# O TEOREMA DE PITÁGORAS EM LIVROS DIDÁTICOS

MARIA ÂNGELA MIORIM*

*"A geometria tem dois tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa."*

Kepler

## INTRODUÇÃO

*Este artigo apresenta algumas demonstrações do teorema de Pitágoras utilizadas por livros didáticos de momentos significativos da história da educação matemática brasileira.*

*A escolha deste teorema está associada ao fato dele ser considerado, como nos diz Eves, "um dos teoremas mais atrativos e, certamente, um dos mais famosos e mais úteis da geometria elementar" (Apud Gerdes, 1992, p.5).*

*Estas qualidades, certamente, são responsáveis pela presença do teorema de Pitágoras em livros didáticos de diferentes épocas. É claro, entretanto, que o nome do teorema associado à Pitágoras - um dos grandes sábios da antigüidade grega - é outro elemento que reforça essa presença. Um indício disso é a existência de elementos históricos na apresentação do teorema, na maioria das vezes associados à Pitágoras, em quase todos os livros didáticos.*

*Esperamos que as demonstrações apresentadas nos livros selecionados, historicamente situadas, possam fornecer ao professor elementos para a reflexão sobre a história do ensino de matemática brasileiro e para a preparação de suas aulas.*

## UM POUCO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Apesar do nome atribuído ao teorema parecer indicar ter sido o grego Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.C.) o primeiro a ter conhecimento da famosa relação existente em um triângulo retângulo - que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos -, existem evidências suficientes que não confirmam esta hipótese.

Embora nunca a tivessem explicitado, os babilônios já conheciam e utilizavam essa relação, aproximadamente um milênio antes de Pitágoras. A resolução do seguinte problema, retirado de um tablete do período babilônico antigo - de 1900 a 1600 a.C. - é uma confirmação desta afirmação:

*Uma viga de 30 u.c. está apoiada verticalmente em uma parede. A extremidade superior da viga desceu 6 u.c. Quanto deslocou a parte inferior da viga?*

*Resolução*

*30 - 6 = 24, assim a altura é 24*
$30^2 = 900$
$24^2 = 576$
$30^2 - 24^2 = 324$
*Portanto,* $x = \sqrt{324} = 18$

O conhecimento do teorema entre os antigos egípcios, entretanto, não é facilmente comprovado. Apesar da afirmação freqüente de que eles conheciam e utilizavam o triângulo retângulo 3, 4 e 5 em suas construções, parece não existir nenhum documento que comprove tal uso. A confirmação do conhecimento das ternas pitagóricas, encontradas em papiros, não é prova suficiente de que o teorema, também, fosse conhecido. Para isso, seria necessário que uma ligação entre as ternas e o triângulo retângulo tivesse sido estabelecida. A ausência desta ligação confirma o desconhecimento do teorema.

No *Chou Pei Suang Ching*, um antigo documento chinês, cuja data é difícil de precisar - entre 1200 a. C. e 220 d. C. -, aparecem figuras que são utilizadas em demonstrações do teorema de Pitágoras, mas sem nenhuma prova. Isso parece ser uma indicação de que os antigos chineses já conheciam tal teorema.

Os *Sulvasutras*, uma obra antiga da Índia, cuja data também não é possível precisar - entre os séculos VIII a.C. e II d.C. -, revela o conhecimento do teorema pelos hindus em uma época próxima a de Pitágoras.

Apesar das evidências comprovarem o conhecimento do teorema em épocas anteriores a Pitágoras, é possível que a atribuição de seu nome a ele esteja relacionada ao fato de que a primeira prova tenha sido apresentada pela escola pitagórica. Não é possível, entretanto, confirmar esta afirmação. Ela foi inferida de uma fonte escrita aproximadamente mil anos depois de Pitágoras, o *Sumário Eudemiano* de Proclo, do século V. d.C..

Independente de sua origem, o teorema de Pitágoras desempenhou, e ainda desempenha, um importante papel no desenvolvimento da matemática. Esse papel talvez possa ser avaliado pela quantidade de demonstrações - geométricas e algébricas - encontradas para ele. Na segunda edição do livro *The pythagorean proposition*, de 1940, Elisha Scott Loomis apresentaria 370 demonstrações. Paulus Gerdes, em seus estudos sobre os ornamentos e artefatos africanos, encontraria muitas outras possibilidades de demonstração.

Apresentaremos, a seguir, algumas dessas demonstrações, utilizadas por livros didáticos de diferentes épocas.

## UM LIVRO DE 1912

No livro *Elementos de Geometria*, de autoria dos professores André Perez y Marin e Carlos F. de Paula, lentes catedráticos do então Ginásio do Estado em Campinas, encontramos no Prefácio da 1ª edição a seguinte observação:

*"A Geometria é incontestavelmente uma das ciências cuja iniciação se faz segundo um método muito árido, não obstante ser a parte da Matemática que melhor permite evitar a aridez e estimular a curiosidade e o espírito de pesquisa dos alunos.*

*Com efeito, não existe ciência de união mais lógica em suas partes, nem de mais rigoroso método em sua doutrina, que a ciência geométrica. Baseada em um pequeno número de axiomas e não admitindo outras verdades que as deduzidas desses princípios pelo mais rigoroso raciocínio, tudo nesta ciência é exato, eminentemente claro e racional e pode ser facilmente compreendido por todas as pessoas.*

*A dificuldade que apresentam os conhecimentos geométricos não depende, portanto, dos princípios da ciência; depende essencialmente dos meios exteriores de transmiti-los, entre os quais ocupam um lugar importantíssimo as figuras que auxiliam as demonstrações." (Perez y Marin, A. e Paula, C. F., s/d, p.III).*

Como afirmam os autores, a geometria apresentada no livro é entendida como um sistema lógico-dedutivo, em que as afirmações são deduzidas a partir de um conjunto de axiomas e definições pré-estabelecidos.

Esta forma de apresentação da geometria foi dada pela primeira vez por Euclides (c. 300 a.C.), em sua obra os *Elementos*. Nesta obra, dividida em 13 livros ou capítulos, estaria incorporado todo o conhecimento matemático desenvolvido até aquele momento, cujos assuntos foram assim distribuídos:

**Livro I** - 23 definições, 5 postulados e 5 axiomas. Construções elementares, teoremas de congruência, área de polígonos, teorema de Pitágoras.

**Livro II** - Álgebra geométrica.

**Livro III** - Geometria do círculo.

**Livro IV** - Construção de certos polígonos regulares.

**Livro V** - A teoria das proporções de Eudoxo.

**Livro VI** - Figuras semelhantes.

**Livro VII - IX** - Teoria dos números.

**Livro X** - Classificação de certos irracionais.

**Livro XI** - Geometria no espaço, volumes simples.

**Livro XII** - Áreas e volumes achados pelo método de exaustão de Eudoxo.

**Livro XIII** - Construção dos cinco sólidos regulares.

Os *Elementos* foram durante quase dois mil anos a base do ensino de geometria.

A obra de Perez y Marin e Paula, é um exemplo da influência da apresentação lógico-dedutiva euclidiana da geometria em nossas escolas. Esta influência, entretanto, não aconteceria apenas nas primeiras décadas de nosso século. Ela seria muito forte, até o momento em que a Matemática Moderna fosse implantada nas escolas brasileiras.

A demonstração do teorema de Pitágoras, retirada da obra de Perez y Marin e Paula[1], apresentada a seguir, é uma versão atualizada da Proposição 47 do Livro I dos *Elementos* de Euclides.

"Teorema de Pitágoras ( # )

*314. O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos (fig. 1).*

*Hipótese: Seja o triângulo ABC retângulo em A.*

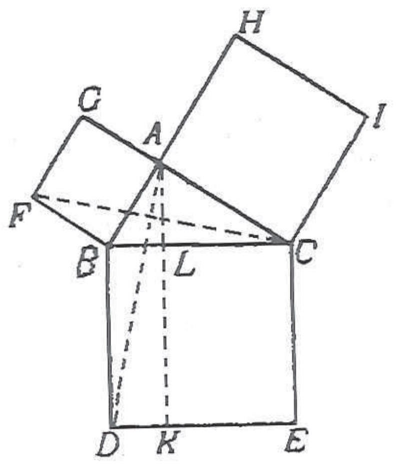
*Tese: BDEC = ABFG + ACIH*

*Demonstração: Traçando a perpendicular AK e as retas AD e CF, obtem-se os dois triângulos ABD e CBF. O primeiro triângulo é a metade do retângulo BDKL, que tem a mesma base BD e a mesma altura BL; e o segundo é a metade do quadrado ABFG, pela mesma razão.*

---

[1] *Em todas as reproduções das obras apresentadas neste artigo foram feitas atualizações ortográficas e alterações nas posições das figuras.*

\# *Pitágoras (580 antes C.) descobriu este teorema, construindo o triângulo cujos lados são 3, 4 e 5. Este triângulo, considerado pelos antigos como o triângulo por excelência, tem para área 6, e o cubo desta área é igual à soma dos cubos dos lados.*




*Mas esses triângulos são iguais, pois que são iguais os ângulos FBC e ABD, por constar cada um de um reto e do ângulo comum ABC, e também iguais os lados que formam esses ângulos; logo o quadrado construído sobre o cateto AB equivale ao retângulo BK, por terem metades equivalentes.*

*Provar-se-ia do mesmo modo que o quadrado construído sobre o cateto AC equivale ao retângulo LKEC, e o teorema, portanto, fica demonstrado." (Perez y Marin, A. e Paula, C. F., s/d, p. 170-1).*

Esta demonstração, sem dúvida muito interessante, está baseada nas seguintes proposições sobre igualdade de áreas: 1 - Paralelogramos com a mesma base e situados entre duas retas paralelas dadas, são iguais em área. 2 - Dois triângulos de mesma base situados entre as mesmas retas paralelas são iguais em área. 3 - Se um paralelogramo e um triângulo têm a mesma base e estão situados entre as mesmas retas paralelas, então, o paralelogramo é igual ao dobro do triângulo.

Vale observar que as informações históricas sobre Pitágoras, apresentadas pelos autores em nota de rodapé, são bastante questionáveis.

## UM LIVRO DE CLAIRAUT

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) foi um importante matemático ligado aos filósofos do iluminismo, um seguidor da "moderna ciência" e da "moderna matemática" e um dos primeiros a continuar a obra de Issac Newton na França. Em sua obra *Eléments de géométrie* (1741), ele apresenta a geometria tendo como fio condutor a história. Esta escolha foi a alternativa encontrada pelo autor para romper com a forma tradicional de apresentação dos conhecimentos geométricos, através da introdução de um método que ao mesmo tempo motivasse e auxiliasse na compreensão. Entretanto, a história não foi utilizada para "reconstruir" as descobertas geométricas. Ela apenas auxiliou no estabelecimento de um caminho - que poderia ter sido aquele percorrido pelos descobridores - para apresentar as descobertas geométricas como soluções encontradas pelos homens na tentativa de resolver os problemas que a eles se apresentaram. Por entender que os mais antigos problemas - como a própria origem da palavra geometria parece indicar - estivessem relacionado à questão de medida de terras, escolheria este tema como o elemento gerador das descobertas geométricas.

No primeiro parágrafo do Prefácio de sua obra, Clairaut manifesta claramente a sua posição contrária à introdução dos estudos geométricos através dos *Elementos* de Euclides, que entende como sendo o principal responsável pelas dificuldades encontradas pelos estudantes:

*"Ainda que a geometria seja uma ciência abstrata, é mister todavia confessar que as dificuldades experimentadas pelos que começam a aprendê-la, procedem as mais das vezes da maneira por que é ensinada nos elementos ordinários. Logo no princípio se apresenta ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que só lhe parecem anunciar um estudo árido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espírito sobre objetos mais interessantes, e sendo além disso difíceis de conceber, acontece comumente que os principiantes se fatigam e se aborrecem antes de terem uma idéia clara do que se lhes queira ensinar" (Clairaut, 1892, p.IX).*

Nesta citação, já se manifesta, claramente, a diferença de concepção de geometria existente entre os livros de Perez y Marin e Paula, e Clairaut. O primeiro utiliza as características de um sistema lógico-dedutivo como os elementos essenciais para exatidão, clareza, racionalidade e compreensão da geometria, enquanto o último atribui a esses mesmos elementos as dificuldades encontradas pelos estudantes.

Apesar da posição de Clairaut contrária à introdução da geometria por meio de um sistema lógico-dedutivo, ele não elimina as provas e demonstrações. É claro que em seu livro não encontramos a conhecida forma de apresentação "rigorosa" da geometria com os seus axiomas, teoremas e seus longos raciocínios dedutivos. Entretanto, o caminho escolhido por Claraiut é "lógico", no sentido da existência de um encadeamento lógico das proposições. Nenhuma conclusão é apresentada sem que as condições necessárias tenham sido anteriormente provadas, mesmo que por meio da evidência. Além disso, as provas das proposições consideradas não evidentes, apesar de serem realizadas por meio da linguagem comum, apresentam, em detalhes, todos os passos e justificativas. Mas, alguns podem afirmar, não são esses elementos que garantem o "rigor lógico". Realmente, mesmo para a noção de rigor existente no século XVIII, seria muito difícil que a obra de Clairaut fosse considerada rigorosa. Isso, entretanto, era previsto pelo próprio autor, que apresenta uma defesa prévia para tal crítica, ao mesmo tempo que esclarece a sua noção de rigor:

*"Em alguns passos destes elementos, talvez me censurem por me reportar demasiado ao testemunho dos olhos, e por não me cingir bastante à exatidão rigorosa das demonstrações. Aos que tal censura me fizerem, peço*

*observem que* **só trato pela rama** *as proposições cuja verdade se patenteia por pouco que nelas se atente.* **Assim faço sobretudo no começo,** *em que as mais das vezes se encontram proposições desse gênero, e isto por haver notado que desse modo aqueles que tinham propensão para a geometria, se compraziam em exercer seu espírito, ao passo que se desalentavam quando eram atochados de demonstrações, por assim dizer, inúteis.*

*Não nos surpreende que Euclides se desse ao trabalho de demonstrar que dois círculos secantes não têm o mesmo centro, que um triângulo encerrado em outro tem a soma de seus lados menor que a soma dos lados do triângulo que o envolve. Este geômetra tinha de convencer sofistas obstinados, que se gloriavam de refusar as verdades mais evidentes, e então era preciso que a geometria tivesse, como a lógica, o auxílio de raciocínios em forma para tapar a boca à chicana. As coisas, porém mudaram de face. Todo raciocínio que recai sobre o que o só bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores" (Clairaut, 1892, pp.XII-XIII, grifo nosso).*

No Brasil, a obra os *Eléments de géométrie* de Clairaut foi traduzida sob a influência das idéias positivistas da Reforma Benjamim Constant , primeiro ministro da República do recém criado Ministério da Instrução, Correios e Telégrafos. Esta Reforma, representaria uma ruptura com a tradição clássico-humanista existente no ensino secundário. Era uma tentativa de introduzir uma formação científica - nos moldes positivistas - em substituição à formação literária existente.

Na parte relativa ao ensino de matemática - considerada a ciência fundamental dentro do Positivismo - estariam contempladas todas as partes que compõem tanto a matemática abstrata como a matemática concreta, dentro da hierarquia estabelecida por Comte.

A obra de Clairaut, por ser considerada por Comte como a melhor obra didática sobre geometria preliminar, seria um dos livros necessários à Biblioteca Positivista e, portanto, deveria ser traduzida.

As duas traduções que temos conhecimento foram publicadas durante esse período. A primeira em 1892, com tradução de José Feliciano. A segunda em 1894, com tradução de F. Cabrita.

A demonstração do teorema de Pitágoras encontrada nessas traduções não é, como era de se esperar, a apresentada por Euclides. Clairaut utiliza uma demonstração que teria sido inicialmente dada, segundo Eves (1995, p.118), por Tabit ibn Qorra (826-901) e, posteriormente, "redescoberta" por Henry Perigal, em 1873. É interessante observar que não encontramos mencionada, nos livros de história da matemática consultados, nenhuma menção à demonstração apresentada por Clairaut? Seria porque Clairaut não teria utilizado as regras de rigor estabelecidas?

A seguir, apresentamos uma transcrição da demonstração do teorema retirada da tradução de 1892.

[2] *Essa reforma seria oficializada através do Decreto nº 891, de 08 de novembro de 1890.*

" XVII

*Suponhamos agora que se quer fazer um quadrado igual à soma dos dois quadrados desiguais ABCd e CFEf (fig. 2), ou, o que é o mesmo, suponhamos que se quer mudar a figura ADFEfd em um quadrado.*

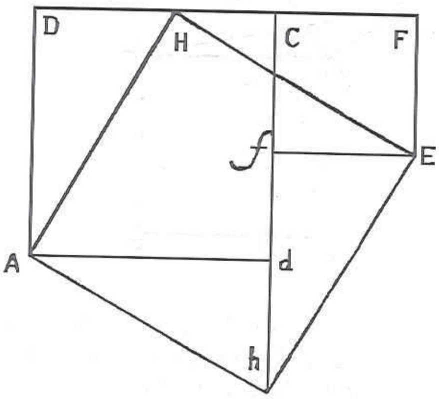



Figura 2

*Seguindo o espírito do método precedente, procuraremos ver se é possível achar na linha DF um ponto H, tal que,*

*1°) Tirando as linhas AH e HE, e fazendo girar os triângulos ADH, EFH em torno dos pontos A e E, até que tenham as posições Adh, Efh, estes dois triângulos venham juntar-se em h;*

*2°) Os quatro lados AH, HE, Eh, hA, sejam iguais e perpendiculares uns aos outros.*

*Ora, esse ponto H será encontrado fazendo DH igual ao lado CF ou EF. Com efeito, da igualdade suposta entre DH e CF, resulta que se fizermos girar ADH em torno de seu ângulo A, em modo a lhe darmos a posição Adh, o ponto H chegado a h, estará distante do ponto C de um intervalo igual a DF. Da mesma igualdade suposta entre DH e CF, resulta ainda que HF será igual a DC, e que assim, girando em torno de E o triângulo EFH, que vai tomar a posição Efh, o ponto H chegará ao mesmo ponto h, distante do ponto C de um intervalo igual a DF.*

*A figura ADFEfd ficará, pois, transformada em uma figura de quatro lados AHEh. Falta ver somente se os quatro lados serão iguais e perpendiculares uns aos outros.*

*Ora a igualdade destes quatro lados é evidente, portanto Ah e hE são os mesmos que AH e HE, e estes são iguais, porque DH sendo igual a CF ou a FE, os dois triângulos ADH, HEF serão iguais e semelhantes.*

*Resta saber agora se os lados da figura AHEh formam ângulos retos. Disso é fácil nos certificarmos notando que enquanto ADH girar em torno de A para chegar a hAd, o lado AH deverá fazer o mesmo movimento que o lado AD. Ora o lado AD, tornando-se Ad, fará um ângulo reto DAd. Logo o lado AH, tornando-se Ah, fará também um ângulo reto HAh.*

*Quanto aos outros ângulos H, E, h, é claro que serão necessariamente retos, porquanto não é possível que numa figura terminada por quatro lados iguais haja um ângulo reto, sem que sejam retos também os outros três ângulos.*

*XVIII*

*Se notarmos que os dois quadrados ADCd, CFEf são feitos, um sobre AD, lado médio do triângulo ADH, o outro sobre EF, igual a DH, pequeno lado do mesmo triângulo ADH; se notarmos ainda que o quadrado AHEh, igual aos outros dois, é descrito sobre o grande lado AH, comumente chamado* hipotenusa *do triângulo retângulo, - descobriremos logo esta famosa propriedade dos triângulos retângulos:*
- O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados.

*XIX*

*Se agora de dois quadrados HDLK, ABCD (fig. 3 e 4) quisermos fazer um só,*

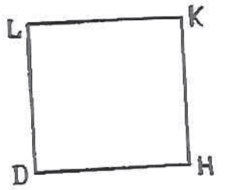



Figura 3

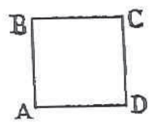



Figura 4

*será inútil colocar um ao lado do outro e decompô-los, como fizemos em XVII. Bastará dispor seus lados AD, DH (fig. 5), de modo que façam um ângulo reto, e em*

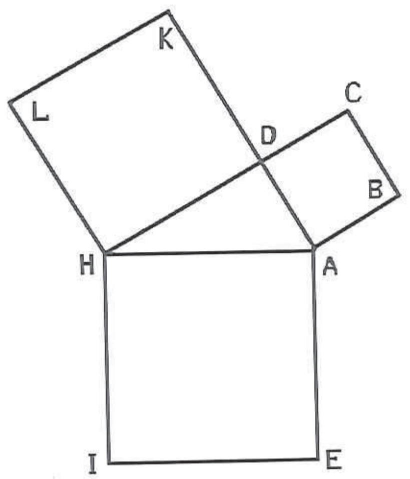



Figura 5

*seguida tirar a linha AH, que será então o lado do quadrado pedido AHIE." (Clairaut, 1892, p.78-80).*

A demonstração apresentada por Clairaut é realizada por meio da decomposição de áreas, onde o movimento é um elemento fundamental. É necessário "girar" os triângulos, até encontrar a posição correta. A idéia de movimento também é utilizada para "provar" que os ângulos da figura construída são retos.

Apesar dessa demonstração não ser provavelmente considerada pelos matemáticos como "rigorosa", e talvez por esta razão não ser mencionada como uma prova pelos historiadores da matemática, ela, sem dúvida, fornece a possibilidade de provar "concretamente", através de recortes e composição das partes1 , um teorema que muitas vezes não faz muito sentido para os alunos.

## UM LIVRO DE 1938

Ao final do século XIX, o estabelecimento de contato mais intenso entre matemáticos-professores de diferentes países, propiciado especialmente pela criação dos Congressos Internacionais de Matemática, ofereceria condições especiais para o conhecimento dos problemas relacionados ao ensino da matemática enfrentados pelos países participantes e das formas encontradas para solucioná-los.

Apesar de existirem, nos primeiros Congressos, sessões reservadas às discussões sobre educação matemática, elas, entretanto, não estariam satisfazendo às expectativas das pessoas mais preocupadas com o tema. Dentre elas, estaria David Eugene Smith, professor de educação matemática no *Teachers College* da *Columbia University.*

A insatisfação, que estaria diretamente relacionada à percepção da importância naquele momento de se repensar o ensino de matemática, teria levado Smith a sugerir, em seu artigo *Réformes à accomplir dans l'enseinement des mathématiques*, de 1905, publicado na revista L'Enseignement Mathématique, a criação de uma Comissão Internacional para estudar questões relativas à educação matemática.

Uma proposta formal para a criação da Comissão seria apresentada e aprovada durante o Quarto Congresso Internacional de Matemática, realizado em abril de 1908 em Roma. A *Commission Internationale de L'Enseignement mathématique* seria então estabelecida e teria como presidente o matemático alemão Felix Klein.

Apesar de não ter sido constituída com o objetivo explícito de elaborar uma nova proposta para o ensino de matemática, as atividades da Comissão Internacional acabariam desencadeando o Primeiro Movimento Modernizador do Ensino de Matemática.

Este movimento poderia ser encarado como uma primeira reação organizada contra "o culto a Euclides", uma vez que seria a primeira ação coletiva no sentido de propor um ensino de matemática, particularmente para o curso secundário, baseado em princípios totalmente opostos aos apresentados pelos *Elementos*, que dominavam esse nível de ensino. Esses princípios podem ser resumidos nos seguintes:

*- eliminação da organização excessivamente sistemática e lógica dos conteúdos da escola;*

---

[1] *Os professores Marcos L. Lourenço e Eurípides A. da Silva, no artigo apresentado no número anterior desta revista, intitulado Três Quebra-Cabeças, apresentam esta prova por meio de recortes.*

*- consideração da intuição como um elemento inicial importante para a futura sistematização;*

*- introdução de conteúdos mais modernos, como as funções e o cálculo diferencial e integral, especialmente devido à importância deles no desenvolvimento da matemática e na unificação de suas várias áreas;*

*- valorização das aplicações da matemática para a formação de qualquer estudante de escolas de nível médio, não apenas para os futuros técnicos;*

*- percepção da importância da "fusão", ou descompartimentalização, dos conteúdos ensinados.*

Apesar desses princípios orientadores do movimento modernizador não terem sido aplicados de uma forma unificada e com a mesma velocidade nos diferentes países, eles acabariam alterando significativamente a fisionomia do ensino de matemática e oferecendo elementos fundamentais para as futuras discussões sobre esse ensino.

No ensino de matemática brasileiro, apenas ao final da década de 20, eles começariam a ser implantados.

Em 1928, a Congregação do Colégio Pedro II apresentaria uma proposta de alteração da seriação do curso secundário, na qual estariam presentes todas as idéias modernizadoras defendidas pelo Movimento Internacional para Modernização do Ensino de Matemática. Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, então professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, seria um dos maiores responsáveis por essa proposta.

A implantação das idéias modernizadoras em todas as escolas secundárias brasileiras, no entanto, aconteceria por meio da Reforma Francisco Campos2 -primeiro ministro do recém criado Ministério da Educação e Saúde Pública.

Nesta Reforma seriam estabelecidos "definitivamente o currículo seriado, a freqüência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior" (Romanelli, 1990, p.135). Nela, as disciplinas matemáticas apareceriam englobadas sob o título de matemática.

O objetivo do ensino de matemática deixaria de ser apenas o "desenvolvimento do raciocínio", conseguido através do trabalho com a lógica dedutiva, mas, incluiria, também, o desenvolvimento de outras "faculdades" intelectuais, que estariam diretamente ligadas à utilidade e às aplicações da Matemática.

Para que esses objetivos pudessem ser alcançados, seria necessário que as exigências advindas da nova psico-pedagogia, e que estavam na base do movimento da escola nova, fossem observadas: um ensino orientado segundo o grau de desenvolvimento mental e baseado no interesse do aluno, que deveria partir da intuição e apenas, aos poucos, ir introduzido o raciocínio lógico, que enfatizasse a descoberta e não a memorização.

Para isso, eram sugeridos o uso do método heurístico, que levaria o aluno a ser "um descobridor" e não "um receptor passivo de conhecimentos", e, também, a introdução de um "curso propedêutico" de geometria, "destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo". Além disso, seria necessário "renunciar completamente à prática de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estilo sistemático das demonstrações já feitas" (Decreto nº19890, 1931, Apud Bicudo, 1942, p.157).

A introdução de uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos estaria, também, contemplada pela proposta, que sugere a eliminação de "assuntos de interesse puramente formalístico", de "processos de cálculos desprovidos de interesse didático" e introduz o conceito de função, as noções do cálculo infinitesimal, além de propor a descompartimentalização das várias áreas da matemática e enfatizar a importância de suas aplicações.

Com relação ao estabelecimento de inter-relações entre os três ramos, são apresentadas sugestões para que sejam representadas geometricamente as grandezas numéricas, para que seja estabelecida uma correlação entre conceitos e expressões algébricas com as noções de geometria intuitiva, através da associação com as noções de perímetro, área, volume e segmentos orientados. Essas inter-relações estabelecidas têm em vista o fornecimento de elementos básicos para a compreensão do conceito unificador da proposta, ou seja, o conceito de função.

Na parte relativa à geometria, percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, não apenas em sua posição fixa, mas, também, através de seus movimentos. Em relação a esse último aspecto, é enfatizada a importância de serem trabalhadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação.

Apesar de não ser eliminado o estudo da geometria dedutiva; que, entretanto, ficará restrito à geometria plana; é sugerido que ele seja introduzido de forma gradual e tenha sempre por base as observações intuitivas, de maneira a levar o aluno a perceber a necessidade da demonstração rigorosa.

Não é difícil imaginar que uma proposta tão inovadora, que além de introduzir alguns aspectos radicalmente opostos àqueles existentes até então e ainda dá margem à existência de vários programas, encontraria algumas resistências para ser implantada.

Uma primeira resistência, viria por parte dos professores de matemática, em geral, que não se sentiam seguros para trabalhar a matemática de uma maneira tão diferente, na verdade radicalmente oposta àquela que estavam habituados. Essa situação seria agravada pelo fato de quase inexistirem, inicialmente, livros didáticos que contemplassem as idéias modernizadoras. Os livros adotados até então, seguiam as antigas orientações do ensino, ou seja, eram compêndios separados de aritmética, álgebra, geometria ou trigonometria, que apresentavam, em geral, uma exposição formal dos conteúdos e uma quantidade extensa de exercícios.

A primeira coleção a seguir a moderna orientação, iniciada ainda nos últimos anos da década de 20, seria a de Euclides Roxo, intitulada *Curso de Matemática Elementar.* A ela seguiram-se outras, dentre as quais

[2] *Apresentada inicialmente pelo decreto nº 19890, de 18 de abril de 1931, e consolidada pelo Decreto 21241, de 04 de abril de 1932.*

estaria a coleção *Curso de Matemática*, de autoria de Cecil Thiré e Mello e Souza, que em edições posteriores teria a colaboração de Euclides Roxo.

Apresentamos, a seguir, a demonstração do teorema de Pitágoras utilizada na 3ª edição, de 1938, do 4º ano da coleção *Curso de Matemática*, de autoria de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza.

" *38 - Teorema de Pitágoras*

*A proposição famosa, conhecida em Matemática pela denominação de teorema de Pitágoras (* ), poderá ser enunciada do seguinte modo:*

*O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos (* *).*

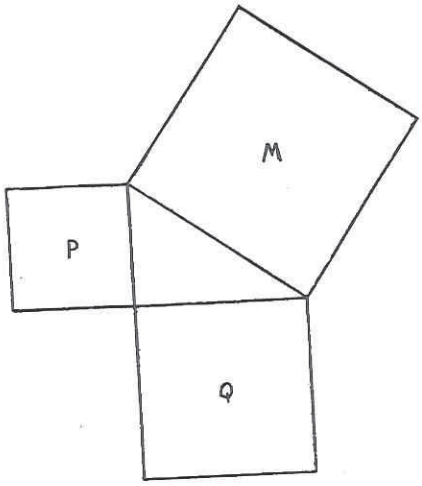



Figura 6

*Se designarmos por M a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e por P e Q respectivamente as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, temos:*

$$M = P + Q$$

*Há para este teorema - notável pelas aplicações que apresenta - várias demonstrações, algumas das quais são apontadas entre as mais curiosas recreações matemáticas (* **).*

---

*Matemático e filósofo grego cuja existência remonta a seis séculos, mais ou menos, antes de Cristo.*

*O teorema de Pitágoras não passa de um caso particular de um outro teorema mais geral, que é atribuído comumentemente a Clairaut (1713-1765) mas que segundo Ozanam (Recréations mathématiques et physiques) é devido a Pappus.*

*Podemos classificar as demonstrações do teorema de Pitágoras em dois grandes grupos: demonstrações geométricas e demonstrações algébricas. Entre as demonstrações geométricas algumas são obtidas diretamente e outras por decomposição de figura. I. Ghersi, no seu livro "Matemática dilettevola e curiosa" examina e critica várias demonstrações, para cada uma das quais indica sempre o autor. Encontram-se no livro do matemático italiano as demonstrações de Euclides, Nassir-ed-Din, Hoffman, Tempelhoff, Sonndorfer, Werner, Fabre, Renan, Bhas-Kara, Bezout, Marre, Garfield, etc.*

*Vamos incluir neste compêndio, para o teorema de Pitágoras, uma das muitas demonstrações obtidas por decomposição de figura.*

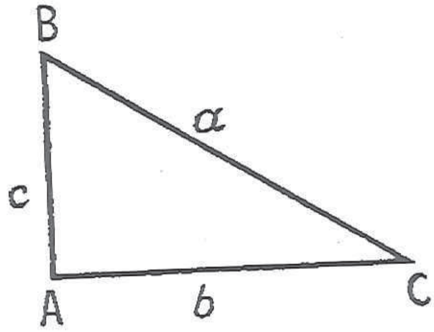



Figura 7

*Seja ABC um triângulo retângulo qualquer; designemos por a a hipotenusa e por b e c os catetos.*

*Construamos dois quadrados EFGH e E'F'G'H' iguais, tendo para lado b + c, isto é, a soma dos catetos do triângulo dado.*

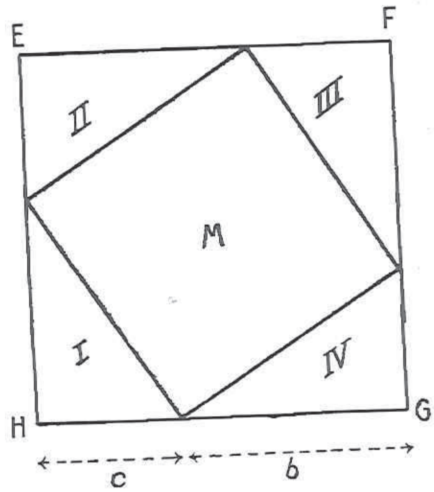



Figura 8

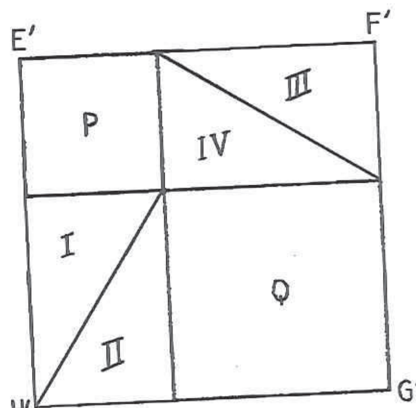



Figura 9

*O quadrado EFGH pode ser decomposto - como* *indica a figura - em 5 partes: o quadrado M (construído sobre a hipotenusa) e quatro triângulos iguais ao triângulo ABC.*

*Se chamarmos T a área do triângulo ABC, temos:*

$$\text{quadrado } EFGH = M + 4T$$

*O quadrado E'F'G'H' poder ser decomposto em 6 partes: os quadrados P e Q (construídos sobre os catetos) e quatro triângulos iguais ao triângulo dado.*

*Temos pois:*

$$\text{quadrado } E'F'G'H' = P + Q + 4T$$

*Como os quadrados EFGH e E'F'G'H' são iguais, podemos escrever:*

$$M + 4T = P + Q + 4T$$

*ou*

$$M = P + Q$$

*Essa igualdade nos mostra que a área M é igual à soma das áreas P e Q." (Roxo, E., Thiré, C. E Mello e Souza, 1938, p. 241-3).*

Como era esperado, tendo em vista as diretrizes que orientavam a proposta de matemática naquele momento, a demonstração escolhida pelos autores, por decomposição de áreas, minimiza o elemento formal, além de reforçar o elemento visual. Essa demonstração por pode ter sido, como sugerem Eves (1995, p.103) e Gerdes (1992, p.27-8), a mesma utilizada pelos pitagóricos.

## UM LIVRO DE 1968

Durante os primeiros anos da década de 50, tendo em vista a modernização do ensino de matemática do nível secundário, vários projetos começariam a ser desenvolvidos, especialmente nos Estados Unidos.

Entretanto, seria um fato não ligado diretamente à situação escolar que acabaria acelerando o processo e desencadeando um movimento internacional de modernização do ensino de matemática: o lançamento, em 1957, do primeiro satélite soviético - o *Sputnik*.

Em 1959, a Organização Europeia de Cooperação Econômica, a OECE, preocupada com uma melhor qualificação do pessoal técnico-científico de seus países membros, organizaria uma Conferência Internacional em *Royaumont* de duas semanas, com a participação de especialistas de vinte países, tendo como objetivo principal a discussão de propostas de mudança para o ensino de matemática da escola de nível médio.

Nessa conferência, em que seriam estabelecidas as bases do **Movimento da Matemática Moderna**, Jean Dieudonné justificaria a necessidade de modernização do ensino da matemática da seguinte forma:

*"Já no século passado se considerava a passagem das matemáticas da escola secundária às da universidade como um salto a um mundo diferente. Com a introdução das matemáticas modernas, esse fosso tem aumentado muito... Recentemente, têm sido introduzidos nos últimos programas dos três anos da escola secundária superior (das escolas francesas) os elementos de cálculo diferencial e integral, de álgebra vetorial e de geometria analítica, mas esses temas são sempre relegados a um segundo plano, e o interesse se concentra em primeiro lugar na geometria pura ensinada, mais ou menos, à maneira de Euclides, com um pouco de álgebra e de teoria de números. Estou convencido que o tempo deste 'trabalho remediado' já passou e que deveríamos pensar em uma reforma muito mais profunda, a menos que se deixe piorar a situação até o ponto de comprometer seriamente cada progresso científico ulterior. Se eu quiser resumir em uma frase todo o programa que tenho em mente tenho de pronunciar o slogan: Abaixo Euclides!" (Dieudonné, Apud Castelnuovo, 1975, p. 49).*

Como podemos perceber por essas palavras de Dieudonné, a proposta de modernização pretendia "revolucionar" o ensino de matemática no nível médio, por meio da introdução de aspectos da "moderna matemática"; ou seja, da matemática mais recente, mais atual, mais nova, que estava sendo desenvolvida nas últimas décadas; e pela eliminação de conteúdos velhos, antigos, tradicionais.

Essa "moderna matemática", seria aquela surgida no início de nosso século, embora estivesse em estado embrionário desde o século XIX. Ela pode ser identificada com as estruturas e a axiomatização, e teria surgido pelo desenvolvimento dos três ramos distintos seguintes:

*"1 - as extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra 'abstrata';*

*2 - o nascimento das geometrias não euclidianas de Gauss, Lobatchevski e Bolyai seguido mais tarde pelas axiomatizações da geometria de Euclides realizadas por Pasch, Peano e sobretudo Hilbert (1899);*

*3 - o desenvolvimento da Lógica, com a publicação da famosa obra de Boole em 1854 e as contribuições, dentre outros, de Frege e Peano, para culminar no monumental tratado de Russel e Whitehead" (Hernández, In: Piaget et al., 1986, p. 20).*

O desenvolvimento dessa "moderna matemática", que ficaria cada vez mais distante da antiga concepção de matemática como ciência da quantidade, culminaria com os trabalhos de Nicolas Bourbaki[1], que teriam como objetivo central a exposição de toda a matemática de

*1 Nicolas Bourbaki foi um nome fictício escolhido por um grupo de matemáticos, na maioria franceses; dentre eles, Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil; que tinham a intenção de apresentar toda a matemática de seu tempo em uma obra intitulada Élements de mathématique. O primeiro volume dessa obra apareceu em 1939. Cf. Boyer, 1974, pp.457-458 e Hernández, in: Piaget et al., 1986, p. 27.*

forma axiomática e unificada, onde as estruturas seriam os elementos unificadores.

Os trabalhos de Bourbaki, ou seja, o estágio mais avançado dos estudos matemáticos, orientariam as propostas do Movimento da Matemática Moderna, que teriam como elementos fundamentais os conjuntos, as relações e as estruturas.

Ao contrário do primeiro movimento, as propostas do Movimento da Matemática Moderna, reforçadas pelos estudos psicológicos de Jean Piaget e tendo o incentivo de vários governos, propagaria-se "como um rastilho de pólvora por todo o mundo" (Santaló, 1979, p.41). Os únicos países que não chegariam a adotar um programa de acordo com essa orientação seriam a Itália e os ligados à antiga União Soviética.

No Brasil, as questões relativas ao ensino de matemática começariam a ser discutidas com uma maior intensidade pelos professores durante a década de 50. Essa discussão mais intensa seria propiciada, especialmente, pela realização dos primeiros Congressos Nacionais de Ensino da Matemática realizados, respectivamente, em Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1959), Belém (1962) e São José dos Campos - SP (1966).

Apesar das idéias modernistas terem sido apresentadas e discutidas a partir do segundo destes Congressos, não seriam eles que desencadeariam o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Isso seria conseguido, especialmente, por meio das atividades desenvolvidas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM - fundado em outubro de 1961, por professores do Estado de São Paulo, tendo como principal representante o professor Osvaldo Sangiorgi.

Os trabalhos e discussões relativos à matemática moderna, entretanto, não ficariam restritos ao GEEM. Outros grupos de estudo seriam criados e vários projetos seriam elaborados e aplicados. Dentre eles podemos destacar: o GEEMPA - Grupo de Estudos de Ensino da Matemática - de Porto Alegre, o NEDEM - Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática - de Curitiba, o GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática - do Rio de Janeiro e o grupo coordenado pelo professor Omar Catunda na UFBa.

O V Congresso Nacional, coordenado pelo GEEM, esteve dirigido especialmente à Matemática Moderna. Neste Congresso, pela primeira vez, houve a participação de vários professores estrangeiros: Marshall Stone dos Estados Unidos, George Papy da Bélgica, Hector Merklen do Uruguai e Helmuth Völker da Argentina.

O "espírito da Matemática Moderna" presente no V Congresso viria apenas reforçar a difusão das idéias modernizadoras que, especialmente, por meio dos cursos organizados pelo GEEM - com o apoio do MEC e da Secretaria de Estado - e da publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com essa nova orientação, a partir da primeira metade da década de 60, desencadeariam um processo de implantação da matemática moderna nas escolas brasileiras.

Em nenhum outro momento o ensino da matemática seria tão discutido, divulgado e comentado como naquele período.

A partir da primeira metade da década de 70, entretanto, pesadas críticas ao movimento começariam a aparecer. Reproduzimos, a seguir, a demonstração do teorema de Pitágoras utilizada no livro *Matemática - Curso Moderno* de Osvaldo Sangiorgi, 4° ano, de 1968.

"T.10: Teorema de Pitágoras (+)

Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Nota: Comumente, o Teorema de Pitágoras é enunciado: Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

H { ABC \ B é reto

T { $b^2 = a^2 + c^2$

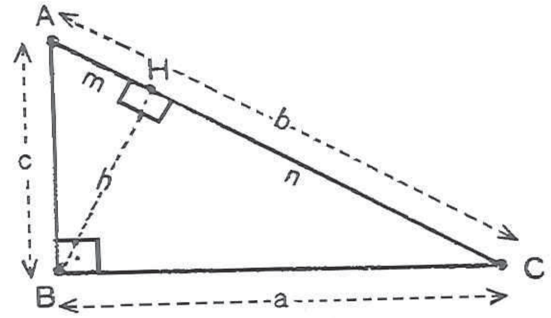



Figura 10

Demonstração:

Já sabemos que:

$c^2$ = bm (1ª relação)
$a^2$ = bn (2ª relação)

$c^2 + a^2$ = bm+bn (somando membro a membro)
ou $c^2 + a^2$ = b(m+n) (propriedade distributiva)
ou $c^2 + a^2$ = b.b (porque: m + n = b)
ou

$$\boxed{c^2 + a^2 = b^2}$$

c.q.d." (Sangiorgi, 1968, p.185)

É interessante observar que Sangiorgi, tentando ser "cuidadoso" com a linguagem, que é uma das características daquele momento, utiliza "quadrado da medida da hipotenusa" e não "quadrado da hipotenusa". Este "cuidado" é uma forma de desvincular o teorema da noção de área de um quadrado, uma vez que a demonstração será "algébrica". Além disso, para garantir

+ *Pitágoras, um dos maiores filósofos da Antiguidade, fundou a escola itálico-pitagórica, transformando o estudo da Matemática numa verdadeira Ciência.*

a validade de sua demonstração, justifica todos os passos realizados, colocando entre parênteses as propriedades "algébricas" utilizadas.

A demonstração algébrica utilizada por Sangiorgi foi, inicialmente, apresentada por Bhaskara (1114-1185) e redescoberta no século XVII por John Wallis.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que tenha sido possível perceber, pela breve análise realizada, a relação existente entre as propostas apresentadas pelos livros didáticos e as discussões sobre o ensino de matemática existentes em um dado momento histórico.

O último livro analisado, no entanto, está relacionado com o Movimento da Matemática Moderna, que começou a ser questionado a partir da primeira metade da década de 70.

O que teria acontecido com o ensino de matemática depois do Movimento da Matemática Moderna? Como será que os livros didáticos estão, atualmente, apresentando o teorema de Pitágoras? Podemos estabelecer alguma relação entre a forma de apresentação atual do teorema de Pitágoras e as discussões que têm ocorrido sobre o ensino de matemática?

## BIBLIOGRAFIA


Bicudo, J. C. *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive)*. São Paulo, 1942.

Boyer, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Cabrita, F. *Elementos de geometria.* Capital Federal: Companhia Industrial de Papelaria, 1894.

Castelnuovo, E. *Didáctica de la matemática moderna.* México: Trillas, 1975.

Clairaut, A. C. *Elementos de geometria.* São Paulo: Bibliópola, 1892.

Gerdes, P. De quantas maneiras é que se pode demonstrar o teorema de Pitágoras. In: *Bolema*, v. 3, n.5, 1988, p. 47-55.

______. *Pitágoras africano: um estudo em cultura e educação matemática*. Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1992.

______. *Cultura e o despertar do pensamento geométrico.* Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1991.

Eves, H. *História da geometria.* São Paulo: Atual, 1992.

______. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

Lourenço, M. L. e Silva, E. A. Três quebra-cabeças. In: *Revista de Educação Matemática - SBEM-SP*, v. 5, n. 3, jan. 1997, p. 27-9.

Miorim, M. A. *O ensino de matemática: evolução e modernização.* FE-UNICAMP. São Paulo. 1995. Tese de Doutorado.

______. As influências do primeiro movimento de modernização no ensino de matemática no Brasil. In: *Anais do 2 Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e 2 Seminário Nacional de História da Matemática.* 1997, p. 273-286.

______. *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual, 1998.

Piaget, J. et al. *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza, 1986.

Perez y Marin, A. e Paula, C. F. *Elementos de geometria.* São Paulo: Melhoramentos, s/d.

Romanelli, O. de O. *História da Educação no Brasil (1930/1973).* Petrópolis: Vozes, 1990.

Roxo, E. Thiré, C. e Mello e Souza. *Curso de Matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alvez, 1938. 4° ano.

Sangiorgi, O. *Matemática - curso moderno.* São Paulo: Nacional, 1968. v.4.

Santaló, L. De Platão à matemática moderna. In: *Educação & Matemática,* n. 5, jul-set/1979.

Struik, D. *História concisa das matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1989.



**Profª Drª Maria Ângela Miorim**
CEMPEM - Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
Faculdade de Educação - UNICAMP