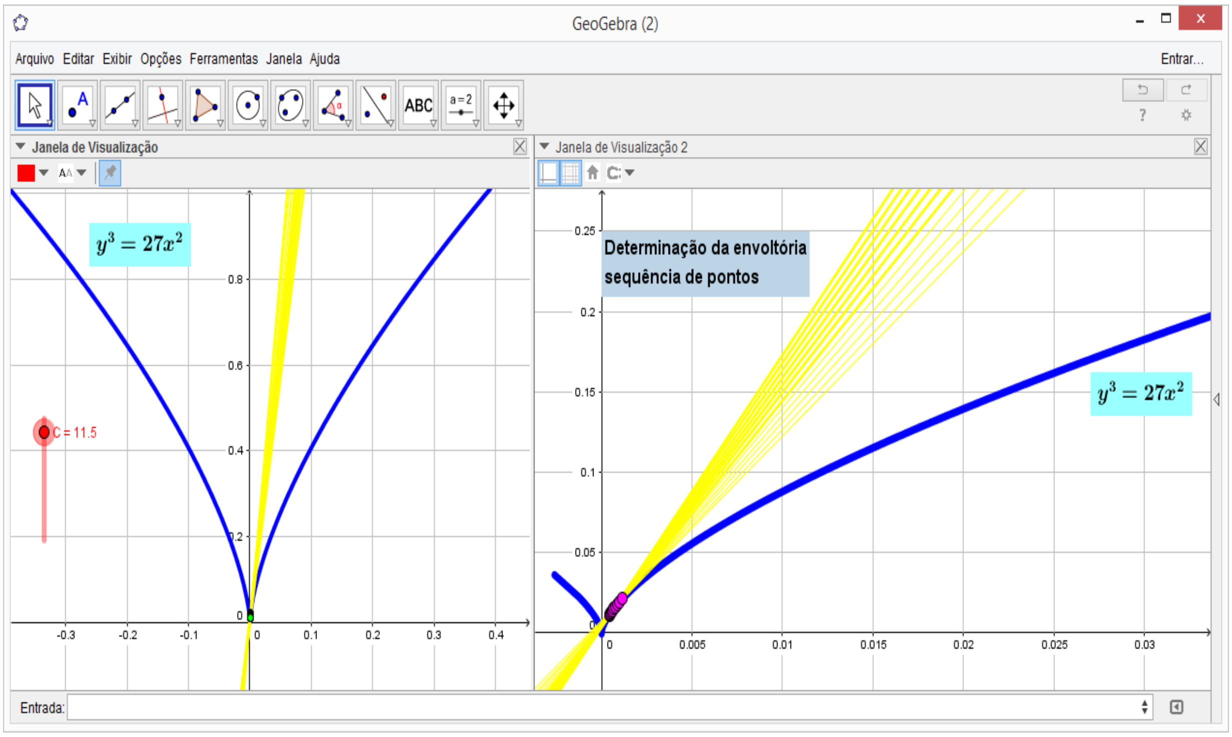

Figura 6: Visualização de uma construção dinâmica com o Geogebra e uma sequência de pontos resultantes da interseção das envolvidas que tendem a se acumular nas vizinhanças da origem
Fonte: Elaboração do autor

Situação de Formulação. Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns". Com explicamos na fase dialética anterior, os alunos precisam se apropriar de um sistema notacional que deve proporcionar a homogeneização da comunicação entre o grupo, oriundo das interações com o software proposto. Ademais, como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos que "o estudante poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige". Outrossim, nessa fase, deverá ser deflagrado a introdução de um sistema notacional.

Isso posto, com respeito ao item (iii) indicado no enunciado, vemos $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$. Assim vamos tomar $p(x) = \frac{dy}{dx} \therefore xp^3 - yp^2 + 1 = 0 \leftrightarrow y = xp + \frac{1}{p^2}$ que é uma equação de Claireaut. Em seguida, derivaremos $y = xp + \frac{1}{p^2} \therefore p = \frac{dy}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p - 2p^{-3}\frac{dp}{dx}$ e, dessa forma, vamos escrever $\frac{dp}{dx}(x - \frac{x}{p^3}) = 0 \therefore \begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0 \therefore p(x) = c \to y = xc + \frac{1}{c^2} \\ (x - \frac{x}{p^3}) = 0 \therefore x = \frac{2}{p^3} \leftrightarrow p(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x}} \end{cases}$. Agora, vamos substituir na equação anterior, obtendo a equação $y = xc + \frac{1}{c^2}$ e, desde que, vemos ainda que $p(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x}} \therefore x\left(\frac{2}{x}\right) - y\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 + 1 = 0 \leftrightarrow 4y^3 = 27x^2$ (ver figura 5, ao lado direito). Dessa forma, nos outros itens, os alunos devem investigar a equação que corresponderá a seguinte equação $x^2 = -12y$ (ver figura 5, ao lado esquerdo). E, por fim, identificar a envoltória correspondente definida pela família de retas tangentes.

Situação de validação. Recordamos que, diferentemente da etapa anterior, se mostra necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (Artigue, 1984, p. 7 – 8). Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (Almouloud, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas afim de obter a certeza das relações estabelecidas. O elemento distinguido que ensejamos inserir no debate do grupo de alunos diz respeito a uma apreciação comparativa entre os dados mobilizados por intermédio do sistema de representação simbólico-formal, com os dados obtidos pela interação com o *software GeoGebra* (ver figuras 4, 5, 6 e 7).

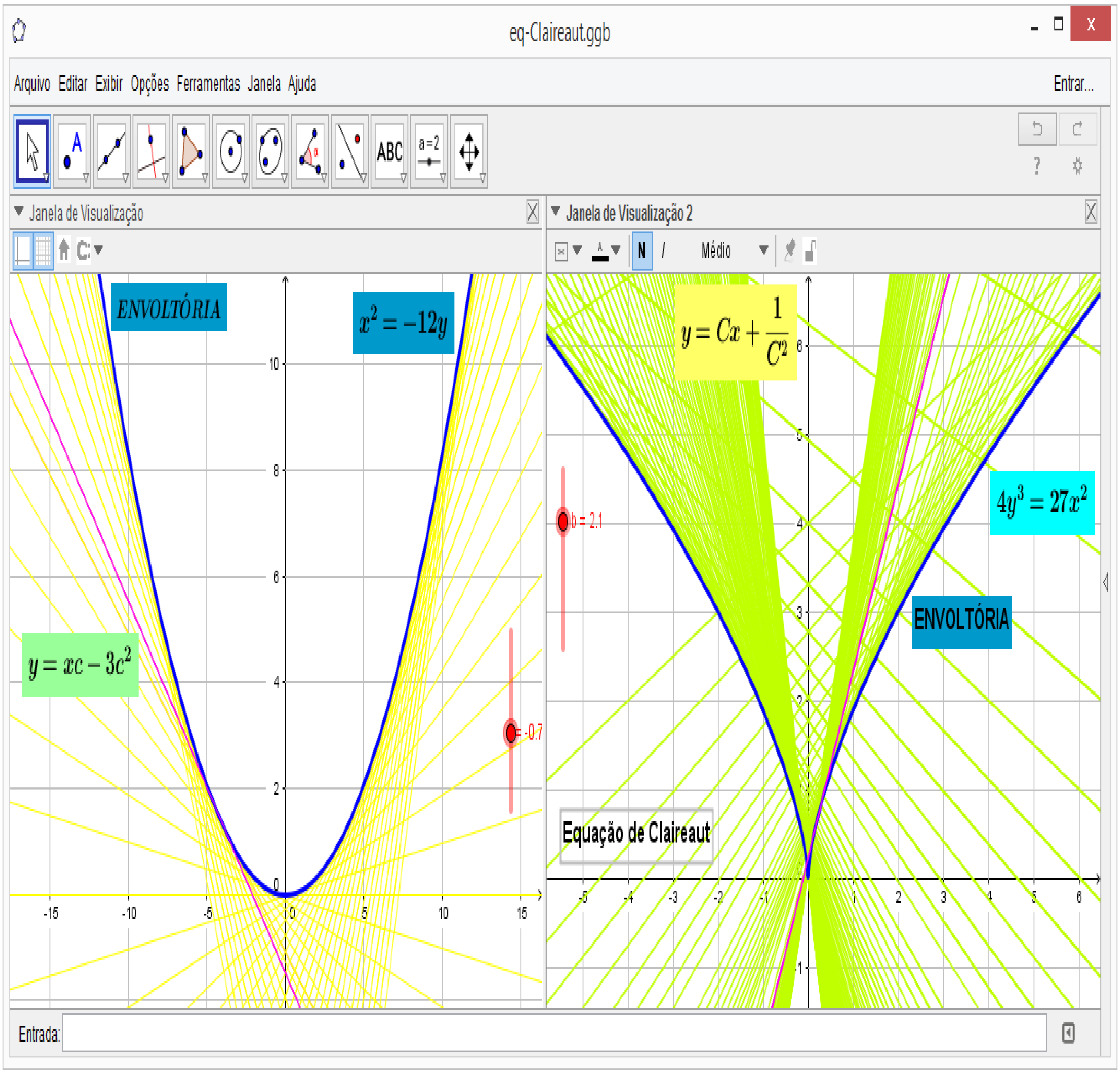

Figura 7: Visualização de uma construção dinâmica com o Geogebra e uma sequência de pontos resultantes da interseção das envolvidas que tendem a se acumular nas vizinhanças da origem
Fonte: Elaboração do autor

Situação de institucionalização: Para concluir, todas as informações produzidas nos momentos didáticos anteriores devem ser coligidos no sentido da culminância e a preparação de um substrato didático para a determinação de determinada propriedade, tendo como escopo a fixação/determinação do estatuto oficial de um saber científico

(Almouloud, 2007, p. 40). Nesse caso, o professor deverá atuar no sentido de fazer aderir ao modelo analítico, os aspectos gráficos e numéricos e, portanto, elementos de uma análise qualitativa que procuramos discutir nas seções precedentes para o ensino de EDO´s. Nesse caso, constituirá patrimônio do saber científico da turma, os dados produzidos com origem na interação do software, com o modelo matemático discutido na fase de formulação e de validação. Cabe observar que no enunciado da questão anterior, equações do tipo $w = \bar{z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2$, são do tipo Claireaut e na variável complexa.

Situação problema II: Vamos considerar a equação $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a\,{}^{dy}\!/\!{}_{dx}}{\sqrt{1+\left({}^{dy}\!/\!{}_{dx}\right)^2}}$. Decidir se a mesma constitui uma equação do tipo Claireaut ou não e, se possui envoltória.

Comentários: No caso de $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a\,{}^{dy}\!/\!{}_{dx}}{\sqrt{1+\left({}^{dy}\!/\!{}_{dx}\right)^2}}$, fazendo $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$, com $a \in IR$. Nesse caso, os estudantes devem identificar o modelo de Claireaut e que, sua envoltória correspondente se presta como solução, também, de duas equações diferenciais ordinárias distintas (ver figura 3), tendo em vista que, de acordo com Alves (2014, p. 70), com origem na equação implícita $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$, podemos determinar outra equação diferencial com a mesma solução (ou envoltória correspondente).

Situação de ação. De modo preliminar, os estudantes devem se ater ao reconhecimento do modelo de Claireaut, ao considerar a função $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$ e, assim, devem obter $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Assim, os estudantes devem ser estimulados a repetir, na seção subsequente, o mesmo procedimento analítico. Reparemos que, sem a exploração do aparato computacional, a atividade de produção de conjecturas dos estudantes ficará comprometida. Dessa forma, prevemos que, o tempo didático da fase dialética de ação ficará reduzido, embora, a identificação, por parte dos estudantes, que ocorrem envoltórias para a determinação de outras equações, todavia, no caso do modelo de Claireaut, elas (a família de retas) são definitórias. Assinalamos, entretanto, que na situação de ação, deverá ocorrer um cenário de aprendizagem estimulador de conjecturas e hipóteses formuladas pelos estudantes, com origem na interação com as construções *a priori* definidas com o arrimo do *software GeoGebra*. (Alves, 2016b).

Situação de Formulação: Fazendo $\frac{dy}{dx} = p \therefore y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$. Dessa forma, obtemos $p = \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + a\left(\frac{p}{(1+p^2)^{1/2}}\right)' = p + x\frac{dp}{dx} + a\left(\frac{(1+p^2)^{1/2}\cdot\frac{dp}{dx} - p\cdot\frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}\cdot 2p\cdot\frac{dp}{dx}}{1+p^2}\right)$

e $0 = x\frac{dp}{dx} + a\left(\frac{(1+p^2)-p^2}{(1+p^2)^{3/2}}\right)\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\left(x + a\left(\frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\right)\right)$. Devem encontrar que $\frac{dp}{dx} = 0 \therefore p = C$ e que $x + a\left(\frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\right) = 0$, se $a \neq 0$. No primeiro caso, determinamos $'p = C$ e encontram que $y = xc + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ uma família de retas, ou ainda, podemos escrever $y = -\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}p + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$. Por outro lado, dispomos ainda que $x(p) = -\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}$ e, por fim, devem determinar a seguinte forma de curva $(x(p), y(p))$ parametrizada por $(x(p), y(p)) = \left(-\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}, -\frac{ap^3}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}\right)$.

Por fim, determinaremos que $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a}$ e que, mais uma vez, os estudantes devem reconhecer a equação da Astroide, posto que, a parametrização anterior $(x(p), y(\mathrm{p})) = \left(-\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}, -\frac{ap^3}{\sqrt[3]{(1+p^2)^2}}\right)$ possui tal propriedade.

Situação da validação. O professor deverá enfatizar, na fase dialética atual, a importância da mudança de representação da astroide, de sorte que, em dependência da exigência da situação, a curva poderá ser descrita em coordenadas cartesianas ou, ainda, em sua forma paramétrica. Em qualquer situação, o resultado da construção dinâmica final poderá ser apreciado na figura 3 e que, como mencionado há pouco, pode ser determinada por meio de uma família de retas $f(x, y, \lambda) = 0$.

Situação de institucionalização. Os dados acentuados pelo professor resultam das informações oriundas com o modelo matemático formal (equação de Claireaut) e da representação computacional. Na próxima situação, buscamos acentuar o processo construtivo de aproximação, envolvendo a ideia de "limite dos pontos", sob a influência da perspectiva de Rafy (1895).

Situação problema III: Vamos tomar a equação $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$. Com arrimo da figura 8, decidir se a equação anterior se relaciona ou não ao processo aproximativo dos pontos de interseção determinados por um feixe de retas que divisamos com a recurso ao software. Em caso afirmativo, a "curva limite" é nominada de envoltória.

Comentários. Com a intenção precípua de confrontar os dados e conhecimentos mobilizáveis com origem na exploração do software, na presente situação, declaramos a imprescindibilidade, de modo inicial, do quadro geométrico, como impulsionador das atividades dos estudantes. Assim, a atividade busca impulsionar a atividade de produção conjectural do grupo, envolvendo o entendimento da envoltória como uma espécie de "limite de pontos", isto é, outra categoria ou espécie de limite.

Situação de ação. Na fase preliminar, a ação do estudante se resumirá na identificação e comparação da equação $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$ com a equação de Claireaut. Na figura 9 (ao lado esquerdo), os estudantes precisam reconhecer a existência de uma envoltória não determinada pela curva na cor vermelha e, sim, com suas envolvidas determinando uma outra curva, aparentemente uma parábola, com concavidade para baixo. Na figura 8, com recurso ao *software*, divisamos alguns pontos móveis determinados pela interseção de um conjunto finito de envolvidas.

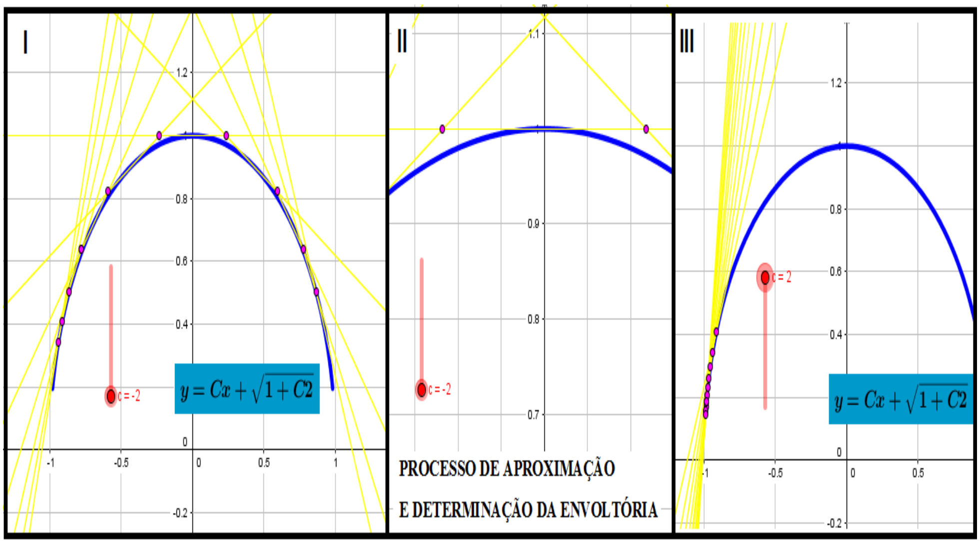

Figura 8: Visualização do processo aproximativo dos pontos de interseção das envolvidas para a determinação dos pontos limite da correspondente envoltória de uma curva
Fonte: Elaboração do autor.

Com origem na figura 8 – I, os alunos poderão localizar os pontos móveis (na cor rosa). Por outro lado, a partir de funções específicas do *software GeoGebra*, na figura 8 – II, poderão depreender que os pontos de interseção não estão sob a curva (na cor azul), que constitui uma candidata à envoltória. Nesse caso, na figura 8 – III, paulatinamente, os pontos tendem a se aproximar da curva (na cor azul) e "no limite" deverão determinar os pontos da envoltória desejada.

Situação de Formulação. Vamos tomar a equação $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$ e substituir $y' = p \therefore y = xp + \sqrt{1+p^2}$. Em seguida, derivando a igualdade anterior, devem encontrar $p = \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} \leftrightarrow 0 = x\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} = \left(x + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}$. Ora, isso conduz ao campo de possibilidades $\frac{dp}{dx} = 0$ e $x + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} = 0$.

Mas, no primeiro caso, como semelhante ao que efetuamos nas seções passadas, vemos que $p = C(cte)$ e assim $y = xC + \sqrt{1+C^2}$ (família de retas, ao lado esquerdo). E, no caso de $x(p) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ e, ainda que $y(p) = p\left(-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) + \sqrt{1+p^2} = -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}$.

Situação da validação. Reparemos na fase anterior, a determinação da curva parametrizada que indicamos por $(x(\mathrm{p}), \mathrm{y}(\mathrm{p})) = \left(-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2}\right)$ que pode ser observada na figura 9 acima, ao lado esquerdo, um trecho da mesma descrito pelo *software*. Cabe recordar que a família de retas $f(x,y,C) = xC + \sqrt{1+C^2} - y = 0$ determinará a envoltória em questão, que indicamos pela equação $y = xC + \sqrt{1+C^2}$ (ver as figuras 8 e 9, ao lado esquerdo).

Situação de institucionalização. O conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (Artigue, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, indicando o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais. Nesse caso, os dados colhidos a partir da exploração dos quadros analítico, numéricos e gráfico-geométricos fundamentam a finalização da tarefa. Finalmente, na figura 9, descrevemos um processo aproximativo visualização de dois casos de uma envoltória. Ao lado esquerdo descrita como curva parametrizada e, ao lado direito, constituindo um padrão geométrico relacionado com a solução final de uma EDO de terceira ordem (elaboração dos autores)

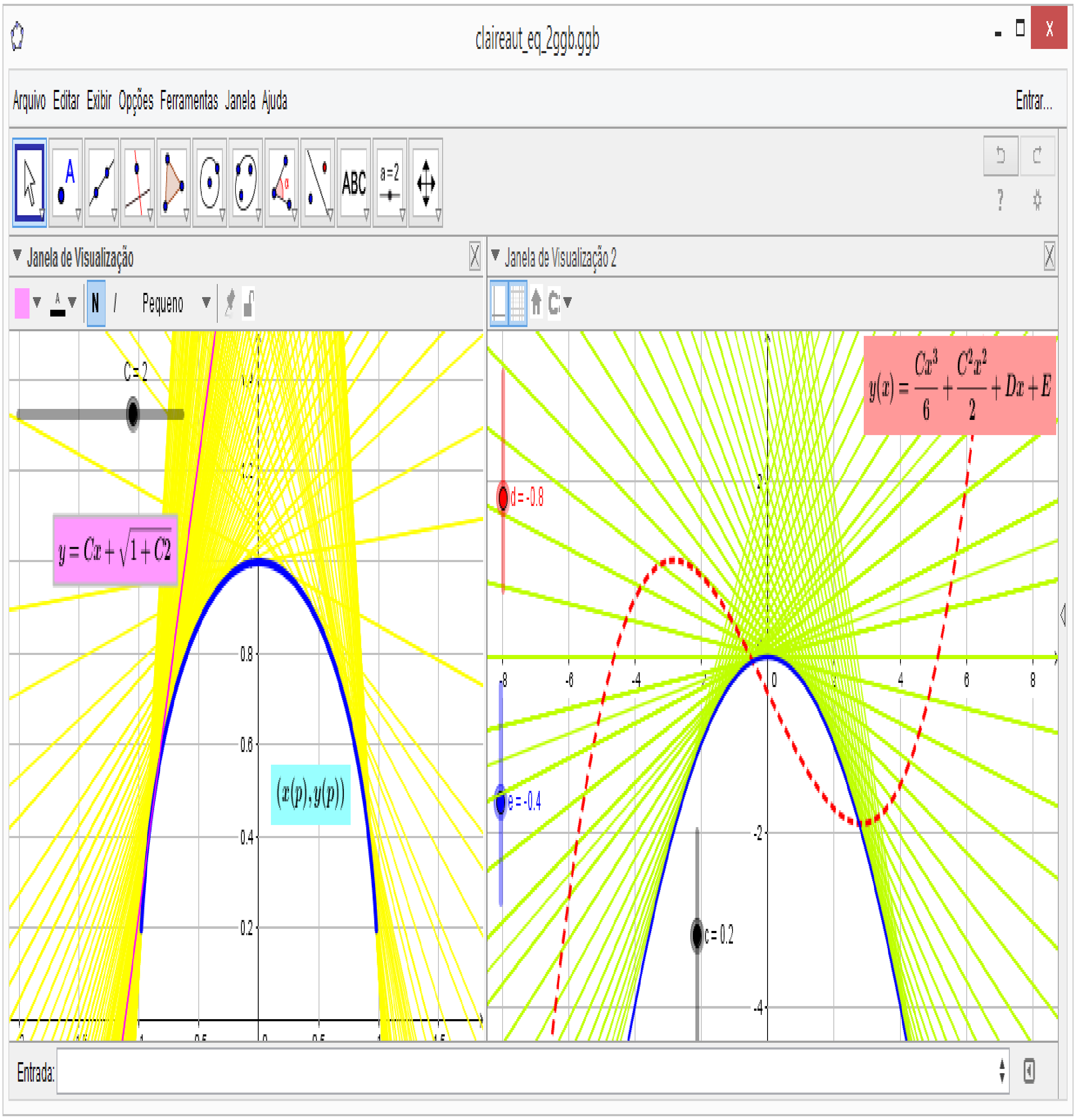

Figura 9: Visualização do processo aproximativo dos pontos de interseção das envolvidas para a determinação dos pontos limite da correspondente envoltória de uma curva
Fonte: Elaboração do autor

Situação problema III: Resolver a seguinte equação $xy''' + (y''')^2 = y''$, observando que, na figura 9, ao lado direito, e na cor vermelha, divisamos sua solução.

Comentários: No enunciado acima, a habilidade de reconhecimento do padrão analítico e a substituição adequada, no caso, chamando $y'' = p$. Nesse caso, devem obter que $xp'+(\mathrm{p}')^2 = p \therefore p = x \cdot p'+(\mathrm{p}')^2$ o que incorre no modelo da equação de Claireaut. Ademais, os estudantes deverão constatar, mesmo nesse caso, o caráter invariante da presença de uma envoltória, conquanto que, a mesma não deve constituir sua solução final, a ser determinada por $y(x) = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + Dx + E$ que se apresenta como uma função polinomial na variável 'x'.

Situação de ação. Com auxílio da figura 9, ao lado direito, os alunos precisam distinguir, no conjunto das curvas exibidas, quais ou qual representa, de fato, a solução da equação $xy'''+(y''')^2 = y''$. Assim, num primeiro momento, os alunos deverão mobilizar e extrair informações do quadro gráfico-analítico representacional. Assim, a envolvidas (família de retas na cor verde) não determinam uma solução para a equação $xy'''+(y''')^2 = y''$.

Situação de formulação. Tomando $y'' = p \therefore y''' = p'$ e veremos que $xp'+(\mathrm{p}')^2 = p$. Ora, nesse caso, vemos que $p' = q$ e, portanto, vemos $xq+(\mathrm{q})^2 = p$, mas assim $p = xq+(\mathrm{q})^2 \therefore p' = q + xq' + 2qq'$.

Assim, vemos $q = p' = q + xq' + 2qq' \leftrightarrow 0 = xq' + 2qq' = \left(x+2q\right)q'$. Mas, agora, teremos as possibilidades $q' = 0 \therefore q = C$. Mas, sendo $p' = q = C \therefore p = Cx + D$. No outro caso, vemos que $x + 2q = 0 \leftrightarrow p' = q = -\frac{x}{2} \therefore p = -\frac{x^2}{4}$.

Situação de validação. Na apreciação da equação diferencial de terceira ordem, que indicamos por $xy'''+(y''')^2 = y''$, o professor deverá estimular os estudantes na percepção de que, ao decurso de seu processo resolutivo analítico, como mencionado na fase anterior, que o modelo de Claireaut se apresenta em parte de sua resolução, todavia, não podem confundir a envoltória (que exibimos na figura 7, na cor azul) com a solução final (curva tracejada na cor vermelha).

Situação de institucionalização. O conhecimento a ser tornado patrimônio cultural do grupo diz respeito ao quadro de informações qualitativas que divisamos na figura 6, aliado às informações que mostramos nas fases preliminares. Assim, tendo em vista que determinadas do *software* permitem explorar determinados aspectos numéricos do comportamento proporcionaremos, por fim, uma apreciação qualitativa do cenário de aprendizagem proposto na situação III.

Para concluir, com origem nas situações discutidas na seção atual, acentuamos o caráter de imprescindibilidade da mobilização de um conhecimento preliminar, tendo em vista o reconhecimento da equação de Claireaut, não restritivo ao quadro analítico da equação $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ e, sim, por intermédio de um expediente que enfatiza a visualização, como elemento cognitivo estimulado nos estudantes, tendo como escopo a percepção da existência de envolvidas e da envoltória. Podemos, por exemplo, comparar (ver figura 1) a empenho de Levy (1912), no sentido de expressar o caráter dinâmico do processo aproximativo, tendo em vista a determinação da curva envoltória, com a construção dinâmica do software (ver e comparar com as figuras indicadas em 4, 5, 6, e 7).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordamos no presente trabalho os principais elementos que assumimos constituir papel essencial na consubstanciação das duas etapas preliminares tendo em vista uma eventual experimentação em sala de aula, afetada pelo viés metodológico de uma Engenharia Didática (ED), bem como uma mediação planejada e inspirada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), o que confere um viés multiteórico geralmente utilizado pela vertente francesa da Didática Matemática. Isso posto, os elementos abordados nas análises preliminares nos permitem perspectivar pontos de vista alvissareiros para o ensino dessa matéria, a partir da apreciação da posição assumida por matemáticos no passado (Claireaut, 1734, 1762), tendo em vista o processo evolutivo e demarcação do cenário conceitual de um modelo matemático aqui examinado.

Como podemos constatar, com origem nas informações coligidas e discutidas ainda nas análises preliminares, o contexto do ensino atual das equações diferenciais ordinárias exige vigilância, por parte de educadores e, também, por parte de matemáticos profissionais. E, de modo específico, resgatamos um relato de autores e matemáticos que apontam como negativista uma abordagem indefectível e que tende a se ocupar de uma profusão de tarefas fastidiosas, focadas na resolução analítica de classes de EDO´s, que constituem exceção, sob um ponto de vista matemático mais abrangente, conquanto que, relega ou desconsidera uma espécie de estudo qualitativo (quadro analítico, geométrico e numérico) de muitas das propriedades envolvidas e reexaminadas aqui com o recurso da tecnologia. Não obstante, abordamos alguns exemplos no ensino atual que evidenciam um quadro reducionista e que transforma a abordagem de vários assuntos no contexto das EDO´s como processo resolutivo de equações que constituem exceção dentro da teoria.

Assim, ao decurso de nossa análise *a priori,* prevista pela sistemática da Engenharia Didática (ED), apontamos algumas situações problema que discutem as fases dialéticas de ação, formulação, validação e de institucionalização (TSD), envolvendo conhecimentos estimulados, num primeiro momento na visualização e percepção tácita de propriedaes e a identificação tácita de elementos de ordem gráfico-geométrica (Alves, 2014; 2016b), tendo em vista o entendimento qualitativo do modelo da equação de Claureaut que, ao decurso do escrito, indicamos notacionalmente por $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, sem desconsiderar o papel e a função de uma envoltória correspondente.

Nesse sentido, acentuaremos os seguintes elementos proporcionados, tendo em vista o uso do *software GeoGebra*: os estudantes podem explorar/manipular as construções dinâmicas do *software GeoGebra* e determinar/visualizar a existência das envolvidas e a progressiva determinação da envoltória correspondente (como resultado de um processo dinâmico aproximativo de seus pontos de interseção); os estudantes poderão comparar/relacionar/investigar as representações computacionais com as representações clássicas do quadro analítico (descrição em coordenadas cartesianas e paramétricas); a identificação do modelo de equação de Claireaut que extrapola o quadro analítico de representação analítica canônica; o entendimento dinâmico do processo de aproximação dos pontos de intersecção da envolvidas que, no limite, determinam a trajetória da curva envoltória, característica da equação de Claireaut, se evidencia como um processo de ensino não marginal no contexto do ensino do referido assunto.

Por fim, acentuamos que com uma perspectiva de investigação proporcionada pela Engenharia Didática (ED), bem como o viés de uma abordagem diferenciada e transposição didática (Chevallard, 1991) de acordo com a Teoria das Situações Didaticas (TSD), poderemos vislumbrar a exploração de elementos com o amparo da visualização, cuja natureza variada (quadro numérico, geométrico e analítico) estimula uma espécie de abordagem "qualitativa" para o ensino de EDO´s e, por tal via, obstar um viés reducionista do mesmo. Nesse sentido, assumimos posição concorde com Figueiredo & Neves (2002, p. 6)), quando assinalam "o aspecto importante de interpretação das soluções obtidas e de seu significado dentro do contexto do problema em estudo".

Não obstante, não nos furtamos de considerar, de modo preliminar, um ponto de vista de ensino que nos fornece um entendimento dos expedientes empregados por matemáticos profissionais, tendo em vista a evolução da teoria das equações diferenciais ordinárias ocorridas em um passado não muito distante, fato que afeta, de modo inexorável, diretamente, nossa perspectiva e preocupação didático-metodológica.

REFERÊNCIAS

Alves, F. R. V. (2014). Família de curvas planas e sua envoltória: visualização com o software GeoGebra. *Revista Conexões, Ciência e Tecnologia*, *8(3)*, 67 – 74.

Almouloud, Ag Saddo. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Alves, F. R. V. (2016a). Engenharia Didática para a generalização da Sequência de Fibonacci na disciplina de História da Matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, *18(1)*, p. 123 – 156.

Alves, F. R. V. (2016b). Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Revista de Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista – ENCITEC*. 6(2), 1 – 16.

Arslam, S. (2005). *L´approche qualitative des équations differenttielles en classe em terminale en S: Est-elle valable? Quels sont les enjeux et les consequences*? (thése de doctorat).

Artigue, M. (1984). Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. In: *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, 8(1), p. 1 – 38.

Artigue, M. (1989). Une recherche d´ingènierie didactique sur l´enseignement des Èquations différentielles en premier cycle universitaire. *Cahier du Séminaire de Didactique des Maths et de l´Informatique de Grenoble*, p. 183-209, IMAG, Grenoble.

Ávila, G. (2002). O ensino do Cálculo e da Análise. *Matemática Universitária*. *33(1)*, 83 – 95.

Braun, Martin. (1991). *Differential Equations and Their Applications An Introduction to Applied Mathematics*. fourth edition. New York: Springer.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d´enseignement des Mathématiques* (these de doctorat). Bourdeaux: Université Bourdeaux I, 905f.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en Didactiques des Mathematiques*, 9(2), 309 – 333.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. In: Brousseau, (org.) Théorie des situations didactiques. Grenoble La Pensée Sauvage, (pp. 115 – 160).

Camacho-Machín, M; Perdomo-Díaz, J & Santos-Trigo, M. (2012). Na exploration of student´s conceptual knowledge built in a first ordinary differential equation course. *The teaching of Mathematics*, *15(1)*, 1 – 20.

Chevallard. Y. (1991). *La Transposition didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition.

Claireaut, A. C. (1734). Solution de plusieurs problème. *Histoire de l´Academie Royale de Sciences*. *1(1)*, 196 – 215.

Claireaut, A. C. (1762). Sur l´integration ou la construction des equation differrentielles du première ordre. *Histoire de l´Academie Royale de Sciences*. 1(1), 293 –324. Disponível em: http://gallica.bnf.fr/. Acessado em: 24 de março de 2020.

Costa, R. L. (2009). *Geometria de Teias* (dissertação de mestrado em Matemática). São Carlos: Universidade de São Paulo.

Douady, Régine. (1984). *Jeux de Cadres et dialetique d´outil-objet dans l´enseignement de Mathématiques – une réalisation dans tout cursus primaire* (thése d´État). Paris: Université Paris VII. 262f.

Douady, Régine. (1995a). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, (pp. 1 – 7).

Douady, Régine. (1995b). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, (pp. 61 – 97).

Douady, Régine. (2008). Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Revista Eletrónica de investigación en educación e ciencias*. nº 1, p. 1-7.

Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.* (tésis de doctoral). Programa internacional de doctorado enseñanza de las ciencias. Universidad de Burgos.

Figueiredo, D. & Neves, A. (2002). *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro: SBM.

Goursat, E. (1895). Sur des équations différentielle analogues à l´équation de Claireaut. *Bulletin de la Societé de Mathématiques de France*. *23(1)*, 88 – 95

Haddad, Sassi. (2012). *L´enseignement de L´intégrale en classe terminale de l´enseignement tunisien*. (These de doctorat). Paris: Université Paris VII.

Hebrard, Pierre. (2011). L´Humanité comme competénce? Une zone d´ombre dans la professionalisation aux métiers da l´interaction avec autrui. *Les sciences de l´Éducation*. *44(1)*, 103 – 121.

Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias*. 231 f. Tese

(Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Javaroni, S. L. (2009). O processo de visualização no curso de introdução às equações diferenciais ordinárias. *Revista de Ensino de Engenharia*. *28(1)*, 17 – 25.

Katz. V (1998). *An introduction to the History of Mathematics*. New York: Addison-Wesley.

Klamkin, M. S. (1953). Generalization of Clairaut´s differential equation and the analogous difference equation, *American Mathematical Monthly*, *60(1)*, 97 – 99.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, 10(1), 97 – 112.

Lazarov, B. (2011). Teaching envelopes in the secondary school. *The teaching of Mathematics*, *13(1)*, 45 – 55.

Levy, H. (1912). An extension of Claireaut equation. *Proceedings of Edinburg Mathematical Society*, *30(1)*, 1 – 10.

Malonga Moungabio, Fernand. (2008). *Interactions entre les Mathématiques et la Physique dans l´enseignement secondaire em France: cas des equations differentielles du premier ordre* (thése de doctorat), Paris: Université Denis Diderot, Paris VII, 447f.

Mansion, P. On Claireaut´s equation. *Messenger Mathematics*. *6(1)*, 90 – 93, 1877.

Margolinas, C. (1995). D´evolution et institutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôle du maître. *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, Paris: Maison Édition, (pp. 342-347).

Mitrinovic, D. S. & Keckic, J. D. (1981). *Variations and generalizations of Claireaut´s equations*. University of Belgrado Publishers Elektrothen. 716(1), p. 11 – 21.

Oliveira, E. A. & Igliori, S. B. C. (2013). Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. *EM TEIA: Revista de Educação, Tecnológica e Iberoamericana*, *4(2)*, 1 – 24.

Rajovic, Miloje & Dimitroskiski, Dragan. (2002). The Claireaut and Lagrange aureolar equation. *Kragujevac Mathematical Jornal*. *24(1)*, 123 – 133.

Raffy, L. (1895). Sur certaines équations qu´on intègre en les différentiant. *Bulletin de la Societé de Mathematiques de France*, *23(1)*, 50 – 61.

Raffy, L. (1897). Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur analogues à l'équation de Clairaut. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *25(1)*, 71-72.

Robinet, J. (1983). De L´ingenierie Didactiques. *Les Cahiers Blancs*. *1(1)*, 1 – 11.

Rodriguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée: une étude de manuels et le processus de* *médelisation en Terminale S* (thése de doctorat). Grenoble: Université Joseph Fourier, France.

Saglam-Arslan, A. (2008). *Les équations Differénttielles en Mathématiques et en Physique: Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir* (thése de doctorat). Grenoble: Université Joseph Fourier, France.

Sispanov, S. (1945). Ecuaciones diferenciales análogas a las de Claireaut. *Sociedad Argentina de Matematicas*, *1(1)*, 127 - 152.

Valdez, J. E. N. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. *Revista Educación Y Pedagogia*, *15(35)*, abril, 165 – 181.

Vilches, M. A. (2009). A envoltórias de curvas planas. *Cadernos do IME*, *21(3*), 1 – 32.

Vilches, M. A. (2004). A envoltórias de curvas planas. *Cadernos do IME*, *21(3)*, 1 – 32.

Yates, R. C. (1974). *Curves and their properties*. New York: National Council of Teachers of America.

Witthy, H. W. (1952). Generalisation of Clairaut´s equation. *American Mathematical Monthly*, *59(1)*, 100 – 102.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Engenharia Didática (ED): análises preliminares e *a priori* para a equação diferencial de Claireaut

Francisco Regis Vieira Alves
Professor Titular do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, departamento de Matemática.
Bolsista de Produtividade em Pesquisa – CNPQ-PQ2.
Docente Permanente do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática PGECM/IFCE.
Docente Permanente do Mestrado Profissional em Educação Profissional Tecnológica – PROEPT/IFCE
Docente Permanente do Doutorado acadêmico em REDE – RENOEN – Rede Nordeste de Ensino.
e-mail: fregis@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561
Site pessoal: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles
Lattes: http://lattes.cnpq.br/3288513376230522

Endereço correspondência autor: Rua Clóvis Beviláqua, nº 100, Bairro Edson Queiroz.

AGRADECIMENTOS
Agradecemos o suporte no Brasil e o apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq para o desenvolvimento dessa pesquisa.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: Alves, Francisco, R. V.
Coleta de dados: Alves, Francisco, R. V.
Análise de dados: Alves, Francisco, R. V.
Discussão dos resultados: Alves, Francisco, R. V.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq para o desenvolvimento dessa pesquisa.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

EDITOR
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO
Recebido em: 09/05/2020 - Aprovado em: 05/08/2020