International Journal for Research in Mathematics Education

Uma análise das funções da Geometria em outros campos da Matemática: um olhar sobre livros didáticos

An analysis of the functions of geometry in other fields of mathematics: a view at textbooks

https://doi.org/10.37001/ripem.v12i1.2874

Liara Alves Gentil
https://orcid.org/0000-0001-9070-771X
Mestre em Educação Matemática pela Unesp- Rio Claro/SP
liaragentil@gmail.com

Rúbia Barcelos Amaral
https://orcid.org/0000-0003-4393-6127
Universidade Estadual Paulista – Unesp- Rio Claro/SP
rubia.amaral@unesp.br

Resumo

Esse artigo apresenta os resultados de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi investigar as funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos (Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística) em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2017. O aporte teórico está embasado nos estudos de Flores acerca da cultura visual, entendida como concepções inerentes à cultura de uma sociedade, reveladas em sua forma visual. No contexto da cultura visual, amparamo-nos no conceito de visualidade, definido como os discursos que informam sobre o modo como nós vemos. No que tange à metodologia, essa é de natureza qualitativa, tendo sido analisadas três coleções de livros didáticos, totalizando 12 obras. Todo o conteúdo de Geometria que permeava os capítulos de Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística foi classificado de acordo com as funções que desempenhava, a saber: função ilustrativa, formativa, explicativa, demonstrativa, representativa e imagem mental. Resultados mostram que, em alguns conteúdos de Álgebra e Aritmética, a Geometria se constituiu como prática visual que compõe os modos de olhar dos alunos da Educação Básica. Em Probabilidade e Estatística, entretanto, suas funções são escassas. Nesse cenário, notamos que a Geometria e as figuras geométricas são articuladas aos outros campos da Matemática com o propósito de ensinar. Por diversas vezes, sua integração se deve, principalmente nos campos de Álgebra e Aritmética, à expectativa de facilitar o ensino de alguns conceitos abstratos, ilustrando-os por meio de figuras geométricas.

Palavras-chave: Geometria. Livro didático. Cultura visual. Visualidade. Anos Finais do Ensino Fundamental. PNLD.

Abstract

This paper presents the results of a graduate research whose objective was to investigate the functions that geometry plays in non-geometric fields (Algebra, Arithmetic, Probability and Statistics) in textbooks for the Middle School, approved by the National Textbook and Didactic Material Program (2017 edition). The theoretical contribution is based on Flores' studies on visual culture, conceived as conceptions inherent to the culture of a society, revealed in their visual form. In the context of visual culture, we rely on the term visuality, defined as the discourses that inform about the way we see. Regarding the methodology, this is of a qualitative nature, having been analyzed three collections of textbooks, totaling 12 textbooks. All the Geometry content that permeated the Algebra, Arithmetic, Probability and Statistics chapters was classified according to the functions it performs, namely: illustrative, formative, explanatory, demonstrative, representative and mental image functions. Results show in some Algebra and Arithmetic contents, Geometry was constituted as a visual practice that composes the ways of looking at Basic Education students. In Probability and Statistics, however, the functions of Geometry are scarce. In this case, we note that Geometry and geometric figures are articulated with other fields of Mathematics for the purpose of teaching. Geometry is often integrated, mainly in the fields of Algebra and Arithmetic, with the expectation of facilitating the teaching of some abstract concepts, illustrating them through geometric figures.

Keywords: Geometry. Textbooks. Visual culture. Visuality. Middle school. PNLD.

1. Introdução

Este artigo é fruto de uma pesquisa de mestrado que se originou de inquietações a respeito da presença da Geometria nos campos[1] não-geométricos em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Acreditamos ser importante analisar os conteúdos dos livros didáticos (doravante LD) por eles serem um material gratuito e disponível a todos os alunos da rede pública de ensino. Além disso, os LD se constituem como uma das possibilidades de acesso dos pesquisadores às noções matemáticas estudadas na Educação Básica, viabilizando discussões acerca delas e, por conseguinte, da Matemática de modo geral.

De acordo com Valente (2008), os LD estão diretamente relacionados à história da Educação Matemática. O autor pressupõe que talvez "a matemática se constitua na disciplina que mais tem sua trajetória histórica ligada aos livros didáticos" (Valente, 2008, p. 141). Outrossim, esse material é o intermediário entre o currículo oficial e a sala de aula, ou seja, é por meio dele que as mudanças feitas no currículo oficial chegam às salas de aula (Silva & Valente, 2014). Diante disso, Batista (2002) afirma que o LD é um material que orienta o trabalho pedagógico do professor por conter nele uma síntese dos conteúdos a serem abordados no decorrer do ano letivo, ademais de trazer orientações para o desenvolvimento desses conteúdos, influenciando a metodologia de ensino do docente. Guimarães et al. (2007) também apontam a importância deste tipo de publicação nos processos de ensino e aprendizagem ao afirmarem que ele se constitui como o principal recurso utilizado pelo professor na condução e elaboração de suas práticas, em parte, porque existem poucos materiais que oferecem essa orientação do "quê" ensinar e do "como" ensinar, e, em parte, pela dificuldade que os alunos têm de acessar outras fontes de pesquisa.

[1] Como denomina a Base Nacional Comum Curricular, os diferentes campos da Matemática são "Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade" (Brasil, 2017, p. 269).

Nesse contexto, não podemos deixar de mencionar o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), criado em 1985 pelo Governo Federal, com apoio do Banco Mundial, cujo objetivo era distribuir gratuitamente LD a todos os alunos da rede pública de ensino. Já em 1996, foi implementada oficialmente a avaliação pedagógica das obras adquiridas no âmbito do PNLD, tendo seus resultados divulgados em um documento intitulado “Guia do Livro Didático” (Cassiano, 2007). Tal avaliação ainda acontece nos dias atuais, e as editoras que desejam participar do PNLD devem fazer a inscrição das publicações, as quais precisam seguir algumas exigências técnicas e físicas estipuladas em edital. Desse modo, primeiramente, é feita uma triagem para conferir se essas exigências foram acatadas e, em seguida, as obras são avaliadas pedagogicamente (Mazzi, 2018).

Atualmente, o governo investe cerca de 1,4 bilhões na compra de LD para serem distribuídos às escolas da rede pública de ensino[2], cujo montante, é importante mencionar, parte do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Além dos livros disciplinares, o PNLD 2020 passou a incluir livros de projetos integradores, em que são trabalhadas situações do cotidiano em concomitância com as áreas de conhecimento, assim como obras interdisciplinares, nas quais são abordadas as relações existentes entre os componentes curriculares. Ademais, o Manual do Professor vem acompanhado de material digital, com plano de desenvolvimento bimestral e proposta de acompanhamento de aprendizagem (Brasil, 2018).

Diante da relevância do PNLD para a Educação Básica, de sua representatividade perante o mercado editorial, bem como de sua abrangência, justificamos nosso interesse em analisar os livros didáticos, cujo foco está, especificamente, no estudo da Geometria. Silva e Valente (2014) mostram que esse tema sempre esteve presente nas discussões acerca da Educação, apresentando sua trajetória histórica desde a independência do Brasil até os dias atuais, cobrindo um período de quase 200 anos. Para isso, os autores evidenciaram o caráter prático da Geometria aplicada à agrimensura no século XIX, bem como o Movimento da Matemática Moderna, já no século XX, em que a Geometria era vista a partir das noções topológicas do espaço, até chegar nos dias atuais, nos quais ela se centra nas figuras geométricas e suas propriedades. Mediante o exposto, é possível afirmar que “pesquisar a Geometria nos livros didáticos significa olhar para um campo com uma longa trajetória histórica, que está em constante movimento, sendo reelaborado com o passar dos anos” (Gentil, 2020, p. 16).

Assim, a pergunta de pesquisa que guiou nossos estudos foi a seguinte: Quais funções a Geometria assume em campos não-geométricos nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental? A partir dela, delineamos dois objetivos centrais, a saber: analisar como os conteúdos de Geometria estão estruturados (introdução, abordagem e desenvolvimento) em capítulos não-geométricos; e mapear, em tais capítulos, as tarefas[3] que fazem uso da Geometria em seus enunciados. Vale esclarecer que capítulos não-geométricos são aqueles que trabalham conteúdos de Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística. Para tanto, foram considerados os livros do PNLD 2017[4].

---

[2] Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/banco-de-imagens/entregas-2020-ministerio-da-educacao.pdf. Acesso em: 04 ago. 2021.

[3] Neste texto, “tarefas” são atividades propostas para serem desenvolvidas pelos alunos, qualquer que seja sua natureza (exercícios do tipo “resolva”/“calcule”, exploratória, investigativa, etc).

[4] Cabe observar que a pesquisa se iniciou em 2018, então, o PNLD 2017 era responsável pelo último edital para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

2. Cultura visual e figuras geométricas

Os estudos sobre cultura visual tiveram origem nos Estados Unidos, no Programa de Estudos Culturais e Visuais da Universidade de Rochester e no Programa de Estudos Visuais da Universidade de Califórnia de Irvine. Não existe uma única definição sobre o que é cultura visual, visto que diferentes pesquisadores apresentam distintas definições para o termo.

Knauss (2006) traz uma caracterização acerca dos estudos sobre a cultura visual, evidenciando algumas definições de pesquisadores que foram pioneiros no assunto, tais como James Hebert, Janet Wolf, Chris Jenks, Nicholas Mirzoeff e W. J. T. Mitchell. Para James Hebert, os estudos visuais são compostos pela cultura visual e pelas criações humanas, sejam elas quais forem. Já para Janet Wolf, esses estudos dizem respeito a imagens que compõem a produção de sentidos em contextos sociais específicos. Chris Jenks, por sua vez, restringe a cultura visual à cultura ocidental, isto é, para ele, a experiência social ocidental se resume à percepção e, então, temos uma via de mão dupla: a visão que os ocidentais têm do mundo é influenciada por esse modo de ver específico e, como consequência, o mundo é reordenado a partir do olhar, por meio das expressões visuais. Nicholas Mirzoeff também segue essa linha mais restritiva, posto que, para esse autor, a cultura pós-moderna é visual e a prova disso são as tecnologias; portanto, a cultura visual é entendida como o estudo da cultura global da visualidade, mediada pelas tecnologias e caracterizada pelas imagens digitais. No tocante a Mitchell, o pesquisador considera cultura visual tudo aquilo que olhamos e mostramos e também aquilo que ocultamos e nos recusamos a ver, ou seja, ele avalia a experiência visual como um todo e não se limita somente a imagens (Knauss, 2006; Sérvio, 2014).

Diante de todas essas definições, Knauss (2006, p. 110) as divide em duas perspectivas, uma mais restrita e outra mais abrangente:

> [...] a primeira entende cultura visual de modo restrito, na medida em que ela corresponde à cultura ocidental, marcada pela hegemonia do pensamento científico (Chris Jenks) ou na medida em que a cultura visual traduz, especificamente, a cultura dos tempos recentes marcados pela imagem virtual e digital, sob domínio da tecnologia (Nicholas Mirzoeff); a segunda perspectiva, que abarca diversos autores, considera que a cultura visual serve para pensar diferentes experiências visuais ao longo da história em diversos tempos e sociedades.

Em nossa pesquisa, assumimos cultura visual sob a perspectiva abrangente e tomamos a definição proposta por Flores (2010, p. 278), em que ela é entendida como “[...] aspectos da cultura que são manifestados em sua forma visual (pinturas, fotografias, filmes, imagens científicas...)”. É importante esclarecer que cultura não se refere somente aos modos de vida de uma sociedade, uma vez que Flores (2010, p. 279) a conceitua como “a produção e o intercâmbio de significados entre os membros de um grupo ou sociedade”.

O termo visualidade surge em meio aos debates acerca da cultura visual, sendo considerado mais adequado aos estudos sobre esse tema do que o termo visualização (Flores, 2013). Isso em razão de a visualização estar relacionada à aprendizagem de conceitos geométricos, com foco nas habilidades visuais, enquanto a visualidade discute a construção do olhar de forma histórica e cultural. Desse modo, visualidade pode ser definida como "[...] a soma de discursos que informam como nós vemos [...][, visto que ela] discute práticas visuais no contexto da história e da cultura" (Flores, 2013, p. 95).

É importante destacar que, nesse contexto, a visão não está limitada ao fator físico, mas é abordada histórica e culturalmente. De acordo com Flores (2010), ela é uma matriz que inclui outros sentidos e, dessa maneira, Schollhammer (2002) defende que não há separação entre as representações visuais e verbais, pois as duas caminham juntas.

> [...] nenhuma imagem hoje representa um sentido em função da sua pura visibilidade mas encontra-se sempre inscrita num texto cultural maior, abrindo para formas diferentes de leitura cujas fronteiras ainda não percebemos com clareza. Em outras palavras, não podemos tratar a imagem como *ilustração* da palavra nem o texto como *explicação* da imagem. O conjunto texto-imagem forma um complexo heterogêneo fundamental para a compreensão das condições representativas em geral (Schollhammer, 2002, p. 25, grifo do autor).

Nós entendemos que as imagens não desempenham papel central nos estudos acerca da cultura visual, entretanto, elas compõem esse cenário. Como nossa pesquisa abarca a Geometria e, consequentemente, as figuras geométricas, é importante esclarecer que as consideramos um tipo de imagem, e, ainda, corroboramos Brigo (2010, p. 39) quando afirma que "as figuras servem como um suporte epistemológico na elaboração e aplicação de conhecimentos matemáticos".

Flores-Bolda (1997) reitera que, ao olhar uma figura geométrica, o aluno deve atentar-se aos dados que não são imediatos, ou seja, deve olhar além dos traços e observar o discurso. Assim, a autora reforça mais uma vez a ideia de que os discursos verbais e visuais são indissociáveis, defendendo, ademais, que as figuras geométricas são um auxílio na resolução de problemas matemáticos por oferecerem um apoio intuitivo.

Nesse sentido, Brigo (2010, p. 78) elenca quatro funções para as figuras geométricas:

> Função Ilustrativa: figuras utilizadas para ilustrar enunciados de teoremas, problemas e conceitos;
> Função Explicativa: figuras utilizadas para explicar o que os elementos teóricos não conseguem explicar;
> Função Demonstrativa: figuras utilizadas para demonstrar um teorema;
> Função Formativa: figuras utilizadas como um dos meios de desenvolver as capacidades mentais e intelectuais dos alunos por meio de um experimento.

Compreendemos que as funções supracitadas não são excludentes e, portanto, uma figura geométrica pode assumir mais que uma delas. Além dessas quatro, no momento da análise, nós sentimos a necessidade de criar outras duas para classificar imagens que não se encaixavam em nenhuma delas. A primeira nova função criada foi a representativa, a qual abrange a representação de números reais por pontos na reta numérica e a representação de equações algébricas por retas no plano cartesiano. Optamos por criá-la, pois os autores de LD colocam as duas formas de representação supramencionadas como geométricas. Já a segunda foi a formação de imagens mentais, que abrange os enunciados em que são abordados conceitos geométricos, porém, sem que a figura esteja ilustrada no papel. Dessa forma, o aluno tem a possibilidade de, a partir do discurso, formar uma imagem mental e optar por desenhá-la, tornando-a real, ou mantê-la no campo imaginário.

Assim, consideramos que, com a inserção dessas duas novas funções, podemos abarcar a Geometria como um todo e não a limitar às figuras geométricas. Vale esclarecer, ainda, que a Geometria aqui estudada "está inserida no contexto escolar e, portanto, incorporada à cultura da sala de aula, em que o objetivo principal é criar significados matemáticos, contribuindo, assim, para a aprendizagem dos alunos" (Gentil, 2020, p. 33). Significa dizer que "os modos como um aluno da Educação Básica olha para a Geometria é diferente dos modos como a olha um engenheiro ou um arquiteto, por exemplo, configurando culturas visuais distintas" (Gentil, 2020, p. 33). Isso porque as figuras geométricas presentes nos LD estão diretamente atreladas ao discurso e à cultura da sala de aula, que é única.

3. Metodologia

Optamos por realizar o estudo baseado na abordagem qualitativa por entender que ela oferece subsídios para nossas investigações no sentido de compreender as funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos. Acreditamos que a descrição, característica dessa modalidade de pesquisa, favorece a análise dos dados.

Dentro da abordagem qualitativa, decidimos seguir a pesquisa documental, que, segundo Pádua (1997, p. 62), "é aquela realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não fraudados)". Appolinário (2009) define documento como sendo qualquer tipo de suporte, seja escrito, audiovisual, imagens etc., cuja informação possa servir para consulta, estudo ou prova. Nesse sentido, em nossa investigação, assumimos como documento três coleções de LD dos Anos Finais do Ensino Fundamental. São elas: Matemática Bianchini (Bianchini, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d); Matemática: Compreensão e Prática (Silveira, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d); e Projeto Teláris (Dante, 2015a, 2015b, 2015c, 2015d). Todas foram doadas por professores atuantes na rede pública de ensino, sendo esse o critério de escolha. Cada uma delas contém quatro volumes, totalizando 12 livros que fazem parte do PNLD 2017.

Para analisar essas obras e construir os dados, adotamos a postura ativa, proposta por Evangelista (2008, p. 56), em que o pesquisador "localiza, seleciona, lê, relê, sistematiza, analisa as evidências que apresenta".

Esse processo de análise foi separado em três etapas, mas, antes de detalhá-las, é importante esclarecer o que consideramos Geometria. Ainda que à época da publicação dos livros aprovados pelo PNLD 2017, material mais recente para pesquisa iniciada em 2018, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não tivesse sido homologada, ponderamos que seria mais adequado, no desenvolvimento da investigação, considerar o conjunto de aprendizagens essenciais a que os estudantes da Educação Básica devem ter acesso. Caso contrário, teríamos um estudo de 2020, e seus resultados, publicados nos anos subsequentes, amparar-se-iam em orientações muito antigas, como aquelas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Por esse motivo, optamos por delimitar os conteúdos de Geometria com base na BNCC.

Ancorada nos Anos Finais do Ensino Fundamental, a Matemática é dividida em quatro campos: Aritmética, Álgebra, Geometria e Probabilidade e Estatística. Para cada um desses campos, a BNCC apresenta uma lista de objetos de conhecimento (conteúdos) que compõe o conjunto de aprendizagens essenciais à disciplina de Matemática. Foi a partir desses objetos de conhecimento que nós demarcamos o que é Geometria e o que pertence aos outros campos. Além disso, também consideramos Geometria o que os autores dos LD chamam de representação geométrica, isto é, números reais representados por pontos na reta numérica e expressões algébricas representadas por retas no plano cartesiano.

Tendo esclarecido o que consideramos Geometria, passamos para a primeira etapa de análise dos livros, a qual consistiu em identificar os capítulos de acordo com os campos a que pertenciam, ou seja, Aritmética, Álgebra, Geometria e Probabilidade e Estatística. Na segunda etapa, criamos uma ficha catalográfica, contendo título da coleção, editora, autor, ano de publicação, número de páginas total e número de páginas por campo. Para fazer essa contagem do número de páginas, consideramos somente a parte textual[5], pois nosso interesse estava em saber qual era a porcentagem do livro destinada a cada um dos campos.

Por fim, na terceira etapa, realizamos um processo de leitura e releitura das obras, atentando-nos aos campos não-geométricos e destacando todos os trechos em que a Geometria aparecia, seja na apresentação/desenvolvimento dos conteúdos seja nas atividades para os alunos. Além disso, todas essas atividades que envolviam a Geometria foram identificadas de acordo com os objetos de conhecimento da BNCC.

4. Análise dos dados

Neste artigo, optamos por apresentar os dados, subdividindo-os em tópicos de acordo com cada campo não-geométrico, pois acreditamos que essa organização favorecerá um olhar geral, no sentido de entender como a Geometria é inserida nos outros campos da Matemática ao longo dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

4.1 Aritmética

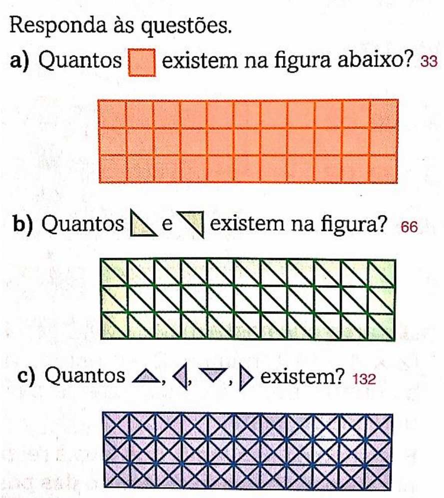
O campo Aritmética é o mais presente nos LD do 6º ano, visto que as três coleções possuem seis capítulos que o trabalham nessa etapa escolar, enquanto há apenas um nos livros do 9º ano, o que nos mostra que tal campo vai perdendo o foco.

As três obras apresentam a correspondência entre números e pontos da reta numérica, começando com os naturais, passando pelos inteiros, racionais e, por fim, pelos irracionais. Esse trabalho é feito ao longo dos quatro anos e, geralmente, é concentrado nos capítulos iniciais.

Ao tratarem sobre operações com números naturais, Dante (2015a) e Bianchini (2015a) abordam a ideia de multiplicação, relacionando a área de um retângulo com a quantidade de quadradinhos em cada uma de suas linhas e colunas. Dante (2015a) traz o exemplo de uma sala de aula em que as carteiras estão em “disposição retangular”, cujo objetivo é fazer os alunos perceberem que, ao multiplicarem a quantidade de carteiras em cada linha pela quantidade de carteiras em cada coluna, obterão como resultado a quantidade total de carteiras da sala de aula. Bianchini (2015a) ainda explora a ideia de que, quanto menor a unidade de medida, maior será a quantidade necessária para cobrir uma determinada área (Figura 1).

[5] Desconsideramos partes como sumário e referências, focando no início e fim dos capítulos.

Figura 1: Exemplo de atividade com função ilustrativa


Responda às questões.

a) Quantos existem na figura abaixo? 33

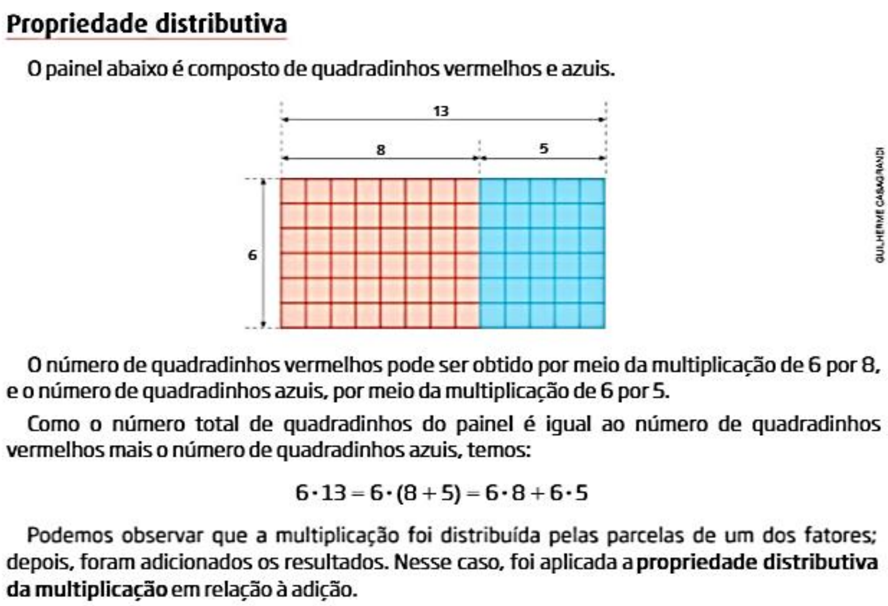
b) Quantos e existem na figura? 66

c) Quantos , , , existem? 132

Fonte: Bianchini (2015a, p. 49).

Para abordar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, os três autores utilizam a representação geométrica como uma ilustração do algoritmo e também como uma forma de justificar, revelando o caráter demonstrativo da Geometria.

Figura 2: Exemplo da Geometria com funções ilustrativa e demonstrativa


Propriedade distributiva

O painel abaixo é composto de quadradinhos vermelhos e azuis.

O número de quadradinhos vermelhos pode ser obtido por meio da multiplicação de 6 por 8, e o número de quadradinhos azuis, por meio da multiplicação de 6 por 5.

Como o número total de quadradinhos do painel é igual ao número de quadradinhos vermelhos mais o número de quadradinhos azuis, temos:

$$6 \cdot 13 = 6 \cdot (8 + 5) = 6 \cdot 8 + 6 \cdot 5$$

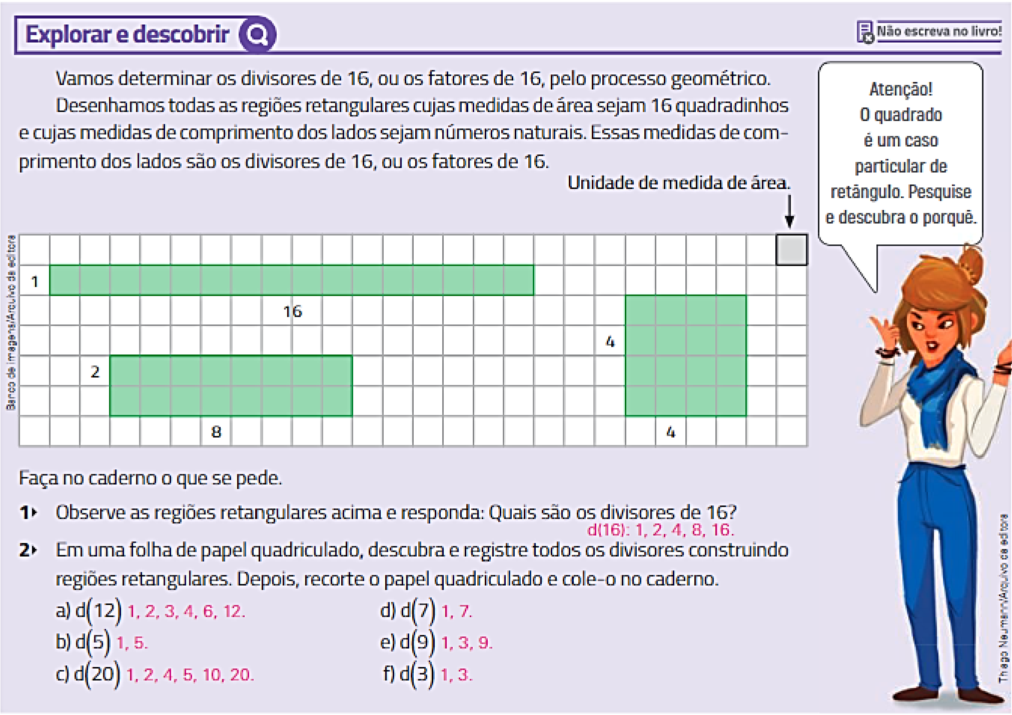
Podemos observar que a multiplicação foi distribuída pelas parcelas de um dos fatores; depois, foram adicionados os resultados. Nesse caso, foi aplicada a **propriedade distributiva da multiplicação** em relação à adição.

Fonte: Silveira (2015a, p. 56).

Ao trabalhar o tema divisibilidade, Dante (2015a) apresenta um método geométrico para encontrar os divisores de um número natural. Tal método consiste em desenhar, em uma malha quadriculada, todas as regiões retangulares que tenham área *a*, e as medidas de comprimento dessas regiões retangulares são os divisores de *a*. Para introduzir números primos, o autor retoma esse método, mostrando que alguns números só podem ser representados por uma única região retangular, portanto, possuem como divisores o um e eles mesmos, sendo chamados de números primos. Vale ressaltar que esse método não foi encontrado em nenhum dos outros dois livros.

Além disso, essa tarefa propõe um método prático para encontrar divisores de um número natural e, desse modo, a Geometria aqui presente foi classificada como tendo função formativa.

Figura 3: Exemplo de uma atividade com função formativa

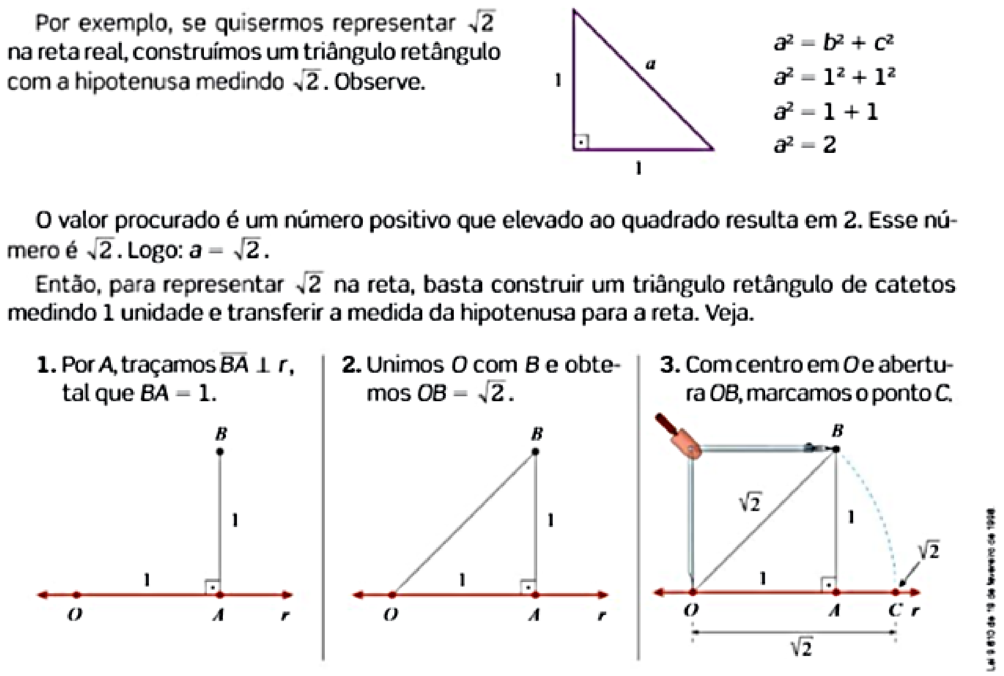


Fonte: Dante (2015a, p. 130).

A Geometria também tem presença marcante em capítulos que abordam números irracionais. Dante (2015c) introduz o número π por meio do comprimento e do diâmetro da circunferência. Silveira (2015c), por sua vez, usa um quadrado de área 2 cm^2 para apresentar o número $\sqrt{2}$ como sendo a medida do lado desse quadrado. Entretanto, ambos os autores acabam propondo tarefas com números racionais, fazendo com que o foco do capítulo seja perdido ao reduzirem números irracionais a racionais.

Já Bianchini (2015c) opta por incorporar o tema dos números irracionais usando o Teorema de Pitágoras, com destaque para o triângulo retângulo isósceles. Ele apresenta também uma justificativa para o referido teorema, evidenciando que, ao decompor as regiões quadradas construídas sobre os catetos, sempre é possível formar uma região quadrada sobre a hipotenusa. O autor ainda afirma que os números reais preenchem toda a reta e mostra como representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica por meio de um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1.

Figura 4: Exemplo que ilustra a função formativa


Por exemplo, se quisermos representar $\sqrt{2}$ na reta real, construímos um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo $\sqrt{2}$. Observe.

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 1^2 + 1^2$
$a^2 = 1 + 1$
$a^2 = 2$

O valor procurado é um número positivo que elevado ao quadrado resulta em 2. Esse número é $\sqrt{2}$. Logo: $a = \sqrt{2}$.

Então, para representar $\sqrt{2}$ na reta, basta construir um triângulo retângulo de catetos medindo 1 unidade e transferir a medida da hipotenusa para a reta. Veja.

1. Por A, traçamos $\overline{BA} \perp r$, tal que $BA = 1$.

2. Unimos O com B e obtemos $OB = \sqrt{2}$.

3. Com centro em O e abertura OB, marcamos o ponto C.

Fonte: Bianchini (2015c, p. 55).

Ao trabalhar os números irracionais juntamente com o Teorema de Pitágoras, Bianchini (2015c) oferece aos alunos um discurso visual mais amplo se comparado ao dos outros dois livros, no sentido de não reduzir os irracionais aos racionais.

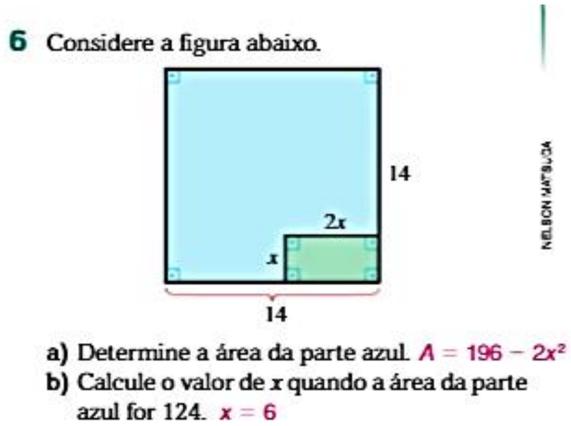
Outro conteúdo que merece destaque são os números decimais. Constatamos que os três autores se valem exatamente da mesma abordagem para inseri-los, qual seja o material dourado. Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, os alunos utilizam-no muito para representar unidade, dezena, centena e unidade de milhar. Agora, nos Anos Finais, esse material é usado para representar décimos, centésimos e milésimos. Dessa forma, acreditamos que o emprego desse material se tornou prática visual na sala de aula, e, ainda, que os autores consideram a memória visual dos estudantes ao recorrerem a ele ao longo de todo o Ensino Fundamental.

4.2 Álgebra

A Álgebra começa a ser trabalhada com mais afinco a partir do 7º ano e vai ganhando mais espaço nos anos seguintes em função da diminuição de capítulos que versam sobre o campo Aritmética. É comum, nas três coleções, tarefas que relacionam área e perímetro de figuras geométricas a expressões algébricas ou equações, sejam elas do primeiro ou do segundo grau. A figura abaixo é um exemplo desse tipo de tarefa, em que a Geometria tem função ilustrativa, já que a imagem é inserida como um apoio para que os alunos resolvam o problema.

RIPEM
International Journal for Research in Mathematics Education

Figura 5: Exemplo de uma atividade cuja função da Geometria é ilustrativa

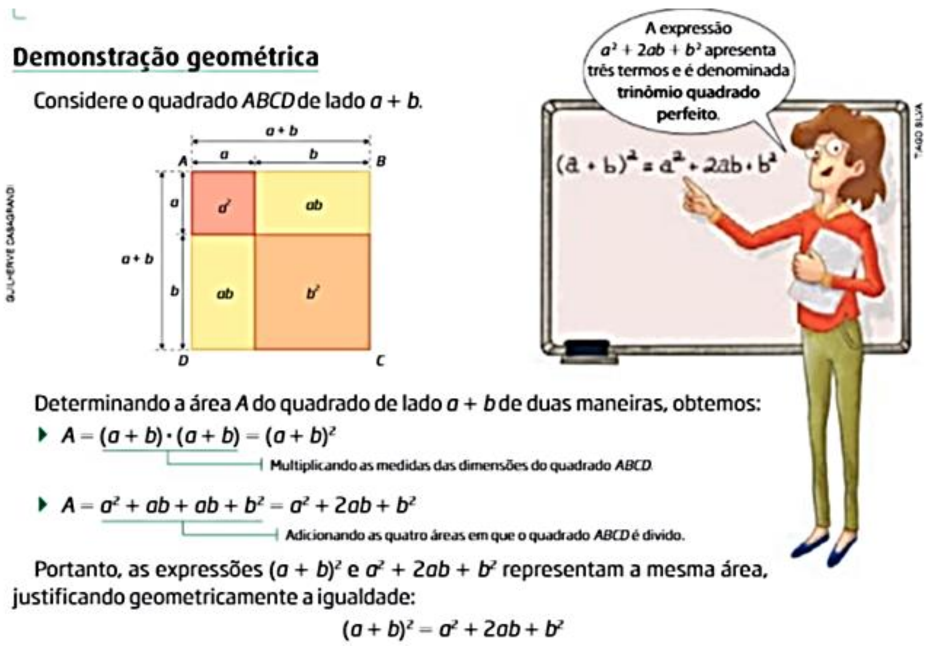


Fonte: Bianchini (2015d, p. 110).

Por aparecer com certa frequência em LD do 7º ao 9º ano, conjecturamos que simbolizar a área ou o perímetro de figuras geométricas por meio de expressões algébricas faça parte da cultura visual da sala de aula.

Entretanto, nos últimos capítulos dos LD destinados ao 8º ano, encontramos diversas tarefas que não apresentam nenhuma imagem. Esse cenário se repete nos livros didáticos do 9º ano, nos quais as figuras geométricas começam a dar lugar ao rigor algébrico e os alunos devem desenvolver a habilidade de transformar a linguagem corrente em linguagem matemática.

Figura 6: Prova visual da igualdade $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$



Fonte: Silveira (2015c, p. 74).

O conteúdo de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas também é abordado da mesma forma pelos três autores, qual seja com foco nas representações geométricas dos três tipos de sistema. O sistema possível e determinado é apresentado como aquele cujas retas se interceptam em apenas um ponto: na solução do sistema. Já o sistema impossível é mostrado como aquele cujas retas são paralelas, portanto, não tem solução. Por fim, o sistema possível e indeterminado é exposto como aquele cujas retas são coincidentes, logo, possui infinitas soluções. Nesse caso, a Geometria tem função representativa e destacamos a importância do pensar geométrico sobre um sistema de equações para que os alunos visualizem o comportamento dele, podendo ajudá-los na compreensão dos três tipos de solução passíveis de serem encontradas.

Figura 7: Exemplo da Geometria com função representativa

Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Podemos obter a solução de um sistema a partir da representação gráfica das soluções das equações (retas) que o compõe. Veja os exemplos a seguir.

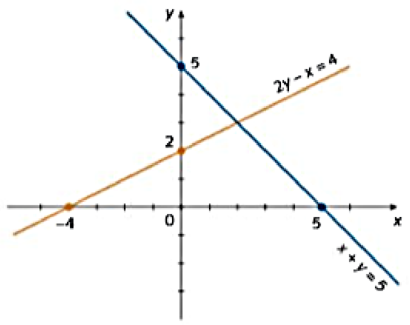
- Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

Para obter graficamente a solução desse sistema, inicialmente vamos determinar a reta que representa a solução de cada uma das equações.

Para traçar uma reta, basta conhecer dois pontos distintos dela. Assim, atribuindo valores para x e determinando os valores correspondentes de y em cada equação, obtemos as coordenadas dos pontos que permitirão traçar duas retas. Cada uma dessas retas representa as soluções de uma equação.

$x + y = 5$		
x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)

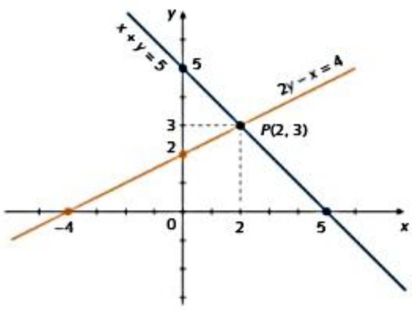
$2y - x = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
−4	0	(−4, 0)



GUILHERME CASAGRANDI

As coordenadas do ponto de encontro das retas formam o par ordenado que é a solução do sistema. Nem sempre é possível obter essas coordenadas com precisão, mas podemos alcançar boas aproximações delas e depois verificá-las, substituindo-as nas equações.

Para obter as coordenadas do ponto de encontro, traçamos, por ele, retas perpendiculares aos eixos.



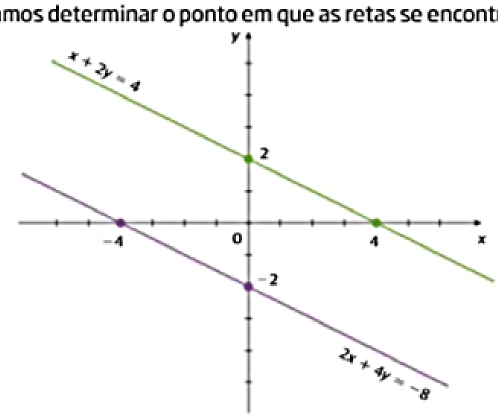
Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado (2, 3) é a **única** solução do sistema. Assim, dizemos que o sistema é **possível e determinado**, pois tem **uma única solução**.

- Vamos resolver, agora, o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = -8 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações. Em seguida, procuramos determinar o ponto em que as retas se encontram.

$x + 2y = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
4	0	(4, 0)

$2x + 4y = -8$		
x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-4	0	$(-4, 0)$



Observamos que as retas são paralelas, ou seja, não têm ponto comum. Logo, não é possível encontrar o par ordenado (x, y), que corresponde à solução do sistema.

Assim, o sistema é **impossível**, pois **não tem solução**.

Veja a resolução do sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \cdot (-2) \\ 2x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x - 4y = -8 \\ +2x + 4y = -8 \\ \hline 0x + 0y = -16 \end{array}$$

Na igualdade $0x + 0y = -16$ obtida, temos uma sentença falsa, pois para quaisquer valores dados a x e a y multiplicados por zero resultam em zero, e não em -16.

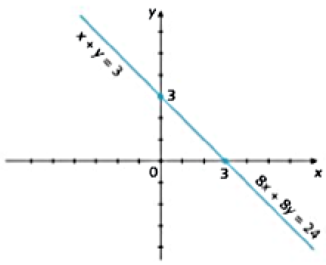
Portanto, o sistema é impossível, como já tínhamos visto na solução gráfica.

- Vamos determinar a solução do sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$

  Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações. Em seguida, procuramos determinar os pontos de encontro das retas.

$x + y = 3$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$8x + 8y = 24$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)



ADILSON SECCO

Observamos que as retas são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos comuns. Assim, o sistema é **possível e indeterminado**, pois tem **infinitas soluções**. Para obter qualquer uma dessas infinitas soluções, basta, em uma das equações, atribuir um valor para uma das incógnitas e calcular o valor correspondente da outra.

Veja essa resolução algébrica:

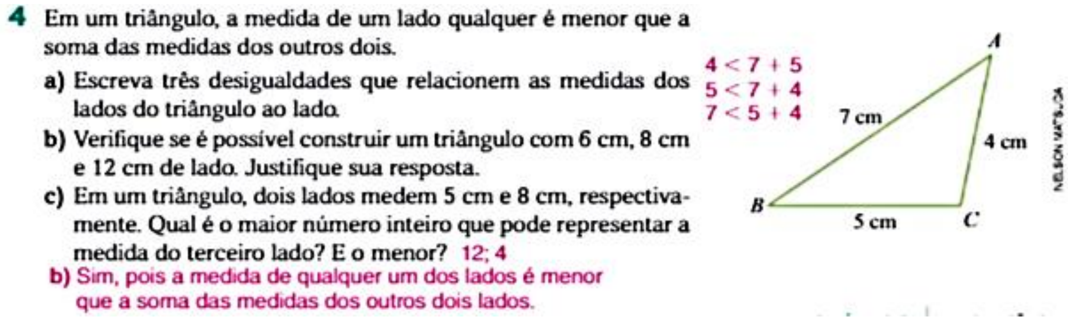
$$\begin{cases} x + y = 3 \cdot 8 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 8y = 24 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$$

Como podemos observar, as equações são idênticas, o que justifica as retas do plano cartesiano serem coincidentes. Isso equivale a termos apenas uma equação, mas com duas incógnitas, gerando infinitas soluções.

Fonte: Silveira (2015c, p.175-176).

Bianchini (2015c) apresenta uma abordagem diferente para trabalhar o conteúdo de inequações. Isso porque, enquanto os outros dois autores se restringem à Álgebra, Bianchini (2015c) opta por representar a condição de existência dos triângulos por meio de desigualdades.

Figura 8: Exemplo de uma atividade com função ilustrativa


4 Em um triângulo, a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros dois.

a) Escreva três desigualdades que relacionem as medidas dos lados do triângulo ao lado. $4 < 7 + 5$; $5 < 7 + 4$; $7 < 5 + 4$

b) Verifique se é possível construir um triângulo com 6 cm, 8 cm e 12 cm de lado. Justifique sua resposta.

c) Em um triângulo, dois lados medem 5 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é o maior número inteiro que pode representar a medida do terceiro lado? E o menor? 12; 4

b) Sim, pois a medida de qualquer um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

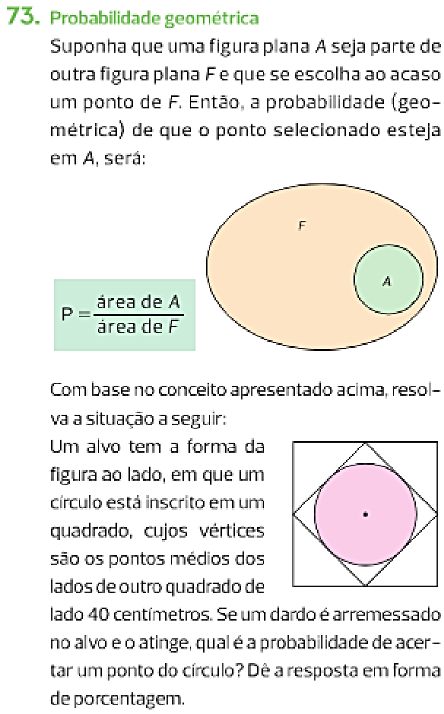
Fonte: Bianchini (2015b, p. 132).

Cabe observar que o próprio enunciado da questão informa que a condição de existência de um triângulo é que um lado qualquer seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados e, a partir dessa informação, os alunos devem verificar se é possível construir alguns triângulos. Nesse caso, a Geometria tem função ilustrativa, pois torna visível uma propriedade algébrica.

4.3 Probabilidade e Estatística

O campo Probabilidade e Estatística é o que menos aparece nas coleções, sendo que alguns volumes não possuem nem mesmo um capítulo inteiramente destinado a ele. Encontramos apenas duas tarefas que articulam a Geometria com a Probabilidade e, nelas, a Geometria tem função ilustrativa.

Figura 9: Atividade com função ilustrativa


73. Probabilidade geométrica

Suponha que uma figura plana *A* seja parte de outra figura plana *F* e que se escolha ao acaso um ponto de *F*. Então, a probabilidade (geométrica) de que o ponto selecionado esteja em *A*, será:

$$P = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } F}$$

Com base no conceito apresentado acima, resolva a situação a seguir:

Um alvo tem a forma da figura ao lado, em que um círculo está inscrito em um quadrado, cujos vértices são os pontos médios dos lados de outro quadrado de lado 40 centímetros. Se um dardo é arremessado no alvo e o atinge, qual é a probabilidade de acertar um ponto do círculo? Dê a resposta em forma de porcentagem.

Fonte: Dante (2015d, p. 365).

A atividade acima trabalha a probabilidade geométrica e foi recortada de Dante (2015d), porém, Bianchini (2015d) propõe também uma tarefa seguindo esse mesmo modelo. Já Silveira (2015d) não faz articulação da Geometria com a Probabilidade e Estatística.

Consideramos importante introduzir mais figuras geométricas no estudo da Probabilidade e Estatística, justamente para proporcionar o ensino intradisciplinar e criar um elo entre esses dois campos. Ademais, encontramos muitos exemplos e tarefas que utilizam dados ou moedas para trabalhar conceitos probabilísticos e, nesse sentido, inserir a probabilidade geométrica traria mais diversidade ao assunto.

Por fim, cabe observar que, em diversos momentos, a Geometria é introduzida em uma tentativa de facilitar o ensino de alguns conceitos abstratos, ilustrando-os por meio de figuras geométricas. Com isso, acreditamos que tais figuras compõem o discurso visual presente na sala de aula. Isso porque, ao serem utilizadas com um objetivo especifico, visando à aprendizagem dos alunos, revela-se seu caráter cultural, pois os modos como um estudante da Educação Básica olha a Geometria se configuram como uma cultura visual singular, própria do contexto educacional. Nesse contexto, reforçamos a ideia de visualidade e o caráter histórico-cultural da Geometria.

5. Considerações finais

Trouxemos, nesse artigo, resultados de uma pesquisa guiada pela seguinte pergunta diretriz: Quais funções a Geometria assume em campos não-geométricos nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental? Para discuti-la, embasamo-nos na análise de três coleções aprovadas pelo PNLD 2017, focando os objetos do conhecimento em cada capítulo não-geométrico e ponderando suas relações com o campo da Geometria.

Ao analisar o campo Aritmética, constatamos que a Geometria permeia todo o conteúdo de números e operações, principalmente quando são abordados os números irracionais. Ainda que os três autores tenham usado diferentes metodologias de ensino para esse conteúdo, foi possível perceber a tendência de inserir figuras geométricas para representar números irracionais. Quanto aos números racionais, supomos que representá-los por meio do material dourado faça parte da cultura visual da sala de aula, além de entendermos que, ao fazê-lo, os autores de LD consideram a memória visual dos alunos, dado que tal material é muito utilizado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Com relação ao campo Álgebra, a Geometria tem presença marcante nas expressões algébricas, uma vez que os três autores trabalham com representação de área e perímetro por meio dessas expressões. O trinômio quadrado perfeito também merece destaque, já que todos os escritores trazem uma prova visual para a igualdade $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Por fim, a representação geométrica dos três tipos de sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas também aparece nas três coleções, com abordagens muito similares. Considerando esses resultados, pudemos concluir que a presença de figuras geométricas para representar os conceitos algébricos mencionados faz parte da cultura visual da sala de aula.

Já o campo Probabilidade e Estatística é o que menos faz articulação com a Geometria, posto que encontramos somente duas tarefas, em coleções distintas, abordando a probabilidade geométrica. Portanto, não identificamos figuras geométricas como práticas visuais nesse campo.

Quanto às funções que a Geometria assume, constatamos que a ilustrativa é a mais recorrente, principalmente para reforçar o discurso matemático ou ilustrar algum conceito. A função representativa também aparece com certa frequência, dado que todos os autores retomam a representação de números por pontos na reta numérica nos quatro volumes, bem como a representação geométrica das soluções de um sistema de equações com duas incógnitas. A função formativa é encontrada em atividades práticas, especialmente naquelas que utilizam desenho geométrico e, por fim, as funções explicativa e demonstrativa são as que menos aparecem.

Com relação à formação de imagem mental, percebemos que ela é mais recorrente em conteúdos algébricos. Dessa forma, conjecturamos a existência de um fenômeno que chamamos de “desgeometrização”, em que as figuras geométricas começam a dar lugar ao rigor algébrico. Ao comparar um livro do 7º ano com um livro do 9º ano, por exemplo, vemos que esse último apresenta uma quantidade menor de figuras geométricas. Ponderamos que tal fenômeno acontece para que o foco seja o formalismo simbólico.

Concluímos, então, que a Geometria é articulada aos outros campos da Matemática com o objetivo de favorecer a compreensão de conceitos abstratos, visando à aprendizagem dos alunos e tendo como suporte as figuras geométricas que compõem o discurso visual da sala de aula.

6. Referências

Appolinário, F. (2009). *Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico*. São Paulo: Atlas.

Batista, A. A. G. (Ed.). (2002). *Recomendações para uma política pública de livros didáticos*. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental.

Bianchini, E. (2015a). *Matemática Bianchini 6º ano* (8ª ed.). São Paulo: Moderna.

Bianchini, E. (2015b). *Matemática Bianchini 7º ano* (8ª ed.). São Paulo: Moderna.

Bianchini, E. (2015c). *Matemática Bianchini 8º ano* (8ª ed.). São Paulo: Moderna.

Bianchini, E. (2015d). *Matemática Bianchini 9º ano* (8ª ed.). São Paulo: Moderna.

Brasil. (2018). *Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas e literárias para o Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2020*. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.

Brigo, J. (2010). *As figuras geométricas no ensino de Matemática: uma análise histórica nos livros didáticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina em Florianópolis, Brasil.

Cassiano, C. C. F. (2007). *O mercado do livro didático no Brasil: da criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) à entrada do capital internacional espanhol (1985-2007)*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em São Paulo, Brasil.

Dante, L. R. (2015a). *Projeto Teláris-Matemática 6º ano* (2ª ed.). São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2015b). *Projeto Teláris-Matemática 7º ano* (2ª ed.). São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2015c). *Projeto Teláris-Matemática 8º ano* (2ª ed.). São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2015d). *Projeto Teláris-Matemática 9º ano* (2ª ed.). São Paulo: Ática.

Evangelista, O. (2008). Apontamentos para o trabalho com documentos de política educacional [Versão Eletrônica]. *Políticas Públicas e Educação - 2019*. Acesso em 08 de novembro de 2021 de https://gtfhufrgs.files.wordpress.com/2018/05/olinda_como-analisar-documentos.doc.

Flores-Bolda, C. R. (1997). *Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina em Florianópolis, Brasil.

Flores, C. R. (2010). Cultura visual, visualidade, visualização matemática. *Zetetiké*, 18(número temático), 271-293.

Flores, C. R. (2013). Visualidade e visualização matemática: novas fronteiras para a Educação Matemática. In C. R. Flores & S. Cassiani (Eds.), *Tendências contemporâneas nas pesquisas em Educação Matemática e Científica: sobre linguagens e práticas culturais* (pp. 91-104). Campinas: Mercado de Letras.

Gentil, L. A. (2020). *As funções da geometria em outros campos da matemática: uma análise de livros didáticos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" em Rio Claro, Brasil.

Guimarães, G. et al. (2007). Livros didáticos de Matemática nas séries iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas [Anais]. In Encontro Nacional de Educação Matemática, *Anais*, IX Encontro Nacional de Educação Matemática (p. 1-17). Belo Horizonte, Brasil : UNI-BH.

Knauss, P. (2006). O desafio de fazer História com imagens: arte e cultura visual. *ArtCultura*, 8(12), 97-115.

Mazzi, L. C. (2018). *As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do Ensino Médio: um foco nos capítulos de Geometria*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas em Campinas, Brasil.

Pádua, E. M. M. (1997). *Metodologia da pesquisa: abordagem teórico-prática* (2ª ed.). Campinas: Papiros.

Schollhammer, K. E. (2002). Regimes representativos da modernidade. *Légua e meia: revista de literatura e diversidade cultural*, 1(2), 20-34.

Sérvio, P. P. P. (2014). O que estudam os estudos de cultura visual? *Revista Digital do LAV*, 7(2), 196-215.

Silveira, E. (2015a). *Matemática: Compreensão e Prática 6º ano* (3ª ed.). São Paulo: Moderna.

Silveira, E. (2015b). *Matemática: Compreensão e Prática 7º ano* (3ª ed.). São Paulo: Moderna.

Silveira, E. (2015c). *Matemática: Compreensão e Prática 8º ano* (3ª ed.). São Paulo: Moderna.

Silveira, E. (2015d). *Matemática: Compreensão e Prática 9º ano* (3ª ed.). São Paulo: Moderna.

Silva, M. C. L., & Valente, W. R. (2014). *A geometria nos primeiros anos escolares: história e perspectivas atuais*. Campinas: Papirus.

Valente, W. R. (2008). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *Zetetiké*, 16(30), 139-162.