Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DA PROBABILIDADE PARA O CÁLCULO ANALÍTICO DE INTEGRAIS DEFINIDAS

Contribution of the probability to the analytical calculation of defined integrals

Fernanda Vital de PAULA
Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, Brasil
fernandavital@uft.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-7936-8937

Kevellyn Samara Lima da SILVA
Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, Brasil
kevellynsamaral@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4327-9649

Domingos Santana Nascimento dos SANTOS
Colégio Estadual Juscelino Kubistheck de Oliveira (CEJKO), Luzinópolis, TO, Brasil
domingossns@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8231-7906

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Tendo em vista a importância das integrais em inúmeras áreas, encontrar métodos que forneçam valores exatos de integrais definidas possui extrema importância. Neste artigo, uma forma alternativa de resolução de integrais definidas, utilizando as distribuições Normal e Qui-quadrado será apresentada, evidenciando a possível contribuição da Probabilidade com o ensino e aprendizagem do Cálculo Integral. O método proposto, além de ser um procedimento alternativo para resolução de integrais definidas com a mesma precisão das técnicas presentes em livros de Cálculo Integral, oferece a vantagem de que a solução exata de integrais definidas não resolvíveis pelas técnicas usuais pode ser determinada. Para a apresentação do método proposto, um suporte teórico será fornecido para um melhor entendimento do leitor. Neste sentido, as funções de distribuição de probabilidade, suas propriedades e o Teorema Fundamental do Cálculo serão enfatizados. Posteriormente, duas integrais definidas não resolvíveis pelas técnicas usuais serão calculadas por meio das distribuições Normal e Qui-quadrado, seguindo para generalização das funções que podem ser integradas por meio destas distribuições.

Palavras-chave: Distribuições de probabilidade, Integrais definidas, Método alternativo

ABSTRACT

In view of the importance of integrals in numerous areas, finding methods that provide exact values of defined integrals is extremely important. In this article, an alternative way of solving defined integrals, using the Normal and Chi-square distributions will be presented, showing the possible contribution of Probability to the teaching and learning of Integral Calculus. The proposed method, in addition to being an alternative procedure for solving defined integrals with the same precision as the techniques found in Integral Calculation books, offers the advantage that the exact solution of defined integrals that cannot be resolved by the usual techniques can be determined. For the presentation of the proposed method, theoretical support will be provided for a better understanding of the reader. In this sense, the probability distribution functions, their properties and the Fundamental Theorem of Calculus will be emphasized. Subsequently, two integrals defined that are not resolvable by the usual techniques will be calculated using the Normal and Chi-square distributions, following to generalize the functions that can be integrated using these distributions.

Keywords: Probability distribution, Defined integrals, Alternative method

1 INTRODUÇÃO

É indiscutível a importância das integrais, sendo elas definidas ou indefinidas, pois possuem uma vasta aplicação em inúmeras áreas. Neste sentido, Stewart (2016) faz referência a aplicações da integração em Matemática no cálculo de áreas entre curvas, volumes, valor médio de uma função, comprimento de arcos, entre outros. O autor apresenta ainda aplicações Física, Engenharia, Economia e Biologia, em exemplos que abordam pressão hidrostática e força, momentos e centros de massa, excedente do consumidor e capacidade cardíaca, respectivamente. Dada a importância diante de inúmeras aplicações possíveis, diversos métodos foram desenvolvidos para resolução de integrais ao longo do tempo, porém, tais técnicas não permitem a obtenção de soluções analíticas de integrais como$\int e^{-x^2}\,dx$, por exemplo. Assim, métodos numéricos costumam ser utilizados para cálculos aproximados de integrais definidas. Encontrar métodos que forneçam valores exatos nestes cálculos possui extrema importância em todas as áreas que utilizam o cálculo integral.

Paula, Silva e Santos (2021) mostram que é possível calcular integrais definidas por meio da utilização das funções, expressões e propriedades de distribuições de probabilidades conhecidas. Os autores evidenciam, por meio de exemplos, o quanto o método proposto pode simplificar os cálculos quando comparado às técnicas de integração recomendadas pelo Cálculo Integral. Na ocasião, os autores recorrem às distribuições Beta e Exponencial.

Neste artigo, a fim de apresentar novos resultados do método proposto pelos autores e destacar a potencialidade do mesmo, será destacado que além do método simplificar cálculos de integrais definidas, ele ainda permite que integrais não resolvíveis por meio de técnicas usuais sejam resolvidas analiticamente. Para tal, as distribuições Normal e Qui-quadrado serão consideradas. Nesse contexto, o cálculo analítico da integral$\int_a^b e^{-x^2}\,dx$, para qualquer a e b, torna-se possível por meio da distribuição Normal, conforme será apresentado.

Para compreensão do método, dos exemplos e generalizações que serão apresentados, é preciso ter um conhecimento sobre variáveis aleatórias contínuas. Com o objetivo de facilitar o entendimento do leitor, alguns conceitos e definições sobre variáveis aleatórias contínuas serão abordadas, dando ênfase às funções de distribuições de probabilidades.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Uma variável aleatória (v.a.) é uma função de um espaço amostral Ω nos números reais. As variáveis aleatórias podem ser classificadas em discretas ou contínuas conforme a natureza numérica dos valores que assumem. Neste artigo, apenas o conhecimento sobre a v.a. contínua (v.a.c.) faz-se necessário.

Relacionadas à v.a.c. X, têm-se a função de densidade de probabilidade (f.d.p.) de X e a função de distribuição acumulada (f.d.a.) de X. A primeira é responsável por associar uma probabilidade a intervalos assumidos pela v.a.c., satisfazendo as seguintes condições:

i. $f(x) \geqslant 0$ e

ii. $\int_a^b f(x)\,dx = 1,$

em que f é definida no intervalo $a \leq x \leq b$. Sobre os limites do intervalo de x, a e bpodem assumir menos infinito ou mais infinito, respectivamente.

Para a obtenção da probabilidade de v.a.c. X assumir valores em um determinado intervalo [c, d], ou seja, para o cálculo de pode-se utilizar $P(c \leq X \leq d)$ a f.d.p. ou a f.d.a. de X, da seguinte maneira:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx.$$

Já a f.d.a. fornece a probabilidade de que X seja igual a ou menor que x, sendo definida por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad \forall x.$$

Assim, o valor correspondente a P(c ≤ X ≤ d) também pode ser obtido fazendo F(d)-F(c) já que:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \int_{-\infty}^d f(x)dx - \int_{-\infty}^c f(x)dx = F(d) - F(c). \qquad (2.1)$$

Em muitos casos, as variáveis aleatórias apresentam certos padrões de comportamento que lhes permitem ser modeladas por distribuições probabilísticas conhecidas.

A respeito da distribuição Normal, a mesma é considerada como a mais importante das distribuições probabilísticas. Alguns fatores associados a essa importância estão relacionados ao Teorema Central do Limite, à tratabilidade analítica da distribuição e à sua grande aplicabilidade na natureza e em pesquisas. Mais detalhes podem ser consultados em Casella e Berger (2011).

Quando uma v.a.c. se distribui normalmente, sua f.d.p. é dada por:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty \quad \text{e} \quad -\infty < x < \infty,$$

em que σ e μ correspondem ao desvio padrão e à média de X, respectivamente. Nesse caso, usa-se a notação X~N(μ, σ²). A Figura 1 ilustra a influência dos parâmetros μ e σ na forma gráfica da distribuição Normal.

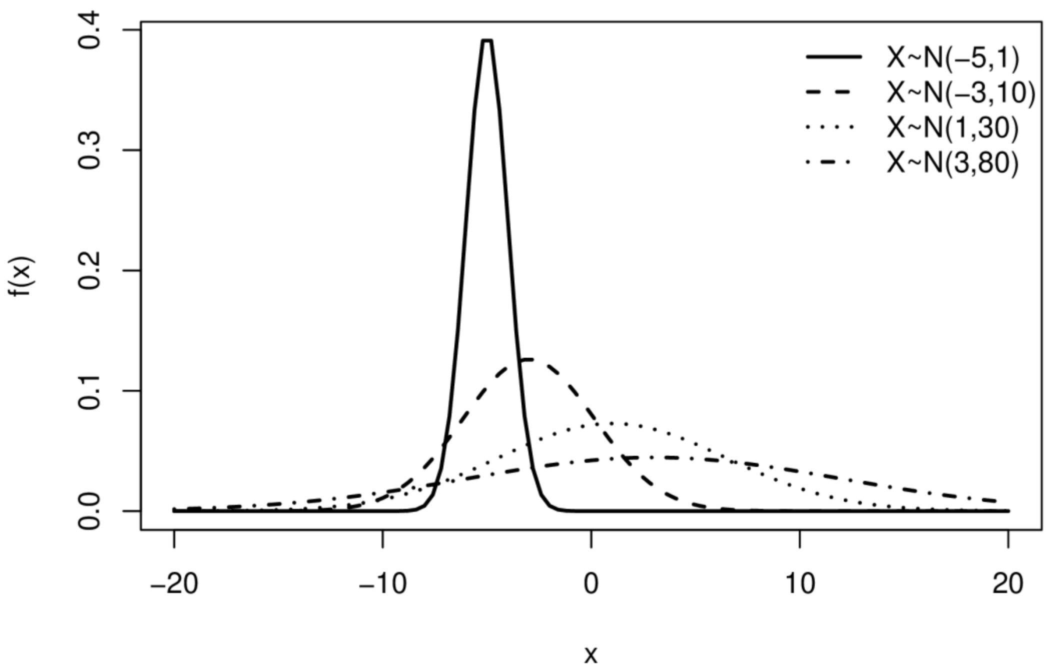

Figura 1: Gráficos da distribuição Normal
Fonte: Elaborado pelos autores

Já a distribuição Qui-quadrado é muito utilizada em inferência estatística, servindo como base para a obtenção de outras distribuições como t de Student e Fisher. Ela pode ser representada como um caso particular da distribuição Gama ou como a soma dos quadrados de Normais padronizadas. Quando uma v.a.c. possui distribuição Qui-quadrado com p graus de liberdade, sua f.d.p. é dada por:

$$f(x|p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}} x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \qquad p > 0, \quad x > 0.$$

Nesse caso, denota-se$X \sim \chi_p^2$. A Figura 2 apresenta algumas formas do gráfico da distribuição Qui-quadrado conforme diferentes valores de p.

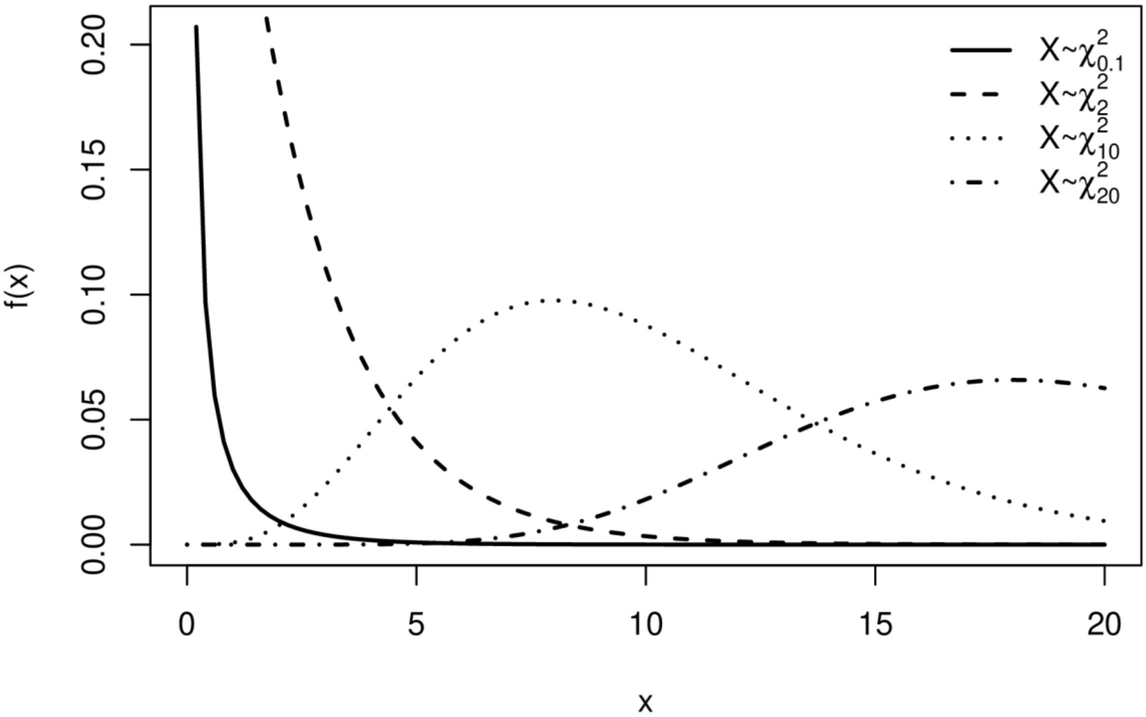

Figura 2: Gráficos da distribuição Qui-quadrado
Fonte: Elaborado pelos autores

Tendo em vista que a função Gama está presente na expressão da f.d.p da distribuição Qui-quadrado, é importante que algumas propriedades desta função sejam citadas:

i. $\Gamma(1) = 1$;

ii. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n > 0$;

iii. $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$;

v. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Por meio da Equação 2.1, observa-se a estreia relação do cálculo de probabilidades por meio da f.d.a. com o teorema fundamental do cálculo (t.f.c.). Ressalta-se que o t.f.c. é um dos conceitos mais importantes do Cálculo Integral, no que se refere ao cálculo de integrais definidas.

Conforme Thomas (2012), na segunda parte da apresentação do t.f.c., calcular a integral definida de f(x) em [a, b], sendo f contínua em [a, b], corresponde ao cálculo da diferença de b aplicado na primitiva de f(x) por a aplicado na primitiva de f(x), ou seja, F(b)-F(a). Observa-se assim que, para o cálculo de integrais definidas, mesmo dispondo do t.f.c., a necessidade de resolução das integrais não é poupada, tendo em vista a necessidade de obtenção da primitiva F(x). Dessa forma, o cálculo analítico de certas integrais definidas não é uma tarefa fácil, exigindo a utilização de técnicas como integração por substituição, partes, frações parciais ou outras. Ademais, existem integrais que não podem ser resolvidas de modo analítico, como é o caso de $\int e^{-x^2}\,dx$. Nesse caso, é comum a utilização de métodos numéricos para aproximar o valor da integral definida de interesse.

3 RESULTADOS

Nesta seção serão apresentadas as resoluções de duas integrais definidas pela utilização de distribuições Normal e Qui-quadrado. Destaca-se que ambas as integrais não podem ser resolvidas analiticamente por técnicas usuais do Cálculo Integral.

3.1 Distribuição Normal

Inicialmente, consideremos o interesse em calcular a integral definida

$$\int_0^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{8}} dx.$$

É possível notar que a função a ser integrada assemelha-se à f.d.p. da distribuição Normal, além do intervalo de integração [0, 2] ser compatível com o intervalo de variação de uma variável que se distribui normalmente. Veja:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{(x-2)^2}{8}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}} \\ &= 2\sqrt{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}} \\ &= 2\sqrt{2\pi}\ g(x), \end{aligned}$$

sendo $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{2^2}}$. Assim, g(x) corresponde à f.d.p. $X \sim N(2, 4)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{8}} dx &= 2\sqrt{2\pi} \int_0^2 g(x)dx \\ &= 2\sqrt{2\pi}\ [G(2) - G(0)] \\ &\approx 2\sqrt{2\pi} \cdot 0,34 \\ &= 1,70. \end{aligned}$$

O valor 0,34 foi obtido pelo *software R-project* fazendo-se *pnorm(2,2,2) - pnorm(0,2,2)* em que *pnorm(2,2,2)* por exemplo, equivale ao valor da distribuição acumulada de N(4, 2) em 2, isto é, *pnorm(2,2,2)* = $\int_{-\infty}^{2} g\,(x)dx$.

Em termos geométricos, considerando a relação entre a integração definida e o cálculo de áreas, pode-se afirmar que área entre o gráfico da função f(x) e o eixo horizontal do plano cartesiano no intervalo [0, 2] é $2\sqrt{2\pi} \approx 5$vezes a área entre a curva da N(4, 2) e o eixo horizontal em [0, 2]. A Figura 3 ilustra a relação entre ambas as áreas.

Considerando o intervalo [0, 2], a área determinada por f(x) encontra-se hachurada e a área determinada pela distribuição Normal encontra-se na cor cinza.

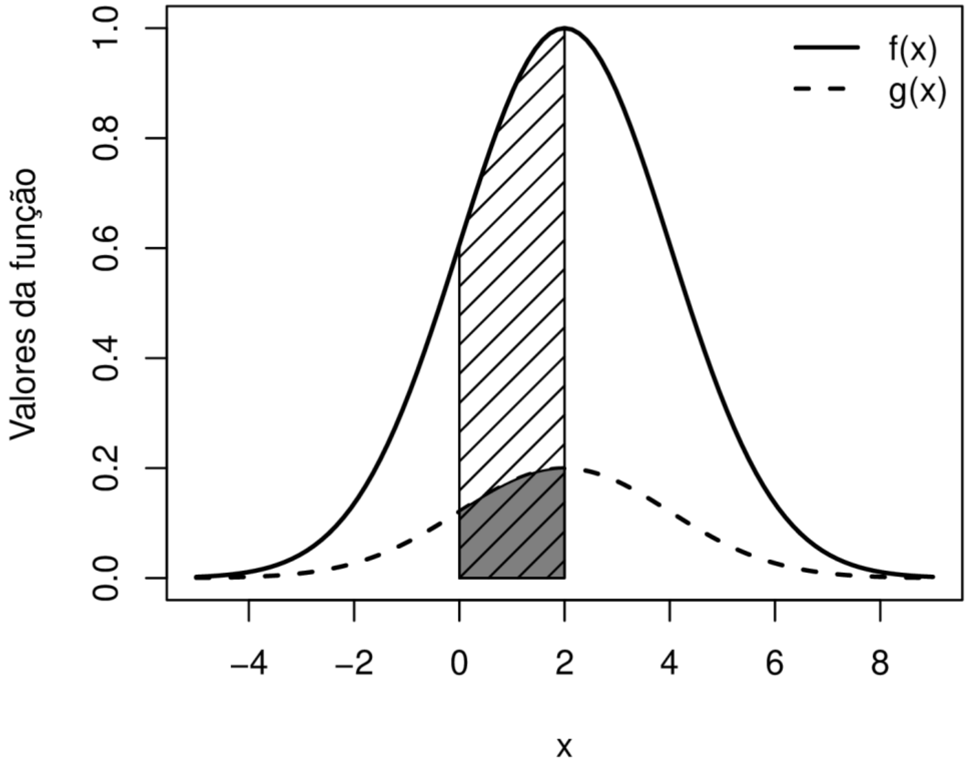

Figura 3: Áreas determinadas pelos gráficos de f(x) e g(x) e o eixo horizontal em [0, 2].
Fonte: Elaborado pelos autores

3.2 Distribuição Qui-quadrado

Um outro exemplo de integral definida que não pode ser calculada por meio das técnicas de integração do Cálculo Integral é dado por:

$$\int_{2}^{9} x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Observando a f.d.p. da distribuição Qui-quadrado, é possível manipular algebricamente a função$h(x) = x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$de modo que ela se apresente de modo similar à referida f.d.p., conforme segue.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \\
&= x^{\frac{9-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \\
&= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}} \; \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}}} \; x^{\frac{9-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \\
&= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}} \cdot j(x),
\end{aligned}
$$

em que$j(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)2^{\frac{9}{2}}} x^{\frac{9-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$e, portanto, $X \sim \chi_9^2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_2^9 x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx &= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}} \int_2^9 j(x) dx \\
&= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}} \left[J(9) - J(2)\right] \\
&\approx \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{2^9} \cdot 0,55 \\
&\approx 145,86.
\end{aligned}
$$

O valor 0,55 foi obtido através do *software R-project* fazendo *pchisq(9, 9)- pchisq(2, 9)*. Por meio desse código, o *software* fornece o valor da f.d.a. de $X \sim \chi_9^2$em 2 subtraído do valor da f.d.a. de$X \sim \chi_9^2$em 9.

Aqui, pode-se afirmar que área entre o gráfico da função h(x) e o eixo horizontal do plano cartesiano no intervalo [2, 9] é$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) 2^{\frac{9}{2}} \approx 263$vezes a área entre a curva de χ_9^2e o eixo horizontal em [2, 9]. A Figura 4 ilustra a relação entre ambas as áreas. Considerando [2, 9], a área determinada por h(x) encontra-se hachurada e a área determinada pela distribuição Qui-quadrado corresponde à linha em preto abaixo da área hachurada.

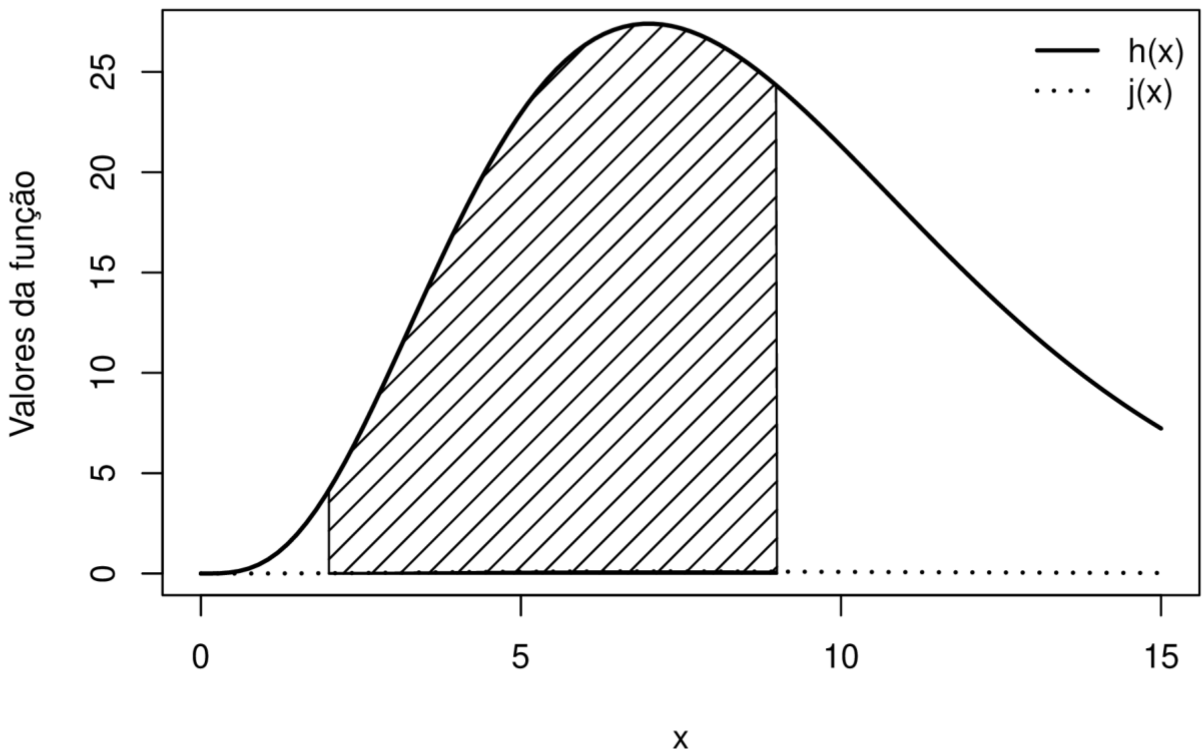

Figura 4: Áreas determinadas pelos gráficos de h(x) e j(x) e o eixo horizontal em [2, 9].
Fonte: Elaborado pelos autores

4 Generalização do método proposto

As resoluções das duas integrais definidas apresentadas evidenciam a relação entre o cálculo de integrais definidas e o cálculo de probabilidades envolvendo distribuições probabilísticas conhecidas. A princípio, é comum perceber a importância do cálculo de integrais definidas no cálculo de probabilidades. O processo inverso, que se observa ao calcular integrais definidas por meio do conhecimento de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias contínuas, não é encontrado em literaturas de Probabilidade ou Cálculo Integral, mas apresenta potencialidade desde que seja possível manipular a função a ser integrada para que esta assuma a forma da f.d.p. de uma distribuição conhecida.

Tal potencialidade, conforme apresentado por Paula et al. (2021), está associada à redução de cálculos onerosos exigidos pelas técnicas de integração no cálculo de integrais definidas. Este artigo acrescenta às vantagens do método proposto pelos autores, a possibilidade de resolução analítica de integrais definidas que não podem ser resolvidas pelas técnicas de integração apresentadas pelo Cálculo Integral.

Apesar de os exemplos de aplicação da metodologia apresentada terem sido pontuais, é possível generalizar a forma das funções que podem ser manipuladas a fim de que assumam a f.d.p. das distribuições Normal ou Qui-quadrado no processo de cálculo de integrais definidas. Neste sentido, a Tabela 1 apresenta a generalização das funções que podem ser integradas conforme as distribuições utilizadas neste artigo, acrescidas da generalização apresentada por Paula et al. (2021), utilizando as distribuições Beta e Exponencial.

Tabela 1: Função e distribuição a ser utilizada

Função	Distribuição
$f_1(x) = ae^{-\frac{(bx-bc)^2}{d}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ d > 0$	Normal
$f_2(x) = ax^b e^{-\frac{x}{2}+c}, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad b > -1$	Qui-quadrado
$f_3(x) = ax^n\,(b - bx)^m, \quad x \in (0,1), \quad n,\ m \geqslant 0, \quad a,\ b \in \mathbb{R}$	Beta
$f_4(x) = axe^{-bx}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad x \geq 0$	Exponencial

Fonte: Elaborado pelos autores

Os resultados exibidos na Tabela 1, referentes às distribuições Normal e Qui-quadrado, são demonstrados a seguir.

4.1 Distribuição Normal

$$\int ae^{-\frac{(bx-bc)^2}{d}}dx = a\sigma\sqrt{2\pi}\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(bx-bc)^2}{d}}dx = a\sigma\sqrt{2\pi}\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2 2\sigma^2 (x-c)^2}{d 2\sigma^2}}dx$$
$$= a\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{b^2 2\sigma^2}{d}}\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}dx = a\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{b^2 2\sigma^2}{d}}\int f(x)dx,$$

em que f corresponde à f.d.p. da distribuição Normal com parâmetros c e $\frac{d}{2b^2}$. No caso em que (-∞, +∞) é o intervalo de variação de x, a integral definida de

$$ae^{\frac{-(bx-bc)^2}{d}}$$

resultará em

$$a\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{2b^2\sigma^2}{d}},$$

tendo em vista que $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)dx = 1$conforme a 2ª condição exibida na Seção 2.

Assim, toda função do tipo$ae^{\frac{-(bx-bc)^2}{d}}$pode ser manipulada algebricamente de modo que recaia na f.d.p. da distribuição Normal.

4.2 Distribuição Qui-quadrado

$$\int ax^b e^{-\frac{x}{2}+c}dx = a\int x^{\frac{2b+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}+c}dx = ae^c\int x^{\frac{2b+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$
$$= ae^c\Gamma\left(\frac{2b+2}{2}\right)2^{\frac{2b+2}{2}}\int \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2b+2}{2}\right)2^{\frac{2b+2}{2}}}x^{\frac{2b+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx = ae^c\Gamma\left(\frac{2b+2}{2}\right)2^{\frac{2b+2}{2}}\int g(x)dx,$$

em que g corresponde à f.d.p. da distribuição Qui-quadrado com parâmetro 2b + 2. No caso em que (0, +∞) é o intervalo de variação de x, a integral definida de

$$ax^b e^{-\frac{x}{2}+c}$$

resultará em

$$ae^c \Gamma(b+1)2^{b+1},$$

tendo em vista que $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)dx = 1$, conforme a 2ª condição exibida na Seção 2. Aqui, como o parâmetro da distribuição Qui-quadrado deve ser positivo, então b > −1.

Em ambos os casos, para o cálculo de integrais definidas por meio do método proposto, faz-se necessário verificar se os parâmetros e o intervalo de variação da variável estão de acordo com as referidas distribuições. Quando o intervalo de integração está contido no intervalo de variação da variável que se distribui conforme o modelo considerado, o resultado da integral é obtido diretamente por meio das condições da f.d.p. ou f.d.a.. Uma discussão detalhada a respeito pode ser consultada em Paula et al. (2021).

Como exemplo, em

$$\int_{-2}^{-1} 2x^2\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx,$$

a função a ser integrada sugere o uso da distribuição Qui-quadrado, como pode ser observado na Tabela 1. Porém, o intervalo de variação da integral e o intervalo de uma variável que tem distribuição Qui-quadrado são incompatíveis dado que, neste caso, x deveria pertencer ao intervalo (0, +∞). Nesse caso, não é possível calcular a integral por meio do método proposto, utilizando a distribuição Qui-quadrado. Nos casos em que a adequação dos intervalos é verificada, como observa-se em

$$\int_{1}^{2} 2x^2\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx,$$

já que $(1,2) \subset (0, +\infty)$, basta realizar manipulações algébricas na função a ser integrada para que ela se apresente como a f.d.p. da função Qui-quadrado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método alternativo apresentado consiste na resolução de integrais definidas utilizando conhecimentos probabilísticos, exigindo que o interessado em o utilizar tenha conhecimento e domínio de conceitos e propriedades de distribuições de probabilidades conhecidas no que diz respeito ao conhecimento de seus parâmetros, intervalos de variação dos mesmos, esperança matemática e variância. Neste sentido, a utilização do método proposto permite que o conhecimento referente às distribuições de probabilidade e torne mais consistente e fornece solução analítica para integrais não resolvíveis por meio das técnicas de integração propostas pelo Cálculo Integral.

Para aplicação do método apresentado é importante destacar que, é imprescindível que seja verificado se o intervalo de integração é compatível com o intervalo de variação da variável à qual se refere a distribuição de probabilidade que será utilizada. No caso em que a incompatibilidade é detectada, o método proposto não pode ser utilizado conforme a pesquisa realizada até o momento. Suspeita-se que seja possível contornar tal impossibilidade por meio de uma mudança de variável e observação de características como a paridade da função a ser integrada. Esse é o próximo ponto na pesquisa que está sendo realizada pelos autores acerca do método discutido neste artigo.

Para finalizar, espera-se que este artigo possa contribuir com o ensino e aprendizado de conteúdos de Probabilidade e Cálculo Integral, que permita a relação entre as duas disciplinas e que o método possa se apresentar como uma boa alternativa quando as técnicas usuais não forem suficientes para a resolução analítica de integrais definidas.

REFERÊNCIAS

Morettin, L. G. (2010). *Estatística Básica.* São Paulo: Pearson Prentice Hall.

Paula, F. V., Silva, K. S. L. & Santos, D. S. N. (2021). Cálculo de integrais definidas utilizando distribuições de probabilidades. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática. Bento Goncalves*. doi: https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4694

Santos, D. S. N. (2014). *Cálculo de integrais definidas utilizando funções de distribuição de probabilidade* (Monografia de Conclusão de curso). Universidade Federal do Tocantins, Araguaína.

Stewart, J. (2016). *Cálculo: Volume 1*. São Paulo: Cengage Learning.

Thomas, G. B. (2012). *Cálculo: Volume 1*. São Paulo: Pearson Education do Brasil.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Contribuições da probabilidade para o cálculo analítico de integrais definidas

Fernanda Vital de Paula
Doutora
Professora Adjunta
Universidade Federal do Tocantins, Colegiado de Licenciatura em Matemática, Araguaína, Brasil
fernandavital@uft.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-7936-8937

Kevellyn Samara Lima da Silva
Licencianda em Matemática
Universidade Federal do Tocantins, Colegiado de Licenciatura em Matemática, Araguaína, Brasil
kevellynsamaral@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4327-9649

Domingos Santana Nascimento dos Santos
Graduado em Licenciatura em Matemática
Colégio Estadual Juscelino Kubistheck de Oliveira (CEJKO), Luzinópolis, TO, Brasil
domingossns@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8231-7906

Endereço de correspondência do principal autor
Universidade Federal do Tocantins, campus de Araguaína
Avenida Paraguai, s/n°, esquina com a Rua Uxiramas
Setor Cimba | 77824-838 | Araguaína/TO

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: F. V. Paula, K. S. L. Silva, D. S. N. Santos.
Coleta de dados: F. V. Paula, K. S. L. Silva, D. S. N. Santos.
Análise de dados: F. V. Paula, K. S. L. Silva, D. S. N. Santos.
Discussão dos resultados: F. V. Paula, K. S. L. Silva, D. S. N. Santos.
Revisão e aprovação: F. V. Paula, K. S. L. Silva.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 06-07-2021 – Aprovado em: 13-10-2021