Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E SISTEMAS LINEARES: CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Theory of Semiotic Representation Records and Linear Systems: Contributions of a Teaching Sequence

Carolina Ferreira da **SILVA**
Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil
carolsilva.cf57@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2416-6403

Vanilde **BISOGNIN**
Universidade Franciscana, Santa Maria, Brasil
vanildebisognin@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5718-4777

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, com o objetivo investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas. Para isso, foi aplicada uma sequência didática sobre Sistemas de Equações Lineares, dividida em quatro blocos. O primeiro bloco foi destinado a uma familiarização com sistemas possíveis e impossíveis 2x2, por meio de problemas; o segundo bloco foi composto por problemas envolvendo sistemas possíveis 3x3 e 5x4; o terceiro bloco trouxe problemas referentes a sistemas impossíveis 3x3 e, por fim, o quarto bloco desenvolveu-se a representação gráfica de sistemas 2x2. Concluímos que a maior parte dos estudantes conseguiram transitar ao menos entre dois tipos distintos de representações de um mesmo objeto matemático, no entanto apresentaram dificuldades na representação gráfica de sistemas lineares, de modo que fizeram o uso do *software* GeoGebra para tais representações.

Palavras-chave: Problemas, Representação gráfica, Ensino de matemática

ABSTRACT

This article presents partial results of a research carried out with students of a Mathematics Degree course in Rio Grande do Sul, with the objective of investigating the contributions of a didactic sequence for the teaching and learning of Systems of Linear Equations, in the light of Theory of Semiotic Representation Records. For this, a didactic sequence on Linear Equation Systems was applied, divided into four blocks. The first block was intended to familiarize with possible and impossible 2x2 systems, through problems; the second block was composed of problems involving possible 3x3 and 5x4 systems, the third block brought problems referring to impossible 3x3 systems and, finally, the fourth block developed the graphical representation of 2x2 systems. We conclude that most students were able to move at least between two different types of representations of the same mathematical object, however they presented difficulties in the graphical representation of linear systems, so they made use of the Geogebra software for such representations.

Keywords: Problems, Graphic representation, Mathematics teaching

1 INTRODUÇÃO

A Álgebra como um dos campos da Matemática tem suas origens na sistematização e formalização de técnicas utilizadas por povos da antiguidade. Com o decorrer dos anos, os estudos e as definições sobre a Álgebra se modificaram, com isso nos anos 80 surgiu a caracterização do termo pensamento algébrico, o qual ocorre por meio de conjecturas e argumentos, identificação de padrões e regularidades, generalizações sobre as relações matemáticas, e estabelecimento de leis matemáticas que expressem as relações de interdependência entre grandezas nos distintos contextos (Ponte, Branco & Matos, 2009; Brasil, 2017).

Ainda de acordo com Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no Ensino Fundamental, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, são necessários a criação, interpretação e o processo de transição entre as representações gráficas e simbólicas, a fim de resolver problemas por meio de equações e inequações, havendo assim, a compreensão dos procedimentos utilizados e das conjecturas levantadas durante as resoluções (Brasil, 2017).

Para Ponte, Branco e Matos (2009) o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares oportuniza ao estudante o desenvolvimento da habilidade de fazer o uso da linguagem algébrica, do seu raciocínio algébrico matemático e, também, na resolução de problemas.

Diante disso, com o objetivo de investigar as contribuições de uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas, foi desenvolvida uma pesquisa de mestrado em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Rio Grande do Sul. A sequência aplicada com os alunos do terceiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática favorecia as conversões e tratamentos nos registros de língua natural, algébrico e gráfico, sendo que para a última representação mencionada os estudantes utilizaram o *software* GeoGebra.

Ainda, a sequência didática foi aplicada de acordo com os passos da Resolução de Problemas, propostos por Onuchic e Allevato (2009). Neste artigo, são apresentados os pressupostos teóricos e resultados do primeiro bloco da sequência didática desenvolvida nesta investigação.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Raymond Duval foi o responsável pelos estudos e desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, a qual tem como intuito compreender e investigar os possíveis obstáculos na construção do conhecimento matemático dos estudantes, bem como contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, análise e visualização, por meio dos distintos registros de representação. Sendo assim, o processo de transformação do conhecimento matemático para o saber acontece a partir mobilização espontânea dos diferentes registros semióticos de um objeto matemático.

A mobilização de distintos registros de um mesmo objeto matemático, destacada por Duval (2009), na maior parte dos casos, não ocorre de maneira espontânea e evidente para os estudantes. Ainda conforme a teoria mencionada, ressalta-se que para a compreensão de um conceito é essencial que os discentes transitem de um registro de representação semiótico a outro, de modo que saibam o seu significado e não confundam a representação com o objeto matemático em si. De fato, os objetos matemáticos não têm uma visualização direta, já que não possuem existência física, e assim, sua compreensão dá-se por meio das representações semióticas. Portanto, convém destacar que as expressões: 5; cinco;$\sqrt{25}$; 10/2 são representações do objeto matemático número cinco, mas nenhuma delas é o próprio objeto número cinco.

Nesse sentido, de acordo com Duval (2009), as representações semióticas têm um papel primordial no desenvolvimento cognitivo e, em particular, na construção do conhecimento matemático, uma vez que, as diferentes formas de representação de um conteúdo matemático, no nosso caso, Sistemas de Equações Lineares, proporcionam o aprimoramento geral das capacidades de raciocinar, analisar e visualizar.

Duval (2013) faz referência a quatro tipos de registros de representação, eles são divididos em multifuncionais e monofuncionais, subdivididos em discursivos e não discursivos. Os registros discursivos são aqueles que fazem alusão ao uso da escrita, oportunizando, assim, a formulação de proposições ou transformação de expressões, possibilitando a descrição, o raciocínio e calcular. Por outro lado, os registros não discursivos beneficiam a visualização, posto que mostram as formas e as configurações. Assim, a língua natural, as distintas escritas para os sistemas de numeração, as formas algébricas, os gráficos, os diagramas e as figuras geométricas são registros de representações semióticas, concebidos em um sistema de capacidades específicas com o intuito de descrever ou representar os objetos matemáticos.

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas destaca a mobilização de diferentes registros de representação para a compreensão dos objetos matemáticos, salientando a importância de o estudante transitar ao menos em dois tipos distintos de representação de um mesmo objeto, havendo, desse modo, a compreensão do conteúdo, e por conseguinte, a construção de conexões mentais de aprendizagem. “[...] essa apreensão é significativa a partir do momento que o aluno consegue realizar tratamentos em diferentes registros de representação e passar de um a outro o mais naturalmente possível” (Machado, 2010, p.168).

Em referência ao procedimento de transitar entre as diferentes representações de um objeto matemático, o qual deveria ser espontâneo, por parte dos estudantes, não ocorre dessa maneira, já que em algumas situações há equívocos entre o próprio objeto e sua representação, bem como entre os tratamentos e conversões desses objetos. Diante disso, apresentaremos uma breve explanação sobre as percepções de tratamento e conversão, que segundo Duval (2009), são dois tipos de transformações de representações semióticas, que representam os diferentes signos empregados na Matemática.

Por tratamento, compreende-se que é a transformação de representações que ocorrem dentro de um mesmo sistema de representação, ou seja, uma transformação inteiramente interna a um registro. Assim, partindo do pressuposto das singularidades e particularidade que cada registro tem, as quais, não necessariamente, são válidas a outros registros, os tratamentos estão interligados com a forma do conteúdo.

A conversão, por sua vez, é concebida como uma transformação, que ocorre entre registros distintos. Isto é, em outras palavras, em um dado registro, a representação de um objeto é convertida em uma nova representação em outro registro, uma vez que sua referência é preservada, porém não se conserva o sentido, de modo que não se mantenham as explicações das mesmas propriedades desse objeto.

No entanto, é comum que as pessoas confundam tratamentos e conversões. Logo, esse tipo de confusão deve ser evitado, em razão de se tratar de transformações distintas, mesmo que durante o processo de conversão seja necessário o uso de diferentes tratamentos. Em vista disso, tratamentos e conversões ocasionam a identificação de um objeto matemático, bem como sua exploração a partir de transformações da sua representação.

Segundo Duval (2009), em duas representações de registros diferentes pode ser determinada, localmente, uma correspondência, de modo que deve acontecer uma reorganização dos elementos do registro de partida, para se chegar ao elemento correspondente, isto é o que o autor denomina de congruência e de não congruência quando isso não ocorre.

Diante disso, no trabalho com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, estimamos o desenvolvimento de conversões e tratamentos entre os registros de língua natural, algébrica e gráfica, de modo que os licenciandos construam conhecimentos, como ressalta a teoria de Duval.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na pesquisa aqui relatada foi desenvolvida uma sequência didática organizada em quatro blocos, que proporcionaram elementos para a coleta e análise dos dados. Participaram da pesquisa seis estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I, que engloba o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares em sua ementa. Estes alunos se dispuseram a responder a sequência didática e todos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A sequência didática elaborada continha dez problemas envolvendo o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, dividida em quatro blocos e dois desses blocos contendo o que denominamos por “Explorando Conhecimentos”, que foram questionamentos que buscaram identificar as conjecturas e percepções dos participantes da pesquisa referentes as estruturas dos problemas, bem como de suas resoluções. Desse modo, o primeiro bloco foi destinado a um reconhecimento inicial do conteúdo, no qual desenvolvemos a familiarização dos estudantes com sistemas possíveis e impossíveis 2x2. Ainda, este bloco continha momentos de reflexões denominados por “Explorando Conhecimentos”, como já ressaltado.

O Bloco 2 foi composto por problemas envolvendo sistemas possíveis 3x3 e 4x5. O terceiro bloco continha problemas impossíveis 3x3 e o último bloco foi destinado a representação gráfica de três sistemas 2x2 para a classificação quanto suas soluções e as justificativas das respostas apresentadas. E, para finalizar incluía mais um “Explorando Conhecimentos”, no qual foi solicitado uma análise e comparação entre todos os problemas da sequência didática. As respostas foram analisadas à luz da teoria de

Registros de Representações Semióticas e aplicadas seguindo os passos da metodologia de Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2009), a saber: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, buscado consenso e formalização do conteúdo. Ressaltamos ainda, que os participantes da pesquisa utilizaram o *software* GeoGebra para a representação do registro gráfico.

Cabe aqui ressaltar que a aplicação da sequência didática, deu-se de forma remota, devido a pandemia do novo Coronavírus, ocasionada pelo vírus da COVID-19. Assim, os problemas foram enviados por blocos aos estudantes, via formulários Google, e ao final de cada bloco ocorreram encontros para as discussões das resoluções, dificuldades e possíveis dúvidas que os participantes pudessem ter no desenvolvimento das questões, já que a pesquisadora não teve contato presencial no momento de solução das questões por parte dos estudantes.

Como já mencionado, as aplicações ocorreram de maneira remota, e em vista disso, algumas adaptações tiveram que ser realizadas, no que diz respeito as categorias de análise de Resolução de Problemas. Desse modo, nos encontros virtuais a pesquisadora solicitou que um dos participantes da pesquisa comentasse sobre o que entendeu do problema e os demais complementaram concordando ou discordando, assim ocorreram as discussões, englobando os passos de leitura individual e em grupos da Resolução de Problemas.

Os passos de registros na lousa, plenária e busca de consenso, ocorreram de maneira análoga aos anteriores. A formalização do conteúdo deu-se em uma conversa da pesquisadora sobre os diferentes métodos de resolver Sistemas de Equações Lineares, visto que os participantes tinham conhecimento dos procedimentos algébricos de resolução. O passo de observar e incentivar ocorreram quando os participantes procuravam a pesquisadora, via *WhatsApp*, para relatar dificuldades e dúvidas. Visando a privacidade dos estudantes, eles foram denominados por $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \; e \; E_6$.

4 ANÁLISE DOS DADOS

A sequência aplicada com os seis licenciandos contava com problemas envolvendo o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, e assim, foi aplicada seguindo os passos da Resolução de Problemas, de acordo com Onuchic e Allevato (2009). A sequência didática continha questionamentos que conduziam os participantes a transitar entre as representações em língua natural, algébrica e gráfica, sendo que para a última representação, os participantes da pesquisa, utilizaram o *software* GeoGebra.

A seguir enunciamos o primeiro problema (ver quadro 1).

Quadro 1: Enunciado do Problema 1

Uma dona de casa foi ao supermercado duas vezes em uma mesma semana para comprar arroz e feijão. Na primeira vez ela comprou três pacotes de feijão e dois pacotes de arroz, e na segunda vez, ela comprou um pacote de arroz e dois de feijão. Sabendo que os preços dos produtos não se alteraram entre uma compra e outra, e que a primeira compra lhe custou R\$ 31,00 e a segunda R\$ 17,60. a) Qual é o preço unitário de cada pacote de arroz e feijão? b) Represente graficamente o modelo que representa uma possível solução do problema. O que você observa? c) Você conhece outros métodos para solucionar o problema? Se sim, qual(is)?

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação as categorias de análise da Resolução de Problemas, todos os seis participantes tiveram a mesma compreensão do Problema 1, de modo que não apresentaram dificuldades em realizar a conversão da língua natural para a algébrica (ver figura 1), que mostra a conversão realizado pelo E_5.

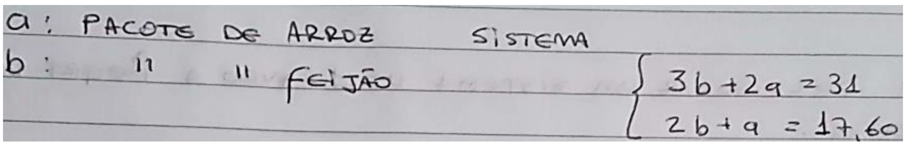

Figura 1: Conversão do registro de língua natural para algébrico do E_5
Fonte: Dados da pesquisa

Se fez perceptível que o estudante conseguiu identificar os dados do problema, bem como definir as incógnitas a serem encontradas, realizando a conversão do registro de língua natural para o algébrico, de modo que, conforme Duval (2009), transitou entre distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático, evidenciando sua aprendizagem.

Para a resolução do problema, os estudantes empregaram diferentes métodos de resolução. Os participantes E_1 e E_2, utilizaram o Método de Cramer, o método da substituição foi utilizado pelo E_5, já o E_3 e E_4 resolveram o problema por meio do método da adição.

O participante E_2, optou por resolver o problema por meio do Método de Cramer. Como já mencionado, assim como os demais, o participante compreendeu o problema e realizou a conversão de maneira correta. No entanto, ao final de sua resposta, foi notado que ela não condizia com a conversão do sistema que o próprio realizou, ficando evidente a falta da identificação das incógnitas. Todavia, é válido ressaltar que o participante realizou os procedimentos algébricos corretos na resolução por Cramer, bem como os tratamentos na linguagem algébrica, assim, mostramos a resolução do participante (ver figura 2).

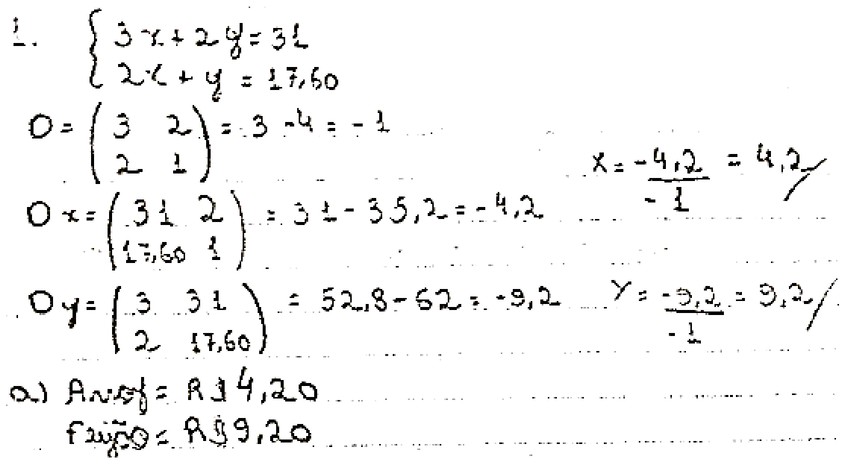

Figura 2: Resolução do Problema 1 do participante E_2

Fonte: Dados da pesquisa

O participante E_2 realizou os tratamentos de resolução de cálculos de determinantes, evidenciando assim, seus conhecimentos matemáticos nos procedimentos referentes ao Método de Cramer.

Já o participante E_3, utilizou o método da adição em sua resolução, e o E_5, foi o único que optou por resolver o problema através do método da substituição, ambos os participantes encontraram os valores corretos do sistema, identificando as incógnitas e retirando os dados propostos em língua natural, realizando assim, a conversão para o registro algébrico. No método de resolução escolhido por cada participante, os tratamentos necessários para a solução foram efetuados de maneira correta. Demonstrando assim, características básicas da Resolução de Problemas, mencionadas por Onuchic e Allevato (2011), que são, autonomia, elaboração de conjecturas, desenvolvimento do poder matemático dos discentes e a capacidade de pensar matematicamente, uma vez que os participantes puderam vivenciar tais características ao resolver os problemas propostos na sequência didática.

Em relação ao subitem “b” do Quadro 1, o qual solicitou uma possível representação gráfica do sistema, foi relatado, no encontro virtual com a pesquisadora, pelos participantes E_4 e E_6, a dificuldade em conseguir representar graficamente o sistema. Isto corrobora com uma das conclusões que Boemo (2015) obteve em sua dissertação de mestrado, evidenciando que os estudantes ficam receosos e apresentam algumas dificuldades ao realizarem a conversão para o registro gráfico. Nesse momento a participante E_1, relatou aos demais colegas que utilizou o s*oftware* GeoGebra para a solução da questão. Nesse sentido, Jordão (2011) que ressalta a relevância da utilização de *softwares* educacionais para a representação gráfica de sistemas.

A partir do momento que foi ressaltado sobre o uso do GeoGebra, foi permitido pela pesquisadora que os participantes utilizassem o *software* para as representações gráficas, mas que seria, ao mesmo tempo, interessante e desafiador que eles tentassem construir de maneira manual o gráfico. Em relação a utilização de recursos tecnológicos, tem-se pelos autores Dullius et al (2006), que a matemática tem forte relação com as tecnologias, desde as calculadoras, computadores e outros, revelando assim, a necessidade do docente em perceber como aproveitá-las em suas aulas.

Para Giraldo et al (2012), atividades de aprendizagem que aproveitem as especificidades dos recursos computacionais, como o *software* GeoGebra, são essenciais para promover e revelar aspectos dos conceitos que ficariam ocultos com recursos ou representações convencionais. Também, Moretti e Luiz (2010) ressaltam as vantagens que a conversão gráfica com o apoio computacional proporciona aos estudantes, são elas: rapidez na visualização da curva, nas mudanças de escalas e parâmetros, e a agilidade com que a curva pode ser visualizada, permite a utilização de técnicas de ensino com uso das novas tecnologias.

Posto isto, apenas o participante E_5, realizou a conversão do registro algébrico para o gráfico de modo manual, os demais utilizaram o Geogebra como método para solucionar a representação gráfica. Atribuímos a dependência do uso do *software* GeoGebra, ao fato dos participantes não estarem acostumados a trabalhar com esse tipo de representação, não estando relacionada com a congruência e não congruência de registros. Adiante, é mostrado a representação gráfica do problema pelo participante E_5 (ver figura 3).

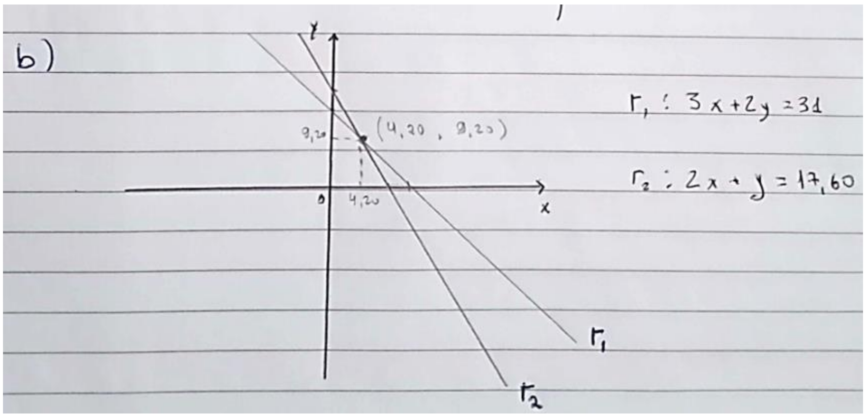

Figura 3: Conversão de registro algébrico para gráfico realizada pelo participante E_5.
Fonte: Dados da pesquisa

Foi possível notar na Figura 3, que o participante conseguiu realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico de maneira correta, identificando o ponto de intersecção das retas. Ressaltando a congruência entre os registros, uma vez que de acordo com Duval (2009), o registro de partida é correspondente com o registro de chegada. Já, em relação ao que os participantes observaram na construção do gráfico, trazemos as respostas dos participantes (ver quadro 2).

Quadro 2: Resposta dos participantes quanto a observação da construção gráfica do Problema 1

Participante	Resposta da observação da construção gráfica.
E_1	Que o único ponto onde as duas retas se interceptam, são os respectivos valores de $x\ e\ y$ a serem encontrados no sistema.
E_2	Observo que as duas retas se interceptam em um ponto em comum.
E_3	Com o gráfico observo que as equações são distintas, pois elas geraram retas diferentes, retas concorrentes.
E_4	Não apresentou resposta por escrito, apenas mostrou no gráfico, realizado no Geogebra, a o ponto de intersecção das retas.
E_5	Observo que existe apenas um ponto de intersecção entre as retas $r_1\ e\ r_2$.
E_6	Não apresentou resposta por escrito, apenas mostrou no gráfico, realizado no Geogebra, a o ponto de intersecção das retas.

Fonte: Dados da pesquisa

Diante das respostas apresentadas no Quadro 2, observamos que os participantes $E_2, E_3\ e\ E_5$ identificaram que as retas da representação gráfica do sistema referente ao Problema 1, tinham um único ponto em comum. No entanto, apenas o participante E_1 especificou, em língua natural, que o ponto de intersecção eram os valores encontrados para x e y no Sistema de Equações Lineares. Os participantes $E_4\ e\ E_6$, não apresentaram resposta escrita, apenas as representações gráficas através do *software* GeoGebra, porém identificaram a interseção das retas. Dessa maneira, acreditamos que os estudantes supracitados não explicitaram o que seria o ponto de intersecção das retas do sistema por este conceito ter sido pouco explorado e consolidado em suas trajetórias acadêmicas.

Diante as respostas apresentadas no Quadro 2, percebemos a dificuldade que os participantes da pesquisa têm ao identificar visualmente as variáveis no registro gráfico e relacioná-las com o algébrico, de modo que essa conexão entre os dois registros não é realizada de maneira satisfatória, visto que existe um abismo cognitivo da interpretação global da relação entres esses registros. Duval (2011), ressalta que a leitura das representações gráficas exige dos estudantes a discriminação das diferentes variáveis visuais que constituem este tipo de representação, e, que os estudantes tenham consciência das correspondências entre as variações visuais dos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica.

O subitem "c" do Problema 1, foi especificado pelos participantes que eles conheciam outros métodos de resolução de sistemas de Equações Lineares, como por exemplo Regra de Cramer (participante $E_3, E_4\ e\ E_5$), método da substituição (E_3) e escalonamento (E_2).

A seguir apresentamos o enunciado do Problema 2 (ver Quadro 3).

Quadro 3: Enunciado do Problema 2

Uma dona de casa foi ao supermercado duas vezes em uma mesma semana para comprar arroz e feijão. Na primeira vez ela comprou um pacote de feijão e dois pacotes de arroz, e na segunda vez, ela comprou quatro pacotes de arroz e dois de feijão. Sabendo que os preços dos produtos se alteraram entre uma compra e outra, e que a primeira compra lhe custou R$ 25,00 e a segunda R$ 50,00. a) É possível determinar o preço unitário de cada pacote de arroz e de cada pacote de feijão? Por quê? b) Represente graficamente o modelo que representa uma possível solução do problema. O que você observa? c) Analise os diferentes métodos de solucionar o problema.

Fonte: Dados da pesquisa

O Problema 2 apresentou um enunciado em língua natural bastante semelhante ao Problema 1, modificando apenas algumas palavras e valores. Tais modificações tornaram o problema em um Sistema Possível Indeterminado, ou seja, um problema que possui infinitas soluções. Ainda, essa modificação no enunciado do problema, proporcionou aos participantes da pesquisa maiores condições de pensar e testar uma ideia emergente, integrando assim, uma teia de ideias e de compreensão relacional (Onuchic & Allevato, 2004).

Como já esperado os participantes não tiveram dificuldades em compreender o problema e entender o que era solicitado, de modo que conseguiram realizar a conversão do registro de língua natural para o algébrico. Apresentamos a conversão realizada pelo E_2 (ver figura 4).

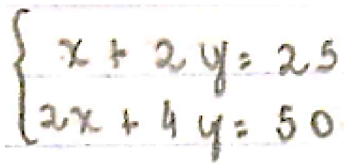

Figura 4: Conversão do registro de língua natural para algébrico do E_2
Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que o estudante conseguiu identificar os dados do problema, bem como definir as incógnitas a serem encontradas e realizar a conversão do registro de língua natural para o algébrico, assim como os demais participantes. Para a resolução do problema, os métodos utilizados foram, Cramer ($E_2 e\ E_4$), substituição (E_3) e adição (E_6). Os participantes $E_1 e\ E_5$ não apresentaram método algébrico de resolução na questão, apenas relataram que não era um sistema possível indeterminado, pois existia uma infinidade de valores possíveis. As respostas desses dois participantes deram-se em decorrência da observação da conversão do registro algébrico para o gráfico, no entanto, eles não tinham conhecimento que o método gráfico também poderia ser um método de solucionar um Sistema de Equações Lineares. Isto ficou evidente na fala do E_1, quando relatou "pelo GeoGebra foi onde consegui", evidenciando assim, a pouca exploração gráfica de Sistemas Lineares.

Mostramos o método utilizado pelo participante E_2 na resolução do problema 2 (ver figura 5).

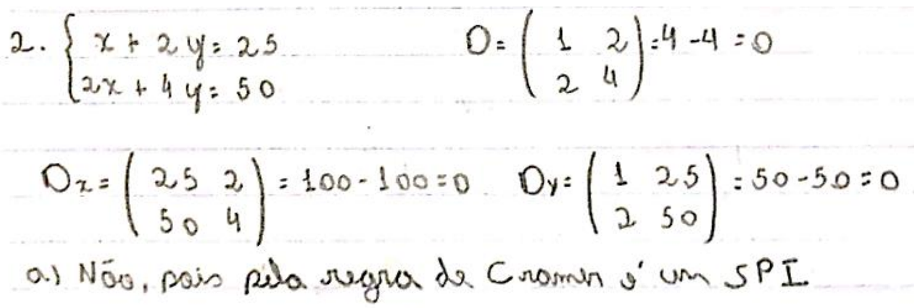

Figura 5: Resolução do Problema 2 pelo participante E_2
Fonte: Dados da pesquisa

Diante da resolução apresentada pelo participante E_2, percebemos que ele usou de tratamentos adequados para a resolução do problema, por Cramer, bem como soube discutir as soluções encontradas, evidenciando assim, que pelo método utilizado o sistema é “SPI”, isto é, Sistema Possível Indeterminado, já que o determinante da matriz e dos coeficientes resultaram em zero. Ainda no Problema 2, foi relatado pelos participantes a “necessidade” de se encontrar um valor para as incógnitas dos problemas, mesmo eles sabendo que o sistema possui infinitas soluções.

Para a conversão do registro algébrico para o gráfico, solicitada no subitem “b” do Problema 2, apenas o participante E_5 fez de modo manual, ou seja, não utilizou o *software* GeoGebra como os demais participantes da pesquisa. A razão profunda dessas dificuldades na construção gráfica dos sistemas lineares de modo manual, segundo Duval (2011), não está nos conceitos matemáticos, mas na ausência de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre os registros de representação gráfica e expressão algébrica. Apresentamos a conversão realizada pelo E_5 (ver figura 6).

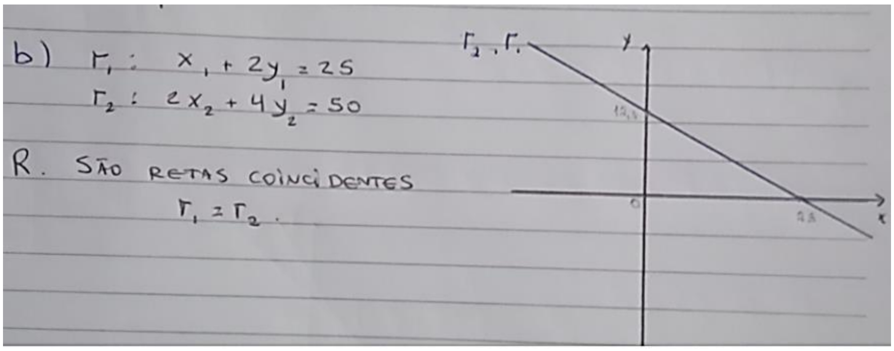

Figura 6: Conversão de registro algébrico para gráfico realizada pelo participante E_5.
Fonte: Dados da pesquisa

Observamos na Figura 6, que o participante E_5, conseguiu realizar a conversão solicitada, bem como discuti-la, relatando assim, que as retas r_1 e r_2, denominadas por ele, são coincidentes, utilizando até mesmo uma linguagem algébrica para identificar sua observação.

Em relação a análise dos diferentes métodos de resolução do problema, foi exposto pelos participantes que o problema também poderia ser resolvido por meio do método da substituição (E_3 e E_4) e escalonamento (E_4). Com isso, ficou evidente que os participantes da pesquisa e futuros professores, têm conhecimentos matemáticos quanto aos distintos métodos de representar algebricamente a solução de Sistemas de Equações Lineares.

Dando continuidade nas atividades que o Bloco I da sequência didática proposta, apresentamos os questionamentos do tópico denominado “Explorando Conhecimentos” (ver quadro 4).

Quadro 4: “Explorando Conhecimentos”

1) Analise os problemas 1 e 2. Encontre e identifique as diferenças entre eles. 2) Quantas soluções foram encontradas no primeiro problema? E no segundo? 3) Existem diferenças nas representações gráficas? Se sim qual(is)? 4) Existem diferenças nos métodos de solucionar os problemas? Se sim qual(is)?

Fonte: Dados da pesquisa

As questões que abordavam o tópico “Explorando Conhecimentos”, tinham por objetivo que os participantes estruturassem suas conjecturas e percepções referentes as estruturas dos problemas, bem como suas resoluções. Desse modo, apresentaremos, a seguir, as ideias e compreensões proferidas pelos estudantes.

Os participantes conseguiram identificar que os Problemas 1 e 2 eram classificados de modos diferentes quanto as suas soluções, sabendo que um era um Sistema Possível Determinado (problema 1) e o outro Sistema Possível Indeterminado (problema 2).

Além das percepções dos demais estudantes, destacamos que o participante E_2, conseguiu identificar que no Problema 2, os valores dos coeficientes eram proporcionais entre si, ao contrário do Problema 1. Logo, percebemos que o estudante foi além das observações dos outros participantes, de modo que sua observação e percepção conduziu aos outros, no momento da plenária, a observarem se os valores dos coeficientes das equações do sistema realmente eram proporcionais, levando-os a chegar no consenso de que quando as equações do sistema são proporcionais entre si, estamos tratando de um sistema possível indeterminado.

Em relação as observações das conversões gráficas dos sistemas, encontrados nos Problemas 1 e 2, ficou evidente, mediante as respostas apresentadas, que os participantes da pesquisa têm conhecimentos quanto as discussões gráficas de Sistemas de Equações Lineares, sabendo assim, que quando as retas provenientes das equações do sistema se interceptam em um único ponto, significa que este ponto são os valores que representam a solução do sistema, sendo um sistema possível e determinado (SPD).

E, ainda, quando as retas são coincidentes, o sistema apresenta infinitas soluções, que é denominado por um sistema possível e indeterminado (SPI).

Quanto as diferenças nos métodos de resolução, os participantes deram ênfase às soluções encontradas e não aos meios que utilizaram para resolver os problemas. Desse modo, eles exemplificaram como diferenças o número de soluções encontradas, e, que no Problema 2, houve maiores dificuldades, pois eles queriam encontrar os valores para as incógnitas.

Para finalizar os problemas do Bloco I, propusemos o Problema 3, com o enunciado abaixo (ver quadro 5).

Quadro 5: Enunciado do Problema 3

O dobro de um número mais o triplo de outro é igual a 6. O quádruplo do primeiro número mais o sêxtuplo do segundo é igual a 1. a) É possível encontrar dois números que satisfaçam essas condições? Em que você se baseou para responder? b) Represente graficamente o modelo que representa uma possível solução do problema. O que você observa? c) Analise os diferentes métodos de solucionar o problema.

Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes $(E_1, E_2,\ E_4,\ E_5\ \ e\ E_6)$ não tiveram dificuldades em retirar as incógnitas e dados do problema, de modo que evidenciaram a compreensão do mesmo, conseguindo assim, converter o registro de língua natural para o registro algébrico. Uma vez que o problema foi o ponto de partida para a construção do conhecimento, tendo o estudante como um construtor do seu próprio conhecimento (Onuchic & Allevato, 2011). A exemplo disso, mostramos a conversão realizada pelo participante E_2 (ver figura 7).

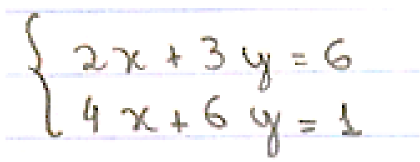

Figura 7: Conversão do registro de língua natural para algébrico do E_2
Fonte: Dados da pesquisa

Já o participante E_3, não conseguiu retirar corretamente os dados em língua natural do Problema 3, de modo que considerou que "O quádruplo do primeiro número mais o sêxtuplo do segundo é igual a 1" fossem relacionados a primeira equação (2x+3y=6) do sistema que ele converteu. Em consonância a isso, Duval (2003) ressalta que, quando se trabalha com um registro plurifuncional (língua natural) existem dificuldades de compreensão dos mais simples enunciados de problemas de aplicação da álgebra até os mais complexos, uma vez que seria necessário, meramente, realizar a tradução dos dados enunciados. Abaixo, mostramos a conversão realizada pelo referido participante (ver figura 8)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 8x + 18y = 1 \end{cases}$$

Figura 8: Conversão do registro de língua natural para algébrico do E_3
Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim, a conversão de registro de língua natural para o registro algébrico, do participante E_3, não foi correta, pois o próprio teve um entendimento equivocado do enunciado do Problema 3, e consequentemente, prejudicou o seu resultado, visto que o sistema proposto era impossível e o participante conseguiu encontrar valores das incógnitas. Assim, Duval (2003) justifica que a transição de um enunciado em língua natural a uma representação em outro registro atinge um complexo conjunto de operações que tem por intuito designar os objetos. Isto é, esse processo de transitar entre um registro semiótico a outro não é tão simples quanto parece, mas necessário para o processo de construção de conhecimentos dos estudantes. O erro do participante foi somente percebido pela pesquisadora no momento de análise das respostas, uma vez que no momento da plenária e busca do consenso o E_3 não expôs seu ponto de vista e concepções, concordando assim, com os demais.

Para a resolução do sistema, os participantes utilizaram métodos algébricos como: Cramer $(E_2 \; e \; E_4)$, método da substituição (E_5), método da adição (E_3) e gráfico $(E_1 \; e \; E_6)$.

Na resposta apresentada pelo E_4, ficou evidente que o participante sabe fazer os tratamentos algébricos corretos, por meio do método de Cramer, para a resolução do sistema. Ainda, notamos que o E_4 soube discutir as soluções encontradas, isso ficou claro na fala do participante, quando ele disse, “Não é possível determinar os dois números. É um sistema impossível, podemos notar que no gráfico são duas retas paralelas e de acordo com a regra de Cramer para ser um sistema impossível o determinante tem que ser 0 e pelo menos um dos determinantes x ou y tem que ser diferente de 0”. Percebemos na resposta do participante E_4, que ele também reforçou suas conjecturas e resultados, utilizando o método de representação gráfica.

No que diz respeito a conversão do registro algébrico para o gráfico, solicitado no subitem “b” do Problema 3, como já mencionado, o único participante que fez a representação gráfica sem o apoio do *software* GeoGebra, foi o E_5. Desse modo, mostramos a conversão realizada pelo participante (ver figura 9).

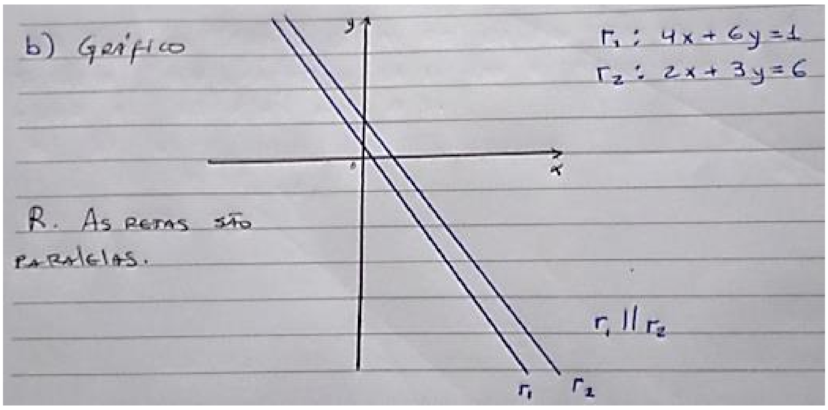

Figura 9: Conversão de registro algébrico para gráfico realizada pelo participante E_5.
Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos, na conversão realizada, que o participante E_5 conseguiu realizar a conversão de modo satisfatório, bem como discuti-la, apresentando resposta em língua natural e algébrica, a fim de responder que as retas representadas no gráfico são paralelas, e, consequentemente, que o sistema é impossível. Identificamos na resposta apresentada pelo participante, o processo de congruência entre os registros de partida e chegada, bem como as conjecturas levantadas durante a resolução e os caminhos traçados para se chegar ao resultado.

Em referência aos diferentes métodos de solucionar o Problema 3, foram citados: escalonamento e substituição (E_4) e o método gráfico $(E_1, E_5 \; e \; E_6)$, mas como nos problemas anteriores, eles não apresentaram as soluções por esses métodos citados, apenas limitaram-se a dizer que é possível utilizá-los para resolução.

Para finalizar o Bloco I, propusemos aos participantes mais um tópico denominado “Explorando Conhecimentos”. Enunciamos o que foi solicitado aos estudantes (ver quadro 6).

Quadro 6: “Explorando Conhecimentos”

1) Observando os problemas 1, 2 e 3, como você discutiria as soluções encontradas?

Fonte: Dados da pesquisa

Dessa maneira ao responder à questão os participantes E_1, E_2 e E_4, responderam que discutiriam de acordo com a classificação de Sistemas de Equações Lineares, isto é, Sistemas Possíveis e Determinados, Sistemas Possíveis e Indeterminados e Sistemas Impossíveis, não relatando como procederiam nas discussões, limitaram-se apenas a dizer o número de soluções que cada sistema possui mediante sua classificação.

Já o participante E_3, mencionou sobre a utilização de problemas cotidianos como forma de discussão das soluções, bem como o uso da representação gráfica. O participante E_5, por sua vez, revelou em sua resposta que utilizaria a representação gráfica como método de discutir os problemas 1, 2 e 3. No entanto, para essas discussões gráficas, o participante relatou o uso das representações utilizadas nessa sequência didática, utilizando assim, as conversões de língua natural para algébrica e da algébrica para a gráfica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar as respostas apresentadas pelos participantes de pesquisa, foi possível notar que não houve grandes dificuldades em realizar as conversões de língua natural para algébrica, bem como na utilização adequada de tratamentos nas resoluções. Acreditamos que este fato ocorreu devido aos participantes da pesquisa estarem mais familiarizados com esse tipo de conversão e aos problemas propostos remeteram sistemas lineares do tipo 2x2. Todavia, para a conversão para o registro gráfico, foi notória a dependência do uso de *softwares* para representar graficamente um Sistema de Equações Lineares, visto que apenas um participante não fez o uso do *software* GeoGebra para tais conversões. Compreendemos que a dependência computacional esteja relacionada ao fato de os participantes da pesquisa não estarem habituados, em suas caminhadas acadêmicas, a trabalharem com o registro gráfico, e não ao fato de haver ou não congruência entre os registros de representações.

Ainda, diante do que foi exposto, mencionamos que as expectativas e as intenções desse bloco foram atingidas, uma vez que os participantes da pesquisa conseguiram demonstrar e construir uma familiarização com sistemas 2x2, explorando as diferenças entre sistemas possíveis e determinados, sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis. Dessa maneira, o uso de diferentes registros de representações de soluções de sistemas de equações foi favorecido e evidenciado como um conhecimento que os estudantes já possuíam.

Entretanto, foi perceptível também, a dificuldade de alguns participantes com relação aos sistemas possíveis indeterminados e impossíveis, pois apesar de terem conhecimentos sobre a classificação de Sistemas de Equações Lineares, havia uma certa tendência a encontrar um par ordenado de solução para o sistema.

Outro ponto que mereceu destaque, foi o fato de os participantes da pesquisa conseguirem transitar ao menos entre dois registros distintos de Sistemas de Equações Lineares, como ressalta Duval (2009). Assim, a construção do conhecimento e entendimento do conteúdo ficaram evidentes nas soluções apresentadas e, também nos poucos diálogos da turma, já que esta possui uma característica mais introspectiva.

Sugere-se que os docentes de cursos de Licenciatura em Matemática, bem como os pesquisadores interessados em investigar o ensino e a aprendizagem relacionados ao conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, explorem as diversas representações semióticas desse conteúdo. Seria desejável elaborar propostas com abordagens de problemas envolvendo sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis, com ênfase na representação gráfica.

Além disso, seria interessante analisar a proposta da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) para a Matemática e discutir com os futuros professores as unidades temáticas, os objetos de conhecimento e as habilidades essenciais sugeridas no documento, para verificar como as diversas representações de um mesmo objeto matemático nele se apresentam. Os resultados da pesquisa aqui relatada, bem como de outras investigações já realizadas ou em andamento, podem embasar o debate sobre a resolução de problemas matemáticos envolvendo Sistemas de Equações Lineares e a Teoria de Registros de Representações Semióticas.

REFERÊNCIAS

Boemo, M. S. (2015). *Os Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no Ensino Médio* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria.

Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.

Dullius, M. M., et al. (2006, outubro). Recursos Computacionais nas aulas de Matemática. In *Anais do III SIPEM* (pp. 96). Águas de Lindóia, SP: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recuperado de http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIII.pdf

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. Dias Alcântara Machado (Eds.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. (pp. 11-33) Campinas: Papirus.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Trad. Levy, L. F.; Silveira, M. R. A. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval. R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Revemat.* Recuperado de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96/21794

Duval, R. (2013). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: S. Dias Alcântara Machado (Eds.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. (pp. 10-20) Campinas: Papirus.

Giraldo,V., et al. (2012). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM.

Jordão, A. L. I. (2011). *Um estudo sobre resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.* Dissertação. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Machado, S. D. A. (2010). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus Editora.

Moretti, M. T, &. Luiz, L. S. (2010). O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. *Educação Matemática Pesquisa*. Recuperado de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4748/3712.

Onuchic, L. D. L. R, &. Allevato, N. S. G.(2004). Novas reflexões sobre o ensino - aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Maria Bicudo, &. M. Borba. (Eds.) *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez.

Onuchic, L. D. L. R, &. Allevato, N. S. G.(2009). Formação de professores urgentes na licenciatura em matemática. In: M.C. Resende Frota, &. L. Nasser. (Eds.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM.

Onuchic, L. D. L. R, &. Allevato, N. S. G.(2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática.* Recuperado de https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ponte, J. P., Branco, N., &. Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Teoria de registros de representações semióticas e sistemas lineares: contribuições de uma sequência didática.

Carolina Ferreira da Silva
Licenciada em Matemática
Universidade Franciscana, Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, Brasil
carolsilva.cf57@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-2416-6403

Vanilde Bisognin
Doutorado em Matemática
Professora titular na Universidade Franciscana, Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, Brasil
vanildebisognin@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5718-4777

Endereço de correspondência do principal autor
Fidêncio Caigoaté, 182, 97543270, Alegrete. RS, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: C. F. Silva, V. Bisognin
Coleta de dados: C. F. Silva, V. Bisognin
Análise de dados: C. F. Silva, V. Bisognin
Discussão dos resultados: C. F. Silva, V. Bisognin
Revisão e aprovação:

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Trabalho apoiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 08-01-2021 – Aprovado em: 26-05-2021