FIBONACCI E A EXPLICAÇÃO DE UM PARADOXO

*MARIA DOLORES CECCATO MENDES**

I NTRODUÇÃO

O movimento mundial mostrando a preocupação de se adequar o ensino da matemática ao interesse do aprendiz aponta muitas vezes para a necessidade da utilização de materiais didáticos alternativos e motivadores. Com essa preocupação, grande tem sido a divulgação de materiais manipuláveis, tais como quebra-cabeças e jogos de toda sorte.

Sem dúvida, a utilização desse tipo de material, quando criteriosa, só pode contribuir para o sucesso do ensino e da aprendizagem. É uma estratégia de valorização da matemática através da motivação que provoca tanto no aluno quanto no professor, desejosos de abordagens mais abrangentes e dinâmicas para suas aulas. Mormente nos dias atuais, em que os recursos de apelo visual dos meios de comunicação competem tão ostensivamente com a escola formal.

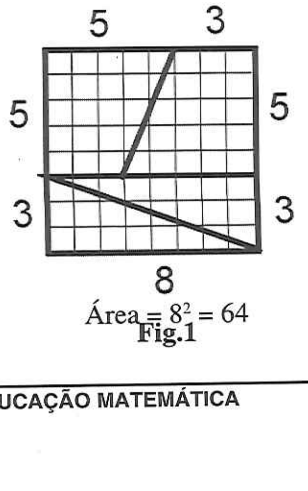
As abordagens de ontem, calcadas apenas na natureza axiomática e dedutiva da matemática (especialmente da geometria), devem, com pressa, dar lugar a uma postura mais voltada para o interesse, com apelo à experiência sensorial do aluno, respeitando o modo peculiar de organização do raciocínio em cada nível de desenvolvimento. Porém, diga-se com ênfase, nunca deverá ser absolutamente informal, sob pena de incorrer em erros fatais.

O processo lógico-dedutivo deve sempre coroar qualquer argumentação no contexto de uma situação de ensino.

2 UM PARADOXO

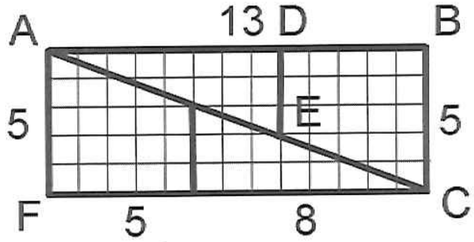
Mostramos aqui um aparente paradoxo, que ilustrará a discussão.

Um quadrado de lado 8 será dissecado conforme a ilustração:



Área = 8^2 = 64
Fig.1

Em seguida, as partes obtidas serão montadas de modo a formar um retângulo:



Área = 13 X 5 = 65
Fig.2

Observa-se a diferença de uma unidade entre as áreas das figuras, apesar de uma ter sido composta pelas partes da outra.

Importante observar nesse fato é que se nada foi acrescentado e nada foi retirado, há algum engano que a nossa visão está sendo incapaz da captar. Está aí um exemplo de que nossos sentidos físicos muitas vezes falham, assim como nossa intuição. Daí a necessidade de uma argumentação lógica – uma dedução.

3 ONDE ESTÁ A UNIDADE?

Não é difícil mostrar que a interpretação da figura 2, dada pela nossa visão, contém um erro.

Será que os pedaços assim arrumados formam uma superfície retangular, realmente? Vejamos.

Considerando o triângulo ABC, temos que $tg\hat{A} = 5/13$

Considerando o triângulo ADE, temos que $tg\hat{A} = 3/8$

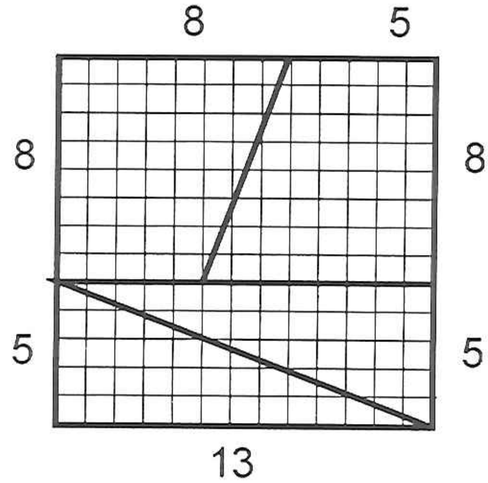
Como $5/13 > 3/8$, podemos concluir que ABC e ADE não são triângulos semelhantes, ou seja, que o lado AC do triângulo ABC não passa pelo ponto E. Em outras palavras, a linha que na Fig.2 une os pontos A e C não é um segmento de reta – ela se "quebra" no ponto E. Os nossos olhos, imperfeitos que são, nos enganaram.

Por conseguinte, a unidade que "acrescentamos" ao formar o retângulo com as peças do nosso quadrado, está distribuída ao longo da linha que une os pontos A e C.

Se o lado do quadrado inicial fosse maior, essa "fenda" ficaria mais evidente e talvez suspeitássemos mais facilmente do nosso engano.

4 SEMPRE FUNCIONA ASSIM?

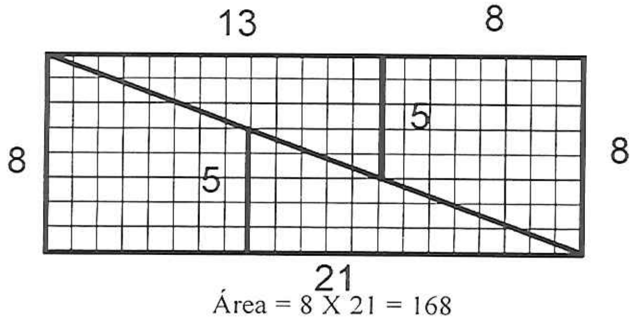
Vamos tomar agora um quadrado de lado 13 e dissecá-lo :



Área = 13^2 = 169

Fig.3

Agora vamos construir o "retângulo" conforme mostrado abaixo:



Área = 8 X 21 = 168

Fig.4

Neste caso, "sumiu" uma unidade! De modo análogo ao anteriormente utilizado, podemos localizar a unidade que foi "retirada".

Há indícios, como vimos pelos exemplos acima, de que às vezes sobra e às vezes falta uma unidade ao transformar o quadrado num "retângulo" .

5 QUANDO SOBRA? QUANDO FALTA?

Nos dois exemplos acima os lados dos quadrados não foram escolhidos ao acaso; são números especiais.

Consideremos a série abaixo, onde os termos, a partir do terceiro, são obtidos pela soma dos dois anteriores. Obtém-se assim uma série de Fibonacci[1]:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots \quad (I)$$

Observamos que os lados dos quadrados nos nossos exemplos são termos da série acima:

$$8 = 3 + 5 \text{ e } 13 = 5 + 8$$

A área do retângulo é maior ou menor que a do quadrado que lhe deu origem, dependendo de qual número da série aditiva acima escolhemos para ser o lado do quadrado. A partir daí, fica estabelecido o critério para os cortes: os lados do quadrado serão divididos de acordo com os dois números anteriores da série.

Podemos, para o propósito em questão, começar a série com os números 1 e 2:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots \quad (II)$$

Com essa série podemos montar quebra-cabeças cujos quadrados tenham lados medindo 3, 5, 8, etc.:

$$3 = 1 + 2$$
$$5 = 2 + 3$$
$$8 = 3 + 5, \text{ etc.}$$

Em qualquer seqüência de inteiros como a que estamos considerando, onde um termo é a soma dos dois precedentes, a razão de termos sucessivos se aproxima mais e mais do valor 1,618:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \cong 1{,}618 \cong \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

que é a chamado ***razão áurea***.

De fato, vejamos alguns exemplos:

$a_8 / a_7 = 34/21 = 1{,}6190476$ (por excesso)

$a_9 / a_8 = 55/34 = 1{,}6176470$ (por falta)

$a_{10} / a_9 = 89/55 = 1{,}6181818$ (por excesso)

$a_{11} / a_{10} = 144/89 = 1{,}6179775$ (por falta)

O valor da razão entre um termo e seu precedente oscila, de fato, em torno do valor 1,618 por falta e por excesso, dependendo da posição que ocupam na seqüência.

[1] *Leonardo, Filho de Bonacci, resultou Fibonacci (1175 – 1240). Matemático italiano, nascido em Pisa, também chamado Leonardo de Pisa.*

Isso explica o fato de às vezes "sobrar" e às vezes "faltar" uma unidade nos retângulos formados a partir das peças dos quadrados. Notemos que as razões acima são exatamente dadas pelos lados dos triângulos considerados dentro dos retângulos.

Notemos que, quanto maior o valor de n, mais próximo de 1,618 está a razão.

6 UMA SÉRIE ONDE TUDO DÁ CERTO

Há uma série onde tudo dá certo. Essa série é única [3] e usa a divisão áurea para fazer a dissecção do lado do quadrado.

A série (II), é, como vimos, uma série aditiva, em que a razão entre qualquer de seus termos pelo termo precedente é constante, isto é:

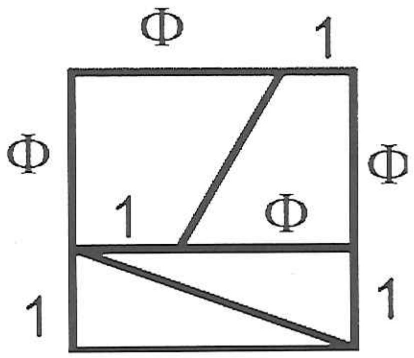
$$u_{n+1} / u_n = (\sqrt{5}+1)/2 = \Phi$$

constante para qualquer valor de n

A série abaixo, em que se usa essa razão, é chamada *Série Áurea*:

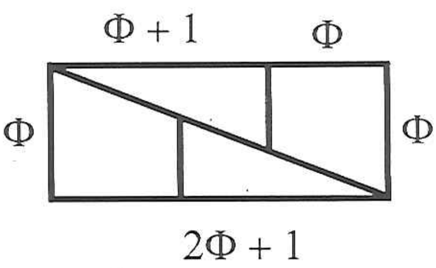
$$1,\ \phi,\ \phi^2,\ \phi^3,\ \phi^4,\ \ldots \qquad \text{(II)}$$

Seja construído um quadrado com lado igual à soma de dois números consecutivos quaisquer dessa série. Resulta, pelo quebra-cabeça proposto anteriormente, um retângulo cuja área é exatamente igual à do quadrado que lhe deu origem.



Área = $(\phi + 1)^2 = 3\phi + 2$

Fig.5



Área = $\phi(2\phi+1) = 3\phi+2$

Fig.6

Se tivéssemos escolhido $1+2\varnothing$ e $2+3\varnothing$ como números consecutivos da série, deveríamos encontrar:

Área do quadrado:

$$(3 + 5\varnothing)^2 = 55\varnothing + 34$$

Área do retângulo:

$$(5 + 8\varnothing)^2 = (5 + 8\varnothing)(2 + 3\varnothing) = 55\varnothing + 34$$

Na medida certa; sem sobrar nem faltar[2]...

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito destas páginas é, de certo modo, discutir procedimentos didáticos. Por isso, parece importante e necessário considerar como a emoção do leitor pode ser estimulante enquanto sua inteligência é exercitada ao seguir os argumentos matemáticos. Como uma idéia matemática pode ser composta, ao mesmo tempo, pelo convencimento através da lógica e comovente por sua beleza.

O objeto de estudo escolhido – o paradoxo das áreas, a série de Fibonacci relacionada com a razão áurea – para discutir a questão do uso ingênuo de material didático manipulável é tão vasto que folhas e folhas poderiam ser escritas sobre idéias com ele relacionadas.

A idéia básica é simples; muitos dos tópicos de conhecimento em Matemática no ensino fundamental poderiam fazer uso dela e do apelo à sensibilidade estética dos antigos gregos, desde os tempos de Pitágoras. Importa, sobretudo, evidenciar, além da necessidade dos argumentos lógicos, o prazer da descoberta e do aprofundamento.

[2] *Lembrando que* $\varnothing^2 = \varnothing + 1$

*Profª Drª Maria Dolores Ceccato Mendes
ICM/USP-São Carlos

8. BIBLIOGRAFIA

[1] **Ávila**, G. – Retângulo Áureo, Divisão Áurea e Seqüência de Fibonacci, *in* Revista do Professor de Matemática nº. 6, SBM, 1985.

[2] **Barbosa**, R.M. – Descobrindo Padrões Pitagóricos; Atual Ed. 1ª Edição, 1993.

[3] **Cameron**, A. J. – Mathematical Enterprises for Schools; Pergamon Press, Norwich, 1968.

[4] **Huntley**, H.E. – The Divine Proportion - A study in Mathematical Beauty; Dover Publications, INC., New York, 1970.

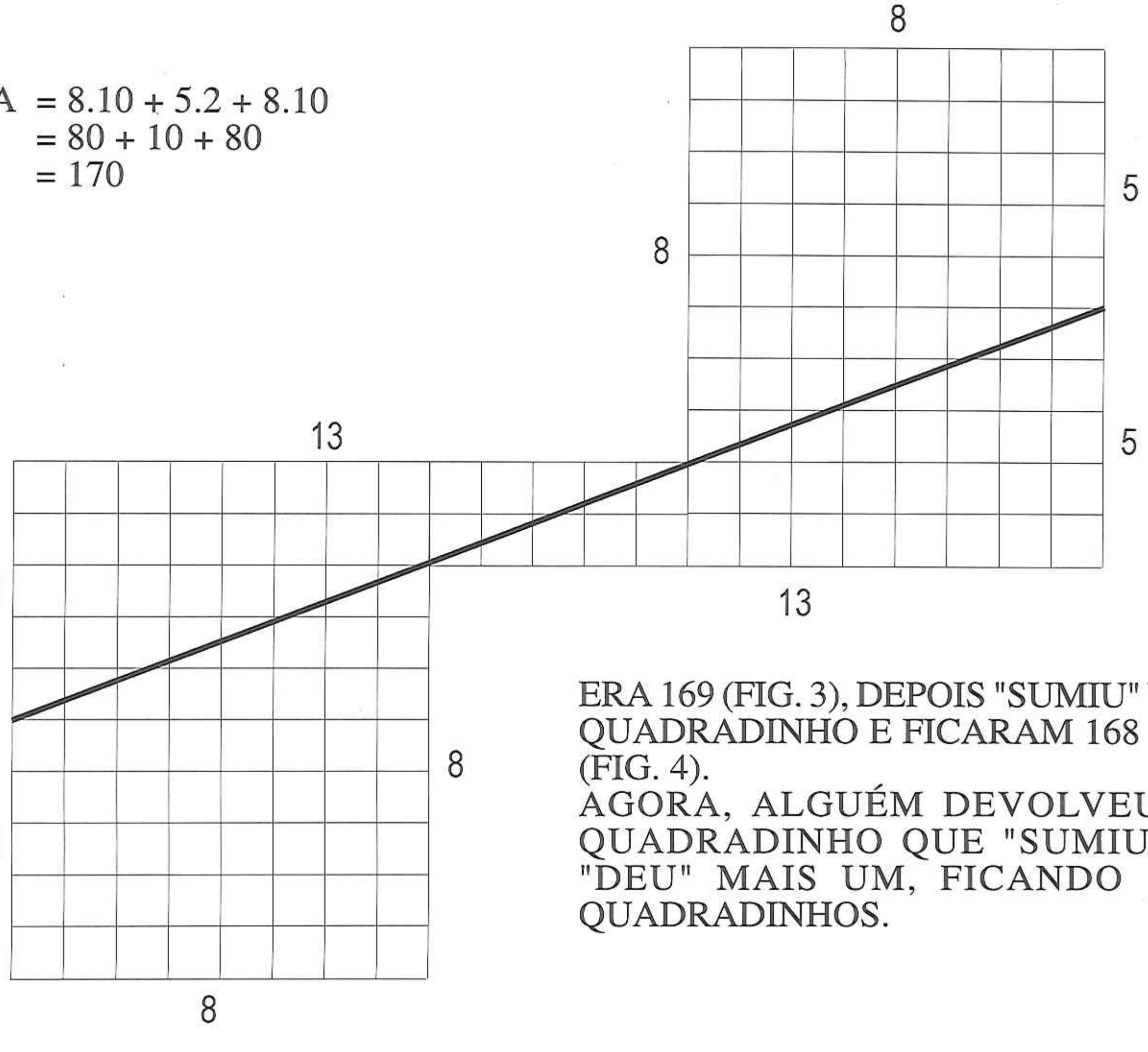
[5] **Lourenço**, M. L. & **Silva**, E. A. – Três Quebra-Cabeças, *in* Revista de Educação Matemática nº. 3, 1997.

[6] **Pappas** , T. – The Joy of Mathematics - Discovering Mathematics All Around You, Wide World Publishing, 1986.

[7] **Thomas**, D. A. – Math Projects for Young Scientists, Franklin Watts Editors, USA, 1988.

E AGORA?*

ÁREA $= 8.10 + 5.2 + 8.10$
$= 80 + 10 + 80$
$= 170$



ERA 169 (FIG. 3), DEPOIS "SUMIU" UM QUADRADINHO E FICARAM 168 (FIG. 4).
AGORA, ALGUÉM DEVOLVEU O QUADRADINHO QUE "SUMIU" E "DEU" MAIS UM, FICANDO 170 QUADRADINHOS.

* *Contribuição de "alguém" que está escondido entre o quadradinho que havia "sumido" e o quadradinho "intruso".*