triángulo elevadas al cuadrado es igual a la longitud del tercer lado elevada al cuadrado." Esta sería una relación aritmética pitagórica, ya no entre ternas de números de la aritmética natural, sino de la aritmética de los números reales positivos (o en la de los números algebraicos reales y positivos).

No toda terna de números reales positivos la cumple, pero si el tercer número de la terna es la raíz cuadrada de la suma de los dos primeros, esa terna sí la cumplirá. El hecho de que esa terna siempre defina las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo es lo que liga la relación aritmética pitagórica con la relación geométrica pitagórica particular; por ello, amerita la demostración de un teorema específico al respecto.

Se destacan tres sentidos para la relación pitagórica (RP) privilegiando para ello el componente **contenido** del sentido, de ahí que se hable de sentido aritmético, sentido geométrico, y sentido aritmo-geométrico. Cada uno de estos sentidos será objeto de profundización en el desarrollo del taller.

Bibliografía

HEATH, T. L., (1956). The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, New York: Dover.

LEON, O.L. (2005). La formulación de la relación pitagórica: El contexto euclidiano y la estructura multiregistro. En: "La experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría". Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle, Doctorado en Educación.

MAC LANE, S. (1986). Mathematics form and function. New York: Springer-Verlag.

VERGNAUD, G (1995). El niño las matemáticas y la realidad. México: Trillas.

VASCO, C. E. (2005). Notas Seminario Doctoral. Bogotá: Universidad Distrital.

Aspectos históricos y psicológicos de la multiplicación[1]

LUIS ORIOL MORA V.
JAIME HUMBERTO ROMERO C.
PEDRO JAVIER ROJAS G.
JORGE RODRÍGUEZ B.
EUGENIA CASTILLO E.
MARTHA BONILLA E.
NEILA SÁNCHEZ H

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Introducción

En este taller, a partir de un acercamiento histórico a la multiplicación en las culturas egipcia, mesopotámica y griega, se presenta algunas evidencias de procedimientos matemáticos desde los que puede ser comprendida la complejidad de la multiplicación. Por otra parte, acudiendo a la teoría de la intuición (Fischbein, 1987) y de los modelos intuitivos (Fischbein et al., 1985) se muestra cómo una enseñanza de la multiplicación que la restrinja a suma reiterada, por lo tanto reducida sólo a la matematización de grupos iguales; a la memorización, generalmente asociada a una generalización de uno más, de las tablas de multiplicar; y al uso de sus algoritmos de cálculo, hoy canónicos, desestimula el aprendizaje e impide el desarrollo del pensamiento matemático complejo en los niños.

Aspectos históricos

En algunos libros de historia de las matemáticas (Boyer, 1992; Klein, 1992), la información acerca de las matemáticas en las culturas egipcia, mesopotámica y griega es organizada de manera similar. Realizan, grosso modo, una ubicación geográfica de la cultura en mención, describen relaciones socio-políticas de cada una de ellas, comentan las fuentes documentales de que disponían, y presentan la matemática, más o menos, en el siguiente orden: sistemas de numeración, operaciones aritméticas, problemas algebraicos, problemas geométricos.

Las culturas mesopotámica y griega tenían sistemas de numeración básicos y posicionales, y algoritmos para cálculos en lo multiplicativo. En general, salvo de la matemática egipcia, en los textos no se encuentra información sobre técnicas de cálculo en lo aditivo. Sin embargo, por el gran desarrollo de bases y algoritmos, se intuye que estas culturas crearon métodos rápidos para sumar. Cada una de estas culturas generó procesos propios para

[1]Este trabajo ha sido producido por los autores en el marco de la investigación "Pensamiento Multiplicativo: Una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula" financiada por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, COLCIENCIAS y el IDEP.

multiplicar, dividir y extraer raíces. En general, los procesos matemáticos referidos tienen características que permiten definir "líneas de pensamiento" particulares.

En la egipcia, resalta una, que también es vista como su técnica de cálculo, basada en duplicaciones y mediaciones. Aunque su sistema de numeración fue decimal, con ella desarrollaron el sistema binario. Sus algoritmos para multiplicar y dividir están compuestos por procesos o algoritmos para duplicar, mediar, sumar y restar.

En la mesopotámica, además de su conocida numeración sexagesimal posicional, destacan manifestaciones de una particular forma de pensar, que hace uso reiterado de la media aritmética para procesos de acotación y cálculo, de tal manera que la vuelve técnica de aproximación. La técnica involucra un análisis (al menos implícito) de procesos geométricos, que se manifiesta en la estimación de raíces de números y en la consecusión de soluciones de relaciones aditivas entre la «cosa», su cuadrado y una cantidad; involucra además, procesos secuenciales que convergen rápidamente. Por otra parte, de acuerdo con los problemas planteados, en esta técnica se manifiesta el conocimiento y uso reiterado del concepto que «entre los rectángulos de igual perímetro el de mayor área es el cuadrado».

Sobre la griega. El desarrollo del concepto de *razón*, unido al de *proporción* y *orden* (lineal), manifiesta una de sus formas de pensar, de ver y de expresar el mundo de las matemáticas, con la que operan, predicen y calculan, y que parece extenderse sobre la conformación de otros aspectos de su organización social.

Aquellos conceptos son su expresión matemática y su forma de matematizar. La razón áurea, los cálculos de áreas, volúmenes, las relaciones trigonométricas, las leyes físicas propuestas por Arquímedes, los desarrollos de las cónicas, el tratamiento de los inconmensurables, etc., son objetos producidos a través del uso coherente y sistemático de ellos. El inmenso trabajo de Arquímedes para demostrar que hay razón, entre el volumen de un grano de arena y el volumen del universo, y que esta «arquimedianidad» es posible expresarla como multiplicidad de unos, obteniendo un número que cuenta los granos de arena que podrían llenar el universo de Aristarco, son una muestra de su importancia. En nuestra opinión, el desarrollo de la teoría general de *razones* y *proporciones* es el mayor legado que el pensamiento matemático griego ha dejado a la comunidad matemática posterior.

El producto de segmentos, que como cambio de dimensión de cierta manera se observa en los problemas cuadráticos de los mesopotámicos, los griegos lo extienden, sistematizan, generalizan y al parecer[2] crean el producto de *razones* expresado como razón compuesta; su vínculo con las medias aritméticas, geométricas y armónica potencian las ideas egipcias y mesopotámicas de medios, duplos e iteraciones. El modo egipcio de pensar es asumido, y sintetizado, en las nociones comunes propuestas por Euclides en los Elementos.

Durante el desarrollo de este taller se propone trabajos específicos para provocar reflexiones en torno a las relaciones y afirmaciones antes mencionadas.

Aspectos sicológicos

*Los modelos intuitivos de Fischbein: "La multiplicación agranda" **(MA)** y "La división achica" **(DA)**.* Además de los aspectos estructurales de estos modelos, conviene ubicar sus aspectos funcionales dentro de una teoría general que intenta explicar ciertos rasgos de comportamiento cognoscitivo humano. Siguiendo aquí a Mora y Romero (2004) se enfoca claves del marco teórico propuesto por Efraim Fischbein (1987) sobre la problemática de la intuición. Luego, la atención recae en los modelos intuitivos, y particulariza en MA y DA (MADA).

1. La humana, una estructura escindida: El ser humano en tanto constructor de mundo desde el lenguaje, debe enfrentarse a un mundo del que es consciente que le es previo y del que él mismo hace parte. Este doble papel que el ser humano ha jugado, ha ocasionado "una brecha en esta estructura naturalmente unitaria: cognición y comportamiento" (p. 7). Además es consciente que puede conocer y de la falibilidad de lo que conoce, pero al mismo tiempo es consciente que debe tomar decisiones para actuar en ese mundo previo; "[…] como un efecto de formas indirectas (conceptuales) de conocimiento, la incertidumbre llega a ser una presencia habitual en nuestro proceso de toma de decisiones".

[2]Aunque parece que era conocido por los egipcios y fue llevado a Grecia por Thales de Mileto. Por esto, una versión de este producto hoy se llama teorema de Thales.

2. Insuficiencia de la coherencia interna: Una forma de construir certeza estriba en el rigor y la coherencia de los sistemas formales de conocimiento "[…] que puede tener o no alguna relevancia práctica. La que la lógica ofrece no es una certeza absoluta, valorable prácticamente sino *una forma convencional de aceptación*" (p. 7).
3. La intuición como respuesta al sentimiento de necesidad de certeza absoluta. Frente a la ausencia de certeza prácticamente significativa por el camino del conocimiento lógico, acudimos a creer que en realidad la hemos alcanzado: "Es esa necesidad absoluta la que histórica y sicológicamente ha formado este tipo particular de procesamiento de información. Datos disparatados o incompletos se aglutinan ellos mismos [···] en estructuras intrínsecamente creíbles, aparentemente coherentes, consistentes y compactas" (p. 7).
4. Intuición y actuación intelectual productiva. La función principal de la intuición es dotar con la misma evidencia intrínseca y certeza comportamentalmente significativa a nuestros razonamientos y conocimiento conceptual, que la que la percepción le confiere a nuestro conocimiento del mundo que denominamos real: "[…] uno tiende a creer en la absolutez del concepto, uno tiende a conferir sobre esta noción, basada en convenciones, la absolutez de un hecho dado, objetivamente existente. *En nuestra terminología, esto significa conferir* intuitividad *al concepto*" (p. 21).
5. Experiencia e intuición. Una intuición es un esquema (en el sentido piagetiano), una forma de cognición (cognición intuitiva) que sobrepasa las informaciones a mano, "[…] es una teoría, un sistema de creencias, de expectativas aparentemente autónomas[3]" (p. 88). Como "[…] la fuente básica de las cogniciones intuitivas es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente estables [···] existen tres aspectos principales de la experiencia en la conformación de la intuición: a) Los elementos comunes, generales de la experiencia humana. b) Los elementos de la experiencia relativos al entorno geográfico y cultural en los que vive una persona. c) La práctica particular de los individuos relativa a dominios de sus vidas" (p. 85).
6. El papel de los modelos intuitivos en la configuración de la experiencia. "Cuando una persona tiene que tratar con una noción que es intuitivamente inaceptable, tiende a producir [···] sustitutos intuitivamente más aceptables de esa noción. Tales sustitutos son comúnmente llamados modelos intuitivos" (p. 121).
7. "Un modelo intuitivo es, por su propia naturaleza, de clase sensorial. Puede ser percibido, representado o manipulado, como cualquier otra realidad concreta" (p. 121), aunque no necesariamente es un reflejo directo de esa realidad -un gráfico cartesiano es un modelo intuitivo de su función, el modelo planetario lo es del átomo-.
8. Tipos de modelos intuitivos. Para los propósitos de este escrito, se usa tres tipos de criterio para clasificarlos: según aspectos estructurales expresados en la función de objetivación -intraestructurales (paradigmáticos) o interestructurales (analógicos)-; aspectos intencionales expresados en la función de objetivación -inconscientes (tácitos) y conscientes (explícitos)-; según orden de generación en el tiempo -primitivos, secundarios (p. 142-143).

Modelos primitivos. Los modelos primigenios, construidos en la confrontación de situaciones iniciales y sostenidos por el uso durante largos periodos de tiempo y adecuados a cogniciones infantiles, son depositarios del efecto primacía:

> "…refleja el fenómeno de congelamiento epistémico por el que la persona cesa, en algún punto, de generar hipótesis y de aceptar una proposición dada actualmente plausible como cierta. El congelamiento epistémico es una característica inevitable del proceso de enjuiciamiento en razón del carácter potencialmente interminable de la generación de cognición. La secuencia epistémica debe parar en algún punto, a menos que el individuo esté desposeído de todo conocimiento cristalizado necesario para tomar una decisión y actuar" (Kruglansky y Ajzen, 1983, p.23).

El papel de los modelos intuitivos en el aprendizaje. Si los modelos intuitivos tácitos y primitivos están ligados a la comprensión de situaciones y objetos que tienen preferiblemente ocurrencia escolar -como ocurre con aquéllas y aquéllos que tienen que ver con la multiplicación y la división- se sigue que tales modelos están distribuidos socialmente, que los currículos y textos los promueven y grupos de personas los usan de manera exitosa y habitual.

Tabla 1. *Ubicación de los modelos MADA*

Modelos intuitivos		**Aspectos sistémicos**	
Aspectos intencionales		Paradigmático	Analógicos
	Tácitos	MA, DA	
	Explícitos		

[3]De las condiciones que permitieron su generación.

La tacitud del modelo MADA no reduce su funcionamiento pragmático. Al contrario, éste trabaja como una teoría para organizar y enfrentar problemas de división y multiplicación como lo establecieron Fischbein, Deri, Nelo y Marino (1985). Ellos hallaron que la clase de la que los estudiantes generaron, generalizaron y desde la que luego trasladaron sus reglas a las nuevas situaciones enunciadas, era formada por situaciones de grupos iguales y sumandos iguales. La concepción de multiplicación y división que los estudiantes se formaron era consistente con la de suma repetida y sustraendo repetido, respectivamente. Estas concepciones llevan aparejada la conformación de una teoría implícita, de uso mediante la aplicación de reglas obtenidas y formadas tácitamente con el uso prolongado y frecuente, sobre la clase de situaciones arriba aludida.

Tabla 2. Reglas intuitivas asociadas con los tres modelos de Fischbein

Operación	Reglas intuitivas	
Multiplicación	El multiplicador debe ser un número entero	
	La **M**ultiplicación **A**granda	**MA**
División partitiva	El divisor debe ser un número entero	
	El divisor debe ser más pequeño que el dividendo	
	La **D**ivisión **A**chica	**DA**
División cuotitiva	El divisor debe ser más pequeño que el dividendo	

Referencias Bibliográficas

KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

BOYER, C. (1992). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

EUCLIDES (2000). *Elementos.* (María Puertas, trad.) Madrid: Credos.

FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in Science and mathematics. An educational approach. *Dordrecht: Reidel.*

FISCHBEIN, DERI, NELLO and MARINO (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *In: Journal for Research in Mathematics Education. 16 (1) pp 3-17. Citado por Harel et al. (1994).*

GUILLINGS, R. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs.* Mineola: Dover.

HAREL, BEHR, POST and LESH (1994). *The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further considerations.* In: Harel and Confrey (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of matematics. New York: State University of New York. pp. 363-384.

KRUGLANSKY, A & AJZEN, I. (1983). Bias and error in human judgment. *In: European Journal of Social Psychology. Feb. 1-43.*

MORA, O. y ROMERO, J. (2004). ¿Multiplicación y división " o" cambio de unidad? *En: Memorias del Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá: ASOCOLME. pp.13-20*

¿Por qué problematizar la evaluación en la clase de matemáticas?

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

RODOLFO VERGEL CAUSADO[1]

Introducción

En la actualidad se reconoce la confusión que viven los docentes frente a la práctica de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas, entre muchos factores, debido a que se ha tomado de manera instrumental y en consecuencia no se problematiza, máxime si se acepta que dicha práctica guarda estrecha relación con la manera como se organizan los contenidos relativos a un concepto matemático.

El taller se inspira en los estudios e investigaciones que la comunidad de educadores matemáticos ha venido desarrollando en relación con la evaluación de las matemáticas en el aula, trabajos que ponen el acento en la evaluación como un enfoque de regulación y monitoreo del aprendizaje. En esta dirección, la evaluación en matemáticas se concibe en la intersección del contenido matemático, la práctica de la enseñanza y el aprendizaje (Romberg y Kilpatrick, citados por García, 2003), por lo que se puede afirmar que ésta se incardina en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En las siguientes líneas se describe el objetivo del taller y el nivel educativo en el que se quiere generar la reflexión, se plantea los fundamentos teóricos desde donde se pretende sustentar el espíritu del taller, la metodología que incorpora algunas actividades a desarrollar con los profesores participantes y finalmente algunas referencias bibliográficas básicas.

[1]Profesor asociado del grupo de Didáctica de las Matemáticas del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá.