Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Jogo “Grelha Retangular 3 x 4”: uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório

Game "Rectangular Grid 3 x 4": a proposal for the development of combinatorial reasoning

Paulo Jorge Magalhães TEIXEIRA
Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil
paulojorge@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este trabalho objetiva tornar conhecida proposta de ensino aprendizagem acerca conteúdo básico de análise combinatória por meio de um jogo de tabuleiro nomeado *Grelha Retangular 3 x 4*. Tal proposta visa fomentar a apropriação e exercício do raciocínio combinatório enquanto diagramas de árvore são construídos, com objetivo de mostrar algumas (ou todas) possibilidades como o jogo pode desenrolar a partir de tomadas de decisão dos jogadores por ocasião da movimentação “tampinhas de garrafa pet” sobre o tabuleiro de jogo. Em prosseguimento ao jogo e consequente reconhecimento das regras estipuladas, problemas de combinatória são formulados com o propósito ir ao encontro do que preconiza a teoria de Resolução de Problemas. A proposta está em consonância com indicações presentes na BNCC – Base Nacional Curricular Comum para o ensino-aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que objetiva dimensionar a importância da proposição e a criação de um jogo que contribua para melhorar o processo de ensino aprendizagem da Matemática, com estudantes e professores dos anos iniciais, a qual culminou com a proposta do jogo segundo metodologia do tipo “*Design Experiment*”. Espera-se, por meio dessa atividade, que o estudante sinta-se estimulado exercitar, desenvolver e apropriar-se do raciocínio combinatório enquanto constrói um diagrama de árvore para particulares situações de jogo, de início - possíveis ocorrer em qualquer momento do desenrolar de uma partida até que ela chegue ao seu final, de modo a conhecer e contabilizar as possibilidades de vitória para cada jogador.

Palavras-chave: Jogo, Raciocínio Combinatório, Diagramas de Árvore

ABSTRACT

This work aims to make known teaching and learning proposal about basic content of combinatorial analysis through a board game named Rectangular Grid 3 x 4.This proposal aims to encourage the appropriation and exercise of combinatorial reasoning while tree diagrams are built, with the objective of showing some (or all) of the possibilities of how the game can unfold based on the players' decision-making when moving "pet bottle caps” on the game board. In continuation of the game and consequent recognition of the stipulated rules, combinatorics problems are formulated with the purpose of meeting what the Problem Solving theory advocates.The proposal is in line with indications present in the BNCC – Common National Curriculum Base for teaching and learning Mathematics in the early years of elementary school.This is a bibliographical research that aims to dimension the importance of the proposition and the creation of a game that contributes to improve the teaching-learning process of Mathematics, with students and teachers from the early years, which culminated in the proposal of the game according to methodology of the “Design Experiment” type.It is expected, through this activity, that the student feels stimulated to exercise, develop and take ownership of combinatorial reasoning while building a tree diagram for particular game situations, at first - possible to occur at any time during the course of a game until it reaches its end, in order to know and count the winning possibilities for each player

Keywords: Game, Combinatorial Reasoning, Tree Diagrams

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é recorte de uma pesquisa ampla que objetiva responder a seguinte questão principal: *“Que situações de aprendizagem um professor de matemática precisa selecionar, dirigir e propor a seus alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em consonância com as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, de modo a identificar e conhecer como o raciocínio combinatório é apropriado, exercitado e desenvolvido pelos estudantes na resolução de problemas próprios da temática combinatória, de modo a compreender as dificuldades que eles enfrentam e para ajudá-los a superar essas dificuldades?”*

De modo a encontrar subsídios que respondam á questão de pesquisa, começamos por fazer uma pesquisa bibliográfica acerca do objeto matemático e o uso de jogos no ensino aprendizagem da Matemática Básica e ela nos levou a conceber, testar e propor o jogo objeto deste recorte. Considerando aspectos básicos que caracterizam uma investigação qualitativa, como os presentes em Franco (2005), considerou-se que o estudo caracteriza-se como uma investigação de natureza qualitativa.

Assim, este trabalho tem o propósito de apresentar as regras e objetivos pedagógicos do jogo além de apresentar proposta para a proposição de problemas que têm relação direta com o jogo e o objeto matemático requerido para prover as resoluções destes, qual seja: o conhecimento, desenvolvimento e o exercício do raciocínio combinatório.

Segundo os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em Brasil (1997):

> “[...] um aspecto relevante nos jogos, é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver” (BRASIL, 1997, p.49).

O raciocínio combinatório é imprescindível para que todo aquele que o compreenda, se aproprie e faça uso correto, continuamente, por toda a sua escolaridade em matemática básica e em nível superior reúna condições para resolver problemas de contagem e de probabilidade, mas não apenas nestas áreas. Um campo de pesquisa em ampla evolução: a Matemática Discreta e, em particular a Teoria dos Grafos, são áreas de pesquisa matemática que prescindem fortemente deste raciocínio.

Portanto, o raciocínio combinatório - um dos raciocínios matemáticos que devem ser desenvolvidos desde os anos iniciais do ensino fundamental, ainda na tenra idade -, tem importância significativa para o letramento matemático dos cidadãos. Principalmente, mas não apenas, para os estudantes da Escola Básica e os seus professores.

Uma vez que o raciocínio combinatório seja compreendido e apropriado ele permite o provimento de conhecimentos matemáticos suficientes o entendimento e a apropriação de todos os outros conceitos da combinatória que são necessários para resolver uma extensa variedade de diferentes tipos de problemas de contagem.

O letramento matemático combinatório se estende (compreendido, apropriado e exercitado) ao longo do tempo - por muitos anos, e não apenas durante o período de estudos da Escola Básica. Ele precisa ser continuamente alimentado (adquirido, exercitado) se não pode vir a ser esquecido ou ser exercitado de maneira incorreta. Ademais, o letramento deve ser feito em um constante.

Mediante o exposto, entende-se o porquê de a sua importância no ensino da Matemática ser constantemente ressaltada por professores e pesquisadores, e quase sempre é posto à prova em diferentes áreas da própria Matemática e/ou em diversas situações cotidianas, as quais exigem o seu correto exercício para a compreensão do contexto em que está presente e dele se precise para a tomada de uma decisão, por exemplo.

Portanto, parece-nos que diante de tais argumentos - fortes que são, para os professores e os pesquisadores - não deve ser difícil entender que um estudante não se transforma em um sujeito letrado combinatoriamente de um dia para outro. Tampouco a escolaridade na Escola Básica parece ser suficiente para dotá-lo de tal competência matemática, embora não seja isso o que se quer, almeje e busque enquanto professores da Educação Básica.

Mas, tudo começa do início, desde as situações que estão presentes no cotidiano dos alunos e suas famílias: por exemplo, como escolher uma calça e uma camisa para sair, se no armário há tantas peças de cada; do uso de materiais manipuláveis para compreender o exercício do raciocínio combinatório; do conhecimento acerca de representações espontâneas ou gráficas, mais lúdicas, para se chegar às representações numéricas, por exemplo. Tudo no seu tempo e hora, para se chegar, muito tempo depois, à complexidade que é própria da sua utilização e exercício do raciocínio combinatório em situações mais complexas.

Mas, afinal, o que é o raciocínio combinatório?

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O exercício do raciocínio combinatório por alunos e/ou professores são perceptíveis a partir do enfrentamento de situações-problema de contagem nas quais o enunciado peça seja feita a enumeração de todas as soluções (agrupamentos-solução), ou se determine o seu quantitativo. Para obtê-las faz-se uso de uma representação gráfica (esquema, produto cartesiano, tabela de dupla entrada, diagrama de árvore), e para contar quantas são as soluções tal contagem pode ser feita ou uma a uma (ou por grupos), diretamente da representação gráfica que foi utilizada (caso o quantitativo de possibilidades a "combinar" não seja demasiado grande), ou então faz-se uso de uma representação numérica para efetuar a contagem total.

Em qualquer uma das duas situações, a contagem de possibilidades permite que se utilize um novo jeito de pensar, isto é, será preciso que o raciocínio combinatório seja exercitado para dar conta de obter uma resposta ou outra. Fato é que para fazer a contagem de todas as possibilidades não será preciso que se lance mão de um repertório de fórmulas para dar conta da contagem, e sim por meio de um processo que exige construir um modelo simplificado, claro, objetivo e explicativo a respeito da situação presente no contexto.

Esse modelo pode atender a situações particulares de início, mas pode ser mais geral, como é o caso de um diagrama de árvore. Uma vez que um sujeito cumule experiências diversificadas no trato de situações de combinatória, ou seja, uma vez que ele tenha total domínio sobre o conceito combinatório presente no enunciado de um problema de contagem, por vezes um simples rascunho de como seria o diagrama de árvore é o bastante para que ele defina uma estratégia para encaminhar resolução e, assim, obter a contagem.

Mas não pense ser tarefa simples resolver um problema combinatório, pois em alguns problemas pode ser que vários conceitos combinatórios precisem ser mobilizados. Em comum, o fato de o raciocínio combinatório não ser dispensável, além da necessidade de o sujeito que está para resolver um problema ter plena compreensão acerca da situação envolvida no enunciado. Por vezes, enunciados concisos de problemas combinatórios exigem soluções complexas. Para o exercício do raciocínio combinatório será preciso fazer uso de procedimentos diretamente relacionados a ele. As citações seguintes ajudam.

Inhelder e Piaget (1955 apud Navarro-Pelayo,1996) aponta a maneira como o raciocínio combinatório opera com as possibilidades, embora o chame de raciocínio hipotético-dedutivo, conforme a citação a seguir:

> De acordo com Inhelder e Piaget (1955), o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias. Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos (NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 2).

Além do mais, para Inhelder e Piaget (1955 apud Batanero, Godino, Navarro-Pelayo,1997):

> [...] as operações combinatórias representam algo mais importante que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e a correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (estágio das operações formais, segundo Piaget). A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1997, p. 27).

.

Resultado de uma pesquisa feita por Fischbein (1975) mostra que a “capacidade de resolver situações-problemas que envolvem o raciocínio combinatório (problemas combinatórios)” nem sempre se alcança no nível das operações formais, se um ensino específico do assunto não for oferecido. Ou seja, ainda que de forma indireta, Fischbein (1975) aponta-nos que o raciocínio combinatório precisa ser exercitado, estimulado e desenvolvido pelo professor enquanto propõe que seus alunos resolvam problemas de contagem, e ele atue como um mediador da aprendizagem.

O papel de mediador da aprendizagem (o mesmo que organizador) exige do professor conhecer bem os seus alunos no tocante às expectativas e competências cognitivas, uma vez que é o responsável por escolher os problemas que possibilitam a eles construírem conhecimento e a compreenderem aspectos procedimentais de resolução, acompanhando-os constantemente durante todo o processo de resolução de problemas tendo em vista os objetivos os quais propõe eles os alcancem decorrer da aprendizagem.

Uma vez consideramos ser a aprendizagem fruto de ações efetivas do próprio estudante no sentido de promovê-la para si, referimo-nos ao olhar de organizador do professor como o responsável por orientar, incentivar e cuidar para que o estudante se questione, e a acompanhá-lo de maneira que não esmoreça, mas prossiga.

Outra faceta do papel do professor em todo o processo de ensino-aprendizagem deve ser a de portar-se como um ouvidor: aquele que compartilha com os alunos informações, textos, materiais etc. que são necessários a todo o processo e que ele sabe, de antemão, que os alunos, sozinhos, provavelmente não teriam condições de obtê-los.

Acerca de parte dessas questões, assim se manifesta Freire (2013),

> [...] Meu papel fundamental, ao falar com clareza sobre o objeto, é incitar o aluno a fim de que ele, com os materiais que ofereço, produza a compreensão do objeto em lugar de recebê-la, na íntegra, de mim. Ele precisa se apropriar da *inteligência* do conteúdo para que a verdadeira relação de comunicação entre mim, como professor, e ele, como aluno se estabeleça.
> [...] Ensinar e aprender têm que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno de ir *entrando* como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor ou professora deve deflagrar. Isso não tem nada que ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade, mas, ao mesmo tempo, da boniteza da docência e da discência (FREIRE, 2013, p.116).

Ademais, o próprio professor deve servir de exemplo ao exercitar o raciocínio combinatório enquanto, coletivamente, promove a resolução de problemas de contagem durante momentos de reflexões e discussões, isto é, enquanto exerce o papel de mediador.

Portanto, de maneira a acompanhar de modo diligente a compreensão, apropriação, exercício e desenvolvimento do raciocínio combinatório de seus alunos, o professor precisa estar atento à maneira como se comportam em cada um desses momentos, durante a resolução de cada problema que apresente eles o resolvam.

Segundo Teixeira (2014),

> [...] o raciocínio combinatório é um conjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, as quais permitam que ele encaminhe procedimentos sistemáticos de seleção, partição ou colocação de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente, de modo que o resultado dessas ações tenha significado e obedeça às sistematizações necessárias à garantia de obtenção de todas as possibilidades (agrupamentos-solução) que satisfazem ao problema de contagem proposto. Além do mais, o resultado das “combinações” é obtido com a exploração e o exercício do raciocínio combinatório de maneira recursiva em relação ao que antes já havia sido “combinado”. As “combinações” feitas, passo a passo, podem ser visualizadas por meio da construção de uma representação gráfica, ou compreendidas por meio de uma representação numérica via uma ou mais operações numéricas multiplicativas e/ou aditivas. Portanto, podemos então caracterizar o raciocínio combinatório como o raciocínio que é derivado do ato de “combinar” (o mesmo que associar, juntar, compor) objetos (ou pessoas, letras, algarismos) com outros de igual natureza ou não (TEIXEIRA, 2014, p.36-37).

Não obstante passados mais de 13 anos que os PCN foram lançados, ainda é muito presente nas escolas o ensino tradicional da matemática baseado na exposição de resumo de parte do conteúdo por meio de definições, exemplos e exercícios de fixação/aplicação, presentes no livro didático ou em fichas de atividades auxiliares, metodologia essa que coloca o aluno diante de ações de passividade: ele vê, ouve e reproduz. Se, razoavelmente faz bem tudo isso, fica a sensação de que aprendeu o conteúdo. Pouco ou nada do cognitivo do aluno é explorado em sala de aula e deixado que venha à tona, porque o professor pouca ou nenhuma voz lhe dá. No coletivo, muito pouco é refletido sobre as amostras das realizações pessoais ou dos colegas de grupos pequenos de até 4 alunos.

As considerações acima têm visibilidade, quando sustentadas em reflexões tais como as de Freire (2013),

> [...] Somente quem escuta paciente e criticamente o outro, fala *com ele*, mesmo que, em certas condições, precise fala *a ele*. O que jamais faz quem aprende a escutar para poder falar com é falar *impositivamente*. Até quando, necessariamente, fala contra posições ou concepções do outro, fala *com ele* como sujeito da escuta de sua fala crítica e não como objeto de seu discurso. O educador que escuta aprende a difícil lição de transformar o seu discurso, às vezes necessário, ao aluno, em uma fala *com ele* (FREIRE, 2013, p.111).

Por conta disso, o aluno não se torna partícipe da sua própria aprendizagem; não reflete e tampouco discute questões com os seus colegas e o professor. Ou seja, o aluno não é instado, pelo seu professor, a estabelecer conexões entre os seus conhecimentos anteriores e as apropriações dos novos saberes, os quais podem ser aprropriados por meio da resolução de problemas.

Segundo Freire (2013, p. 83), "O fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, *é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada*, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que *professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos*" (grifos do autor).

Em prosseguimento, seguem considerações a respeito da metodologia do estudo.

3 METODOLOGIA DO ESTUDO

No estudo, a metodologia "*Design Experiment in Educational Research"* de Cobb; Confrey; DiSessa; Lehrer e Schauble (2003), é a indicada. A escolha da metodologia se dá em função de ela ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto, considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo. Segundo a metodologia um desenho básico flexível - que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo – deve ser preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais, tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da Matemática com vistas à obtenção de inovações. Salienta-se que o professor precisa se responsabilizar por identificar as adaptações que se façam necessárias implementar ao longo do estudo, ao assumir o papel de orientador, intervindo durante o desenrolar das tarefas propostas somente em momentos críticos considerados por ele como de bloqueio.

O estudo - previsto para ser desenvolvido ao longo de 5 a 6 aulas de 40 minutos cada - deve ter o seu início quando o propósito inicial for o de analisar a produção dos alunos no tocante ao conhecimento, apropriação e exercício do raciocínio combinatório; na construção de diagramas de árvore e nas resoluções e na comunicação de respostas referentes a um conjunto de problemas que devem ser propostos ao final de 3(três) rodadas do jogo, no mínimo, para todos os alunos de uma mesma turma. O jogo se propõe a ser um disparador do ensino aprendizagem. Segundo Lopes e Rezende (2010, p.680), “A associação do jogo com a resolução de problemas torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento”.

Para atender os propósitos do jogo um planejamento precisa ser elaborado tomando por base o objetivo de desenvolver o conceito de raciocínio combinatório segundo o significado de construção de diagramas de árvore, para cada problema proposto. Inclusive, por conta do momento que atravessamos, de isolamento social, é propício que o estudo seja encaminhado pelo professor por meio de aulas on-line.

Recomenda-se que o estudo reúna um forte cunho descritivo em relação às regras do jogo, incluindo os diálogos havidos entre os estudantes e entre eles e o professor. Em Teixeira (2021) será apresentado o diagrama de árvore, contendo todas as possibilidades como o jogo pode se desenrolar, desde os primeiros movimentos possíveis.

Quando do retorno às aulas presenciais, recomenda-se que o estudo seja mais uma vez desenvolvido, agora em um ambiente natural (sala de aula), para a coleta direta de dados da produção após reflexões, intervenções e discussões dos alunos entre si e estes com o professor - momentos em que o professor poderá exercer os papéis de mediador, na promoção de reflexões e discussões coletivas.

4 CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO: O JOGO GRELHA RETANGULAR 3 X 4

I. Material a ser disponibilizado para uso durante o desenrolar do jogo

O jogo utiliza um tabuleiro quadrado 3 x 4 (três quadrados menores dispostos no sentido vertical por 4 quadrados menores dispostos no sentido horizontal, totalizando 3 x 4

= 12 quadrados menores), denominado por *Grelha Retangular 3 x 4*. Trata-se de um jogo entre 2(dois) oponentes: A e B. Para realizar os movimentos sobre o tabuleiro são utilizadas 2(duas) “tampinhas de garrafa pet”: uma na cor amarela (para o jogador A) e outra na cor azul (para o jogador B).

De modo a facilitar comprovação de movimentação das “tampinhas de garrafa pet” durante o desenrolar do jogo até o seu desfecho, ou para identificar o prosseguimento do jogo em caso de alguma interrupção, sugerimos o uso de canetas nas cores amarela e azul e a reprodução dos movimentos das “tampinhas de garrafa pet” em um tabuleiro desenhado em uma folha de papel a parte onde as pinturas devem ser feitas.

O jogador que vai dar início ao jogo será decidido por meio de uma disputa tipo “par ou ímpar”. O jogador vencedor dessa disputa deve colocar sua “tampinha de garrafa pet” no quadrado localizado no canto inferior à esquerda (ou canto superior à direita) e o seu oponente deverá colocar a sua “tampinha de garrafa pet” no quadrado localizado no canto superior à direita (ou canto inferior à esquerda), como na Figura 1, a seguir, que mostra a disposição das “tampinhas” antes de o jogo ser iniciado. Para o restante do texto, considere que o jogador A foi o vencedor da disputa “par ou ímpar”.

A Figura 1, abaixo, mais à direita, aponta para um momento de jogo que foi interrompido após o 4º movimento. Observa-se que o jogador A foi o último a jogar. Portanto, quando o jogo for reiniciado o jogador B será o jogador a movimentar sua “tampinha de garrafa pet”, de cor azul.

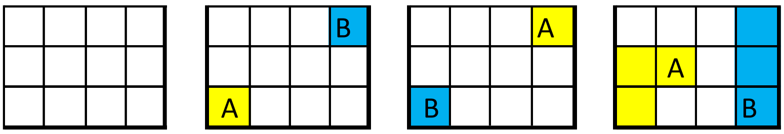


Figura 1: Tabuleiro do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*, possíveis posições iniciais e os 4 primeiros movimentos de uma partida

II. Objetivos do jogo: O objetivo de cada jogador é capturar a “tampinha” do seu oponente ou conseguir posicionar a sua “tampinha” na posição de partida do seu oponente quando do início do jogo. Ou seja, o jogador A tem o objetivo de colocar sua “tampinha” no quadrado inicial pintado de azul e o jogador B tem o objetivo de colocar sua “tampinha” no quadrado inicial de cor amarela, segundo uma das figuras centrais mostradas acima. Para atender a qualquer um desses dois objetivos será preciso que os jogadores obedeçam a certas regras do jogo, que serão mostradas em prosseguimento.

III. Regras do jogo: Eis as 4 regras precisam ser compreendidas, para o jogo:

1ª regra: Conforme as duas primeiras figuras mostradas a seguir, Figura 2, a primeira regra estipula que o jogador A pode movimentar sua “tampinha” na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, sendo permitido retornar à posição anterior apenas uma vez. Também pode movimentar sua “tampinha” na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a direita; O jogador B pode movimentar sua “tampinha” na posição vertical, uma posição por vez, para cima ou para baixo, sendo permitido retornar à posição anterior apenas uma vez. Também pode movimentar sua “tampinha” na posição horizontal, uma posição por vez, somente para a esquerda. Uma “tampinha” situada na faixa cinza pode fazer um entre até 3 possíveis movimentos, enquanto uma “tampinha” situada em qualquer uma das duas faixas de cor rosa pode fazer um entre até 2 possíveis movimentos.

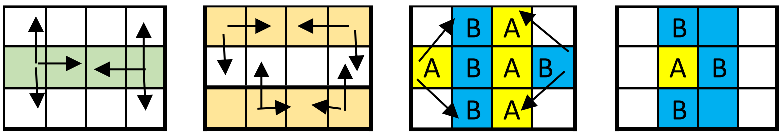


Figura 2: Movimentos permitidos no Tabuleiro do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*

2ª regra: É obrigatória a captura da “tampinha” do oponente sempre que for possível, isto é, quando as “tampinhas” do jogador e do seu oponente se encontrarem “em diagonal” (deve ser respeitado o sentido horizontal do jogador que vai fazer a captura, ou seja, a captura da “tampinha” do jogador B pelo jogador A se dará apenas “em diagonal” para a direita, enquanto que a captura da “tampinha” do jogador A pelo jogador B se dará apenas “em diagonal” para a esquerda). A captura de uma “tampinha” também pode ser feita quando uma estiver adjacente (junta) à outra. A última das quatro figuras, Figura 2, acima, mostra a “tampinha” do jogador A e as possíveis possibilidades de captura da “tampinha” do jogador B na situação em que esta esteja adjacente a ela, a saber: o jogador A pode capturar a “tampinha” do jogador B adjacente à sua no sentido vertical, se o movimento não resultar em retorno à posição anterior pela segunda vez. O jogador A também pode capturar a “tampinha” do jogador B que esteja adjacente a sua, no sentido horizontal, se este movimento indicar o sentido horizontal estabelecido: jogador A para a direita desde que este movimento não resulte em retorno à posição anterior pela segunda vez. Situações análogas são válidas em relação a movimentação da “tampinha” do jogador B em relação à “tampinha” do jogador B.

3ª regra: Será obrigatório finalizar a disputa sempre que um jogador estiver com sua "tampinha" junto ao quadrado inicial do seu oponente, ou sempre que a "tampinha" do seu oponente estiver em posição que o permita capturar a "tampinha" do oponente.

4ª regra: O movimento das "tampinhas" durante o desenrolar do jogo não poderá ultrapassar o limite máximo de 10 (dez movimentos). Ou seja, cada um dos jogadores poderá movimentar sua "tampinha" no máximo por 5 vezes no tabuleiro. Assim, quando o jogador B fizer o 10º movimento - considerando, como dito, que o jogador A inicia a disputa - o jogo estará encerrado. Se após o 10º movimento o jogador B não conseguir colocar sua "tampinha" na posição inicial do jogador A o jogo será finalizado e estará configurado o empate. Portanto, qualquer resultado será computado ao final do 10º movimento ou em movimento anterior a esse, caso um jogador "*capture"* a "tampinha" do seu oponente.

IV. Objetivo pedagógico do jogo: A restrição em relação ao número máximo de 10(dez) movimentos, tem 2(duas) razões: A primeira, é a de permitir que o jogo não se estenda por muitos movimentos tornando-se cansativo e desinteressante pelos alunos. A segunda razão tem a ver com a resolução de problemas combinatórios associados ao jogo - que são sugeridos aos professores em prosseguimento - de modo que avaliem a viabilidade/possibilidade de propor aos seus alunos. Tal razão vai ao encontro de encurtar as resoluções de alguns problemas, mas permitindo o exercício do raciocínio combinatório durante a construção de diagramas de árvore para se chegar à lista de todas as possibilidades como o jogo poderia se desenrolar a partir de determinado momento do jogo ou desde o início.

Assim, o objetivo pedagógico do jogo é oportunizar aos alunos refletirem acerca do estabelecimento de uma "estratégia vencedora" que possa ser posta em prática, se for o caso, enquanto vão sendo explorados alguns conceitos da combinatória. Se espera que cada jogador se comporte como um jogador pro ativo, ou seja, um jogador que deseja vencer o jogo e aprender com ele, se apropriando de conceitos de combinatória, que estarão presentes durante o desenrolar do jogo. Podemos dizer que o jogo é, por assim dizer, um disparador do ensino aprendizagem de alguns conceitos da análise combinatória. Para resolver os problemas, sugerimos que professor e alunos recorram à construção de diagramas de árvore com o propósito de identificar todas (ou algumas) possibilidades que o rumo do jogo poderá tomar. Está aí o primeiro conhecimento básico de combinatória a partir do jogo: a construção de diagramas de árvore. Uma vez construído o diagrama de árvore por completo (a partir do início de uma partida ou de um particular momento do jogo), todos os resultados finais de jogo poderão tornar-se conhecidos. Por sua vez, cada um dos resultados pode ser alcançado por cada jogador conforme tenha sido o desenrolar do jogo. Então, os objetivos pedagógicos do jogo são que os jogadores: se deparem com a necessidade de ter de tomar uma decisão para movimentar a sua “tampinha” e dar prosseguimento ao jogo, respeitando as regras de jogo estabelecidas; exercitem o raciocínio combinatório enquanto vão aprendendo a construir um diagrama de árvore; se apropriem de novos conhecimentos próprios da combinatória e, se for o caso, encontrem uma “estratégia vencedora” para a partida - desde o início da partida ou a partir de determinado momento de jogo. Portanto, não se trata de um simples jogo que se joga por jogar; uma diversão, mas de um jogo que contém desafios a serem alcançados pelos jogadores. Um dos desafios, e não menos importante, é o de verificar a possibilidade de estabelecer uma “estratégia vencedora”, se for o caso. Ademais, importante e necessário se faz que os jogadores reflitam e decidam quanto ao jogo ser um jogo de sorte/azar ou um jogo de estratégia. Também, decidam em relação ao jogo ser um *jogo combinatório* ou não.

V. Organização dos alunos em sala: Os participantes podem participar do jogo tanto de modo individual (um jogador contra outro jogador) quanto em grupos menores - desde que todos os membros do grupo estejam imbuídos do propósito de descobrirem uma estratégia para vencer o jogo, se for o caso.

VI. Alunos comunicando a aprendizagem: Recomendamos ao professor que oportunize aos alunos a possibilidade de eles mostrarem o que aprenderam com o jogo. Para tal, o professor pode promover reflexões e discussões conjuntas a esse respeito, e pedir que eles escrevam sobre o que aprenderam com o jogo.

VI. Explorando problemas de Combinatória associados com o jogo: Uma vez que os alunos conheçam bem as “Regras” do jogo - após terem jogado por algumas rodadas, no mínimo por 3 vezes - o professor deve propor problemas a ele relacionados em prosseguimento às disputas. Sugerimos alguns, como a seguir:

Problema 1: A e B estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4***.** O professor Rui chega junto à mesa onde eles estão, observa a disposição das “tampinhas de garrafa pet” sobre o tabuleiro após os 6 primeiros movimentos das “tampinhas”; confere as anotações que fizeram no desenho do tabuleiro, em papel, e faz a seguinte proposta aos dois jogadores: agora vocês não vão mais continuar jogando. Juntos, devem encontrar todas as possibilidades como a partida poderá se desenrolar, a partir desse 6º movimento - como mostrado aqui, no tabuleiro -, até que ela chegue ao seu final, assinalando as possibilidades de A sair vencedor, de B sair vencedor e de ocorrer empate, se for o caso. Eis a configuração da partida após o 6º movimento (movimento este, que foi feito por B):

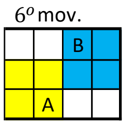


Figura 3: Configuração do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*, após o 6º movimento

O professor Rui continua: vou começar por ajudá-los e depois vocês continuam fazendo, pois eu tenho certeza que vocês farão exatamente como tem de ser feito. Vamos lá. Primeiramente, eis a situação de jogo no 7º movimento da partida, com os 2 (dois) possíveis movimentos que podem ser feitas por A:

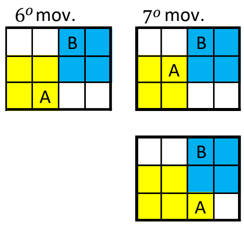


Figura 4: Configuração do jogo *Grelha Retangular 3 x 4*, após o 7º movimento

Como foi A que fez o 7º movimento da partida, o próximo movimento será feito por B. Eu começo, então, perguntando à B: Considerando cada uma das 2 (duas) possibilidades que podem ser deixadas por A quais movimentos você pode fazer no 8º movimento? A Figura 5, a seguir, mostra os possíveis movimentos que B pode realizar no 8º movimento da partida para cada situação que pode ser deixada por A, por ocasião do 7º movimento:

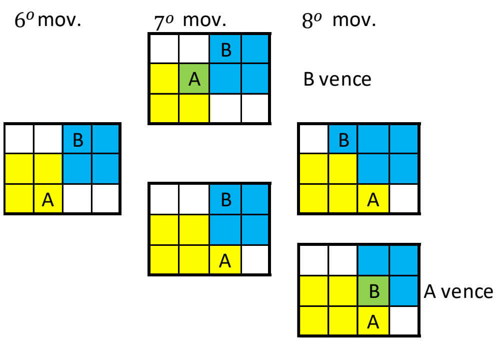


Figura 5: Situações de jogo, possíveis após o 8º movimento de uma partida

A indicação dos quadrados, na *cor verde* serve para mostrar que a "tampinha" do jogador A retornou àquele quadrado no 7º movimento e a "tampinha" do jogador B retornou ao quadrado pintado de verde no 8º movimento. Portanto, nenhum dos dois jogadores poderá retornar aos quadrados pintados na cor verde com as suas respectivas "tampinhas" nas jogadas subsequentes. Tal indicação deve constar do tabuleiro desenhado na folha de papel a parte, por ocasião do início da disputa. Para esta particular situação de jogo que estamos analisando não será necessário tal preocupação, uma vez que nos movimentos seguintes as "tampinhas" foram *capturadas*. Bem, agora vamos finalizar a partida, mostrando todos os possíveis movimentos do jogador A e do jogador B até o 10º movimento de jogo (os últimos movimentos, pois o jogo termina aqui, conforme a 4ª regra), a partir do particular momento de jogo que foi considerado após o 6º movimento.

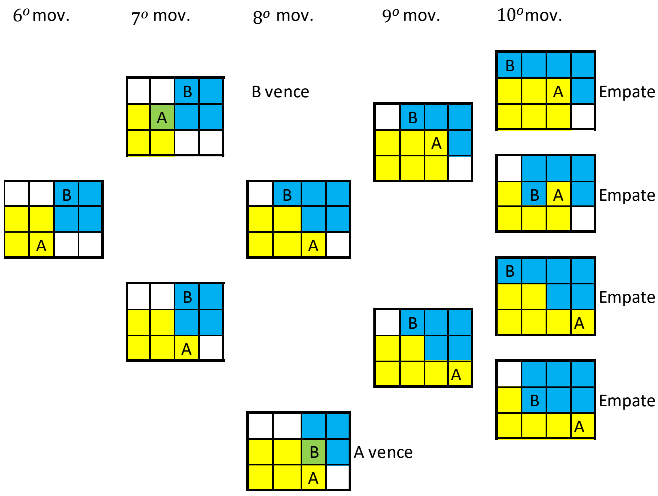
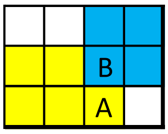


Figura 6: Situações de jogo possíveis após o fim de uma partida considerando o movimento inicial, por ocasião do 6º movimento

Observe que o jogador A pode vencer a partida no 9º movimento e o jogador B pode vencer a partida no 8º movimento. Em 4(quatro) possibilidades ocorre empate. Portanto, considerando uma disputa que se inicie ao final do 6º movimento de jogo, com a distribuição das "tampinhas" conforme foi indicado, o número de vezes que A e B podem vencer a disputa é o mesmo: 1(uma) oportunidade para cada. Observe que a partir do particular 6º movimento de jogo, na situação de jogo em que A movimenta a sua "tampinha" no sentido horizontal para a direita ele não perde o jogo. A partir daí é possível levantar a hipótese de uma possível "estratégia vencedora" para o jogador A? Há uma "estratégia ganhadora" para o jogador B? Um bom ponto para a reflexão dos alunos é perguntar-lhes sobre o que levou o jogador B a vencer o jogo, considerando que ele sempre faz a sua jogada depois que A faz a sua. O diagrama de árvore pode dar pistas para a resposta a essa pergunta? Seria uma pista para encontrar uma possível "estratégia vencedora" para B? De início, é importante que o professor apresente situações de jogo já no 6º ou 7º movimento de jogo, e peça aos alunos que construam diagramas de árvore até a finalização da partida. Mais adiante, pode ser solicitado o mesmo a partir do 4º ou 5º movimento de jogo e, por fim, a construção do diagrama de árvore completo a partir dos primeiros movimentos de jogo pelo jogador A. Assim, a construção do diagrama de árvore completo, para o jogo, finaliza a consecução do propósito de haver permitido que os alunos compreendam as ações e as possíveis tomadas de decisão necessárias para tal, para este particular problema e para quaisquer outros que se seguem ao estudo da temática. O importante é que os alunos tenham entendido as regras do jogo, se apropriado das orientações iniciais acerca da construção de um diagrama de árvore de modo que tenham autonomia para fazer o que é preciso, e exercitem o raciocínio combinatório quando da tomada de decisões em relação a movimentação da sua “tampinha”.

Problema 2: Ainda em relação ao Problema 1, uma vez que a visualização das possibilidades de jogo no diagrama de árvore nem sempre é confortável por conta do grande número de combinações de jogadas e o fato de em alguns movimentos haver superposição da cor amarela sobre a cor azul (e vice-versa), sem que haja a captura de “tampinha”, sugerimos que outra representação possa ser utilizada pelos jogadores. Por exemplo, considere a situação em que o jogador A vence uma partida no 9º movimento de jogo - como a situação representada no tabuleiro mostrado a seguir, levando em conta uma possível numeração para os 12 quadrados:



1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12

Figura 7: Tabuleiro de jogo com numeração e movimentos de um jogo que levaram A vencer

Uma possibilidade de representação, para os 9 (nove) movimentos de uma partida em que o jogador A vence, como mostrado acima, poderia ser apresentada assim: $\left(\begin{array}{r} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,6 \end{array}\right)$. Neste exemplo, o jogador A vence o jogo ao “*capturar”* a “tampinha” do jogador B no quadrado 6. Nesta representação, observe que o jogador A é vencedor quando o seu último movimento é 4 (posição inicial do jogador B) ou quando os dois últimos lançamentos dos dois jogadores mostrarem valores iguais antes que o jogo chegue ao 10º movimento, e A tenha mais registros que B; O jogador B é vencedor quando o seu último movimento é 9 (posição inicial do jogador A) ou quando os dois últimos lançamentos dos dois jogadores mostrarem valores iguais antes que o jogo chegue ao 10º movimento, e B tenha mais registros que A; Quando os valores dos últimos movimentos dos dois jogadores apontarem valores diferentes, tem-se um empate, que ocorre no 10º movimento. Em caso de empate, há igual quantitativo de registros para os dois jogadores (limitado à quantidade de 10 movimentos, conforme a 3ª regra do jogo) e os últimos valores registrados para os dois jogadores não coincidem. Em seguida, mostramos todas as possibilidades do jogo "Grelha Retangular 3 x 4" por meio desta nova representação após o a movimentação das "tampinhas" dos dois jogadores por ocasião do 6º movimento de jogo como início da análise de todas as possibilidades. Essas possibilidades foram mostrados no diagrama de árvore, acima. Representação da vitória de A, após o 9º movimento: E_1 = $\begin{pmatrix} A: 9, 8, 7, 10, 11, 6 \\ B: 4, 5, 6, 3, 6 \end{pmatrix}$; representação da vitória de B, após o 8º movimento: E_2 = $\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,7 \\ B: 4,5,6,3,7 \end{pmatrix}$; representações dos 4 empates: E_3 = $\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$ ou E_4 = $\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,6 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}$ ou E_5 = $\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,1 \end{pmatrix}$ ou E_6 = $\begin{pmatrix} A: 9,8,7,10,11,12 \\ B: 4,5,6,3,2,7 \end{pmatrix}$.

Problema 3: Considere o jogo *Grelha Retangular 3 x 4* segundo as regras estabelecidas acima. Encontre todas as possibilidades como o jogo pode se desenrolar a partir dos 2(dois) primeiros movimentos de jogo possíveis - que podem ser feitos pelo jogador A (o jogador que inicia a partida) -, até que chegue ao seu final com vitória (s) de A , vitória(s) de B, empate(s), se for o caso. Problema 4: Ana (A) e Bia (B) estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Considere a numeração dos quadrados do tabuleiro conforme a numeração que foi apresentada acima, no Problema 2. Supondo que após o 6º movimento, feito por Bia, sua "tampinha" esteja no quadrado de número 1 e a "tampinha" de Ana esteja no quadrado de número 10 por ocasião de seu 3º movimento, há algum movimento que Ana possa fazer por ocasião do 7º movimento da partida, de modo a impedir que Bia vença o jogo? Explique. Problema 5: Ana (A) e Bia (B) estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Há algum movimento inicial de jogo que Ana pode fazer de modo que este movimento lhe garanta vitória sobre Bia logo no 3º movimento de jogo? Se sim, qual? Problema 6: Ana (A) e Bia (B) estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Considerando que Ana vai iniciar jogando, você identifica alguma "estratégia vencedora" para Bia, de modo que ela vença o jogo? Em caso afirmativo, descreva-a. Problema 7: Ana (A) e Bia (B) estão jogando o jogo *Grelha Retangular 3 x 4*. Considerando que Ana vai iniciar jogando, você identifica alguma "estratégia vencedora" para Ana, de modo que ela vença o jogo? Em caso afirmativo, descreva-a.

5 CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO

Uma vez que o professor de Matemática já sabe de antemão que o conceito de raciocínio combinatório está presente em um particular conjunto de problemas, ele precisa ter amplo domínio acerca deste conceito e dos seus diferentes significados, conforme seja a aplicação que está em estudo. A maioria das aplicações podem ser exploradas com alunos do Ensino Fundamental, mas também com alunos do Ensino Médio. O domínio do conteúdo permite ao professor sentir-se em condições de fazer a transposição didática para cada um dos significados do conceito raciocínio combinatório, conforme o universo de alunos em que a temática está sendo desenvolvida. Não é uma tarefa simples, pois o professor precisa ter compreensão plena acerca das ferramentas que devem ser mobilizadas para caracterizar o modelo matemático que atende a situação que está sendo explorada. É o que Shulman (1986, p.2) chama de "*conhecimento pedagógico do conteúdo*" (tradução nossa). Neste particular contexto tal conhecimento deve ser mobilizado pelo professor de modo que mostre compreensão plena acerca dos significados de princípios de contagem que precisam ser apropriados pelos alunos quando da apresentação e o desenvolvimento da temática, independentemente do conteúdo explorado, e para qual universo de alunos do Ensino Básico tenha propósito atender.

Neste particular estudo, o objetivo matemático ressaltado é o de propor, refletir, discutir e resolver problemas de contagem que permitam o exercício do raciocínio combinatório - explorando ideias básicas em um contexto da combinatória -, desde os anos iniciais, e em um crescente. Também porque os problemas relacionados com esse conteúdo devem ser explorados ao longo de toda a Educação Básica, segundo uma metodologia que se aproxima de uma *espiral* – o conteúdo é retomado de tempos em tempos para ser ampliado, com novos e mais complexos problemas de contagem. Ao iniciar o estudo o professor precisa estimular a exploração de conceitos matemáticos associados com o pensamento aditivo, o pensamento multiplicativo e o raciocínio combinatório, por meio da proposição de problemas que envolvam diferentes tipos de agrupamentos de problemas. Trata-se de um conteúdo da Matemática que precisa ser apresentado, explorado, discutido e fundamentado desde os anos iniciais do ensino fundamental, uma vez que tal possibilidade permite promover a inserção dos alunos em problemas presentes no cotidiano de suas famílias desde então, a partir de conceitos da própria Matemática. Por essas razões consideramos que o conhecimento e a apropriação de conceitos da combinatória, pelos alunos, mostram-se importantes e indispensáveis ser desenvolvidos na escola, desde a mais tenra idade. Por conta dessas considerações, concordamos com Teixeira (2020), quando enfatiza que

> [...] tais experiências apresentam possibilidades de novas aprendizagens no exercício docente a partir de ações dialógicas e da interação entre pares, as quais vêm reforçar uma tese muito presente na área de formação e prática docente de professores, em grupos colaborativos, segundo a qual é pela reflexão na prática e sobre a prática que se pode reestruturar os conhecimentos profissionais dos professores (TEIXEIRA, 2020, p.111).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao apresentar e analisar o jogo da Grelha Retangular 3 x 4, e algumas possibilidades de como ele pode contribuir para o estudo inicial acerca da construção de diagramas de árvore e a apropriação do raciocínio combinatório, por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, entendemos ser este um caminho promissor para o ensino da combinatória.

Consideramos ser esta mais uma possibilidade para o professor explorar esse conteúdo no seu trabalho docente, sem desconsiderar outras possibilidades didáticas. Como consequência reveste-se de uma oportunidade para o professor ampliar conceitualmente os seus conhecimentos: de conteúdo e pedagógicos acerca da temática, segundo Shulman (1986). Um degrau a mais para o professor galgar na longa construção e (re) significação de sua prática docente.

Um jogo deve fazer parte de um contexto de ensino aprendizagem mais amplo que o simples jogar, ou seja, deve propiciar condições favoráveis para a apropriação de um ou mais conhecimentos. Assim, não se concebe a proposição de um jogo em que o aluno apenas se divirta e dele não extraia conhecimento. Portanto, não podemos considerar relevante que a proposição de um jogo em um contexto de sala de aula revista-se da ideia de que seja "*uma diversão, o jogo pelo jogo, e mais nada além do fato de ocupar os alunos*".

De modo que um jogo possa se caracterizar como um recurso auxiliar do professor, no ensino aprendizagem da Matemática escolar, é imprescindível que esse jogo faça o jogador pensar para tomar uma decisão: pensar sobre a jogada que ele vai fazer em seguida e os desdobramentos de ter tomado uma decisão e não outra.

O jogo precisa apresentar desafios a todos os que o jogam de modo que, para vencer o jogo, um jogador precise superar tais desafios por meio do estabelecimento de estratégia(s) proativa(s) que o permitam sair vencedor e não que considere o jogo apenas como só mais uma diversão entre tantas outras, em que ora um vence ora outro vence.

É claro que a diversão é um componente importante para o desenrolar do jogo, mas apenas a diversão não pode ser o mote que motive professor para propor um jogo. É preciso conter o componente didático, o pensar, o decidir e não um jogo de sorte e azar.

Além do mais, é recomendável e saudável que os alunos, após terem elaborado estratégias pessoais para vencer um jogo, as compartilhem com os colegas de seu "time" e, em algum momento posterior à disputa, também o façam com os colegas que foram seus oponentes quando da disputa, e outros que não participaram do jogo.

Invariavelmente, enquanto partilham variadas estratégias pessoais de jogo os alunos criam uma atmosfera agradável de trocas, reflexões e questionamentos entre si que os levam a uma ampliação conceitual acerca do conhecimento matemático subjacentes ao jogo em si e subliminarmente presentes no desenrolar do jogo.

O jogo favorece, pois, o trabalho em grupo, a descoberta, a partilha de saberes e a ampliação da aprendizagem de novo conteúdo matemático nele presente - estendendo-se ao desenvolvimento de competências que visam preparar cada jogador para competir no jogo de modo mais eficiente.

O jogo também possibilita o exercício do pensamento (raciocínio) probabilístico; a análise de possibilidades para fazer a "combinação" de objetos de modo a formar o espaço amostral; as reflexões para a tomada de decisões; o realizar testes de hipóteses que são levantadas durante as discussões coletivas; a ampliação do debate acerca da descoberta e ampliação de estratégias de jogo que visam melhorar a compreensão e a apropriação de conceitos e hábitos.

O jogo também leva os atores envolvidos a atitudes relacionadas com o hábito e o desenvolvimento de ações apropriadas, pertinentes ao processo de argumentação. Portanto, ressaltamos o quanto um jogo didático pode favorecer o trabalho de um professor no tocante à apresentação e o desenvolvimento de ferramentas matemáticas concernentes ao ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático, por meio dele e a partir dele. Em particular, o ensino aprendizagem de probabilidade em conjunto com o de combinatória, desde os anos iniciais do ensino fundamental.

Ressaltamos, também, que o bom uso de um jogo e a sua adequada exploração pode contribuir com o professor para que ele melhore seus instrumentos observacionais em relação ao rendimento e os conhecimentos de seus alunos, de maneira mais amiúde.

Tudo isso porque o jogo permite ao professor conhecer melhor as dificuldades de seu aluno, e as interpretações que faz quando da leitura do enunciado de um problema, por exemplo. Também em relação às fragilidades conceituais que porventura o aluno possa vir a ter - mais facilmente identificáveis durante o jogo -, bem como as concepções e crenças que cada um tem a respeito do conhecimento matemático objeto do jogo, e em relação às atividades que devem se seguir ao seu desenrolar.

Com base nessas informações, o professor pode/deve refletir acerca de quais conhecimentos e competências terá de considerar para poder ajudar o seu aluno a superar as dificuldades que tem e, assim, contribuir para a melhoria do rendimento escolar da Matemática como um todo.

REFERÊNCIAS

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In: Gal, I.; Garfield, D.J.B. (Ed.). *The assessment challenge in statistics educativo. Minnesota*: IOS Press, 239-252. Recuperado de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos*. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. American Educational Research Association, v. 32(1), 9-13.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Franco, M. A. S. (2005). Pedagogia da Pesquisa-ação. *Revista Educação e Pesquisa,* v.31(3), 483-502. Recuperado de http:// www.sciwlo.br/pdf/ep/v31/n3/a11v31n3.pdf

Freire, P. (2013). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Lopes, J. M. & Rezende, J.C. (2010). Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade. *Bolema*, v.23(36), 657-682.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. & Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. *Educación Matemática,* v.8(1), 26-39.

Teixeira, P. J. M. (2014). *Resolvendo problemas de Análise Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

TEIXEIRA, P.J.M. (2020) Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.22, n.2, p.081-113.

TEIXEIRA, P.J.M. (2021) Jogos para o ensino-aprendizagem de Combinatória na Educação Básica. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. (no prelo).

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Jogo "Grelha Retangular 3 x 4": uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório

Paulo Jorge Magalhães Teixeira
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Departamento de Análise, Niterói, Brasil
Situação acadêmica: Professor Associado I
paulojorge@id.uff.br
https://orcid.org/0000-0001-8256-6486

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Dona Claudina, 361 - Casa 1, CEP 20725-060, Méier, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: P. J. M. Teixeira
Coleta de dados: P. J. M. Teixeira
Análise de dados: P. J. M. Teixeira
Discussão dos resultados: P. J. M. Teixeira
Revisão e aprovação: P. J. M. Teixeira

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 15-04-2021 – Aprovado em: 02-12-2021