

CALCULADORAS GRÁFICAS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

TELMA DE SOUZA GRACIAS
MARCELO DE CARVALHO BORBA

INTRODUÇÃO

Estudos que discutem o uso da calculadora no ensino de Matemática aparecem a partir da segunda metade da década de 70. Eles concentram-se no período de 1975 a 1980 e referem-se fundamentalmente às implicações de sua utilização na aprendizagem dos alunos (Silva, 1994). No Brasil a utilização de calculadoras com as quatro operações já era discutida em 1977 por D'Ambrósio¹.

Aqueles que apóiam o seu uso propõem ênfase na resolução de problemas em vez de procedimentos de cálculo, incentivando também o cálculo mental que é útil na estimação e verificação dos resultados fornecidos pela calculadora. Eles argumentam que as potencialidades da calculadora fazem dela um instrumento pedagógico de grande valor, além de se tratar de uma máquina de fácil manipulação, portátil e que está ao alcance das possibilidades econômicas da maioria dos alunos e de qualquer escola (Silva, 1994). Além disso, a calculadora pode representar um prototipo, uma porta aberta, um degrau para a utilização dos computadores (Machado, 1995).

Já os cépticos em relação ao uso da calculadora, por sua vez, insistem em dizer que as pessoas ficarão dependentes da tecnologia e perderão capacidades e conhecimentos com papéis importantes na Matemática.

No Brasil é proibido utilizar calculadoras em testes e exames tais como vestibulares e concursos públicos. Nas escolas há alguma abertura para a utilização da calculadora quando o conteúdo em questão não é cálculo aritmético que envolva principalmente adição, subtração, multiplicação e divisão.

Os estudos, de forma geral, apontam que a utilização da calculadora na escola não necessariamente conduzirá a conseqüências desastrosas; no entanto, esta é uma discussão que permanece ainda em aberto (Fey, 1991). De concreto, as calculadoras nunca foram massivamente incorporadas a projetos educacionais por longos períodos de tempo. No Brasil, seu uso foi apenas pontual.

Com relação à calculadora gráfica, Dunham & Dick (1994), considerando os poucos estudos realizados,

afirmam que há razões para sermos otimistas em relação ao seu uso no ensino de Matemática, embora seja uma área de estudo ainda recente e em desenvolvimento.

A calculadora gráfica possui os mesmos recursos de uma calculadora científica e produz rapidamente a representação gráfica de uma função definida por sua expressão algébrica. Algumas justificativas para seu uso são semelhantes às justificativas para usar calculadoras científicas ou com as quatro operações: a calculadora gráfica é considerada como uma ferramenta portátil e mais acessível que um computador, pois o preço de um conjunto de calculadoras gráficas é equivalente ao preço de um único microcomputador. As escolas podem comprar alguns conjuntos de calculadoras gráficas e estabelecer um revezamento de sua utilização entre as turmas de forma que os estudantes possam ter acesso às calculadoras gráficas tanto em sala de aula, como fora dela (Demana & Waits, 1992).

Algumas pesquisas têm utilizado a calculadora gráfica como um instrumento didático-pedagógico na sala de aula de Matemática (Perl, 1992 e Estes, 1990, por exemplo). Ela permite o estudo de vários conteúdos matemáticos, tais como geometria, polinômios e funções (Ruthven, 1992; Powell, 1992; Arcavi, s/d).

Provavelmente devido à sua principal característica, traçar gráficos de funções definidas por expressões algébricas, muitos estudos envolvem a utilização de calculadoras gráficas no estudo de funções, apesar das diferentes preocupações apresentadas (Ruthven, 1990; Rich, 1991; Andrews, 1992; Slavitt, 1994; Lauten et al., 1994; Smart, 1995; Gómez, 1995). A calculadora gráfica oferece a possibilidade de desenvolver um método com maior componente empírico na investigação matemática que conte também com maior ênfase em visualização (Borba, 1997).

Embora se considere que o uso da calculadora gráfica pode oferecer aos estudantes excelentes experiências de aprendizagem (Demana & Waits, 1992), tem sido apontada como necessária a realização de pesquisas sobre os efeitos desta tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática (Jensen & Williams, 1993).

Levando em conta tais considerações relativas ao custo, utilidade didático-pedagógica e flexibilidade em relação aos conteúdos que podem ser abordados, buscamos investigar o potencial da calculadora gráfica no estudo de funções. Nossa preocupação estava centrada no desenvolvimento de uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas.

¹ D'Ambrósio (1986) analisa a utilização das calculadoras com as quatro operações nas aulas de Matemática já em 1977.

O ESTUDO

Com a intenção, então, de analisar como o conteúdo funções quadráticas poderia ser estudado com o auxílio da calculadora gráfica, desenvolvemos uma proposta didático-pedagógica² para este tema que contasse com o auxílio da calculadora gráfica. Esta proposta é constituída por uma seqüência de atividades que envolvem o estudo de funções quadráticas, e esta seqüência materializa uma perspectiva de estudar o conteúdo, enfocando-se predominantemente aspectos visuais e empíricos.

Logo, nosso objetivo nesta pesquisa era apresentar uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas com o auxílio da calculadora gráfica. Desenvolvemos esta proposta com dois estudantes de 2º grau, e a partir da análise do trabalho destes estudantes com a proposta discutimos como o tema funções quadráticas pode ser estudado com o auxílio da calculadora gráfica (Souza, 1996).

Este artigo apresenta as características da proposta didático-pedagógica elaborada para trabalhar funções quadráticas com o auxílio da calculadora gráfica e discute um episódio no qual um estudante de 2º grau desenvolveu atividades que envolviam funções quadráticas e transformações.

PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Nossa proposta se apóia no uso da calculadora gráfica e enfatiza a visualização e a experimentação. Por visualização entendemos o processo de formar imagens, seja mentalmente, seja com o auxílio de lápis e papel ou tecnologia. A visualização é empregada com o objetivo de estimular o processo de descobrimento matemático, obtendo uma maior compreensão matemática (Zimmermann & Cunningham, 1991).

² É proposta didático-pedagógica na medida em que envolve uma proposta sobre ensino e sobre educação. A abordagem didática aborda a relação estudante/entrevistador/calculadora gráfica. O aspecto pedagógico considera em que direção a educação se está processando, ou seja,

- Trabalhar o conteúdo com esse meio permite ao estudante desenvolver-se em que aspectos?

- Qual o significado dessa aprendizagem?

- Como cidadão, o que fica para o estudante dessa aprendizagem (meio/conteúdo)? Como matemático, o que resulta de enfatizar predominantemente determinados aspectos?

Logo, a proposta didático-pedagógica não se resume apenas à exposição de uma seqüência de atividades que visam à aprendizagem de um conteúdo, embora se apresente para o estudante apenas como tal seqüência. Ela representa uma visão de como se podem explorar as potencialidades da calculadora gráfica.

Nas escolas, o aspecto visual é normalmente deixado em segundo plano. O estudo de funções quadráticas é mais dominado pelo aspecto algébrico. Os exercícios propostos aos estudantes envolvem, em geral, apenas manipulação algébrica e a construção de gráficos por meio de uma tabela de pontos que satisfaçam a expressão analítica. Se este tipo de trabalho é justificado pela mídia utilizada, lápis e papel, com o argumento de que, se os estudantes fossem construir os gráficos no papel, muito tempo seria gasto, a introdução da calculadora gráfica, ou mesmo um *software* gráfico, pode oferecer condições para que esse quadro seja modificado.

Uma seqüência de atividades foi elaborada para o estudo de funções quadráticas. Ela possui tarefas que abrangem o conteúdo normalmente estudado na escola e tarefas que envolvem algum conteúdo que normalmente não é abordado na escola, mas que pode vir a sê-lo por se tornar mais acessível com o auxílio da calculadora gráfica. A proposta didático-pedagógica se propõe, então, a cobrir os temas abordados em sala de aula, e a ir além, devido às potencialidades da calculadora gráfica. Neste estudo a calculadora gráfica utilizada foi a Casio fx-8700 GB³. Nesta calculadora é possível traçar dois ou mais gráficos ao mesmo tempo, ou seja, na mesma tela, o que torna possível a comparação entre eles.

A seqüência de atividades foi elaborada a partir de estudos já realizados, considerando as recomendações feitas por Movshovitz-Hadar (1988) e Goldenberg (1988), no sentido de que os estudantes devem aproveitar suas experiências prévias com funções do 1º grau no estudo de funções quadráticas. Algumas atividades são adaptações de atividades propostas por Ruthven (1992), Arcavi (s/d), Powell (1992) e Afamasaga-Fuata'i (1992).

Esta seqüência de atividades está dividida em três partes principais, sendo cada uma delas composta por uma série de atividades.

A primeira parte tem como objetivo verificar o que o estudante sabe sobre plano cartesiano e sobre função do 1º grau, $f(x)=ax+b$. Ao mesmo tempo, esta parte serve como um tutorial, na medida em que introduz comandos da calculadora gráfica.

A segunda parte introduz funções quadráticas como uma família de funções, dentre outras que o estudante traça na calculadora gráfica. Nesta parte é feito um estudo com problemas abertos sobre a relação entre os coeficientes de uma função quadrática escrita na forma $f(x) = ax^2+bx+c$ e seu gráfico.

A terceira parte abrange um estudo com questões mais fechadas que englobam os tópicos normalmente estudados na escola no 2º grau: gráficos de funções quadráticas, concavidade da parábola, crescimento e decrescimento de funções, zeros (associados com o delta), vértice e sinal de funções quadráticas.

Nestas 3 séries de atividades os estudantes começam explorando o plano cartesiano e funções do 1º grau escritas na forma $f(x)=ax+b$; trabalham com diferentes funções a fim de identificar as funções quadráticas como

³ Atualmente existem calculadoras gráficas com mais recursos e, por esta razão, esta proposta didático-pedagógica pode ser enriquecida.

uma família de funções dentre muitas; e acabam envolvidos com questões mais fechadas sobre funções quadráticas que se referem aos temas normalmente estudados na escola⁴.

De acordo com o enfoque proposto, esperávamos que os estudantes trabalhassem com funções quadráticas estabelecendo relações entre as representações, sendo capazes de associar mudanças no gráfico com mudanças nos coeficientes da expressão algébrica e vice-versa, por exemplo. Esperávamos também que este enfoque permitisse que os estudantes soubessem resolver as questões que normalmente aparecem nos livros didáticos e são consideradas na sala de aula.

METODOLOGIA

Dois estudantes de 2º. grau foram entrevistados individualmente ao trabalharem com as atividades da proposta didático-pedagógica, fazendo uso da calculadora gráfica. Foram realizadas cerca de 5 sessões de duas horas aproximadamente com cada estudante entrevistado. Este estudo pode ser visto como um “experimento de ensino” construtivista que, de acordo com Cobb & Steffe (1983), consiste basicamente de uma série de encontros individuais com um estudante por um certo período de tempo. No “experimento de ensino” construtivista o pesquisador deve estar constantemente tentando “ver” suas ações e as do estudante sob o ponto de vista do estudante, o que lhe permite compreender melhor as estratégias que o estudante utiliza.

O trabalho com “experimento de ensino” implica um processo de ensino-aprendizagem, sendo reconhecido, então, que a construção dos conhecimentos do estudante se dá também devido à sua interação com o entrevistador.

Reconhecemos que há uma grande diferença entre o ambiente de sala de aula e o ambiente de uma entrevista; no entanto, quando entrevistamos um estudante, podemos dar a ele o tempo que quiser para trabalhar em uma determinada questão, e além disso podemos criar modelos mais detalhados sobre a forma de raciocinar. Esses fatores não são possíveis em sala de aula (Borba & Confrey, 1996), pois é grande a quantidade de estudantes, e há uma diversidade ponderável entre o ritmo de trabalho de cada um deles. Esperamos, todavia, que as conclusões acerca de como os estudantes trabalharam com a calculadora gráfica possam servir de parâmetros para seu uso em outros contextos.

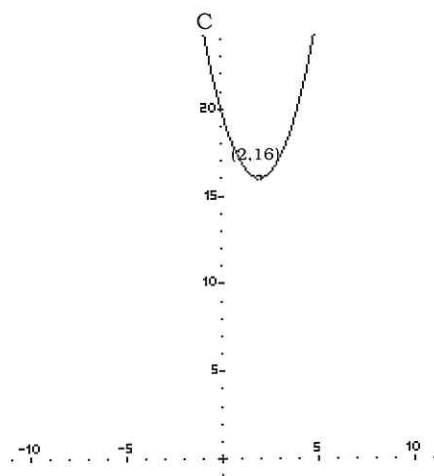
Discutiremos, agora, um episódio de um “experimento de ensino” mostrando trechos de como Alessandra trabalhou com uma atividade que envolvia funções quadráticas e suas conjecturas ao investigar o parâmetro b de funções quadráticas escritas na forma $y=ax^2+bx+c$. Alessandra, uma estudante de 2º grau, foi entrevistada por cinco sessões de duas horas, aproximadamente. Ao trabalhar em uma das atividades propostas, Alessandra

faz uma associação entre o valor do coeficiente b e o x_V .

RESULTADOS

Uma das funções traçadas na calculadora gráfica era $y=x^2-4x+20$, que não aparecia na tela da calculadora gráfica. A estudante tinha que falar sobre os coeficientes a , b e c desta função.

Alessandra primeiramente teve que encontrar a função na tela da calculadora gráfica. Ela caminhou no sentido certo, procurando a função para cima, observando a dica da atividade que dizia que o sinal da função era sempre positivo.



Ao encontrar a função, Alessandra falou que $a > 0$, por causa da concavidade voltada para cima.

Para determinar o c , Alessandra utiliza o Trace⁵ e encontra o ponto onde a parábola corta o eixo.

Utilizando ainda o comando Trace, Alessandra passa pelo vértice, cujas coordenadas são $(2, 16)$, e afirma:

A: O b é dois. Eu acho que é.

E: Você acha que o vértice coincide com o b ?

A: É.

A idéia de Alessandra era que $b = x_V$.

Pergunto de onde vem esta idéia, se nos gráficos anteriores o “vértice” [referindo-se ao x_V] coincidia com o b .

Alessandra observa os gráficos e vem com a explicação de b como o dobro do x (referindo-se ao x_V).

Ela diz que neste caso o b tem que ser menor que zero, que b é negativo para dar do lado certo (referindo-se ao fato do gráfico ter o vértice do lado direito do eixo y).

⁵ Trace é um comando da calculadora gráfica que permite percorrer o gráfico de uma função já traçada. Enquanto os pontos da função vão sendo percorridos, a calculadora fornece suas coordenadas. O Trace torna possível descobrir as coordenadas de qualquer ponto da função traçada.

⁴ A proposta didático-pedagógica completa e a discussão de sua aplicação podem ser encontradas em Souza (1996).

Assim, a estudante conclui que $b=-4$ e traça, então, o gráfico procurado:

$$y = x^2 - 4x + 20.$$

E: Como é que você viu que é 4?

A: O x [referindo-se ao x_v] é... Aqui [referindo-se ao b] é o dobro do x .

E: Agora vamos só ver uma coisa. É... você falou que o b ... Como é que você escolheu o b ?

A: Porque ele é o dobro do valor de x .

E: Isso: o dobro do valor de x . Onde? Em que ponto?

A: No vértice, nesse aqui. Aqui, olha, ele corta o... porque é 2.

E: Porque é o vértice dele, né?!

A: É.

E: Vamos ver se isso vale em outros casos.

Ao pedir para verificar se a relação encontrada⁶, $b=2x_v$, vale em outros casos, Alessandra traça vários gráficos de funções quadráticas na calculadora gráfica. Em vários casos, Alessandra verifica que a relação é válida. Somente quando traça o gráfico de $y=4x^2-4x+1$ Alessandra encontra um exemplo onde a relação não vale. Ela conclui que isto acontece porque neste caso $a = 4$.

Esta idéia, de b ser o dobro do x_v , é retomada em uma outra atividade quando Alessandra está procurando a fórmula de uma função quadrática, cujas raízes são 3 e -1.

É importante ressaltar aqui que, ao associar b como dobro do x_v Alessandra está, na verdade, pensando no módulo de b , pois o sinal deste coeficiente ela determina olhando para o vértice da parábola: se a parábola tiver concavidade voltada para cima, então $b > 0$ se o vértice estiver à esquerda do eixo y e $b < 0$ se o vértice estiver à direita do eixo y . Em relação à validade desta relação, as investigações de Alessandra permitiram que ela concluísse que a relação só é válida quando $a=1$ ou $a=-1$.

$$\text{De fato: } x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow -b = 2ax_v \rightarrow b = -2ax_v$$

$$\text{se } a = \pm 1 \text{ então } |b| = |2x_v|$$

DISCUSSÃO

As conclusões de Alessandra sobre o coeficiente b foram possíveis devido à experiência visual com os gráficos. A visualização teve um papel importante na compreensão da relação entre os coeficientes de uma função quadrática e seu gráfico, uma vez que serviu de guia para as investigações da estudante.

⁶ Esta mesma relação, $b=2x_v$, foi encontrada por outro estudante que participou do estudo piloto e trabalhou com esta atividade (Souza & Borba, 1995). Embora o piloto não tenha contado com tantas atividades, podendo ser considerado como uma pré-proposta, a idéia de trabalhar com os estudantes segundo as 3 partes já estava presente.

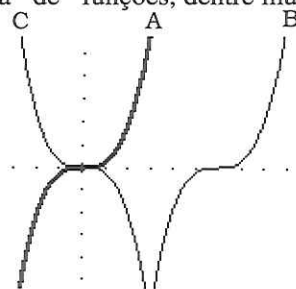
O enfoque proposto permitiu, como considera Borba (1993), que justificativas visuais fossem encontradas para relações algébricas e vice-versa. Alessandra, por exemplo, elaborou a conjectura de b como o dobro de x_v : uma relação encontrada na representação gráfica - a posição do vértice - é explicada por Alessandra através de relações na representação algébrica. Neste sentido, este enfoque com ênfase em visualização abre novas opções no estudo de Matemática para aqueles que são bloqueados em relação à Álgebra. Os estudantes que têm mais dificuldade ou resistência em trabalhar algebricamente com os conceitos podem encontrar na visualização uma outra opção de investigação matemática. Como ressaltava Borba (1994), a importância da visualização não deve ser utilitária, no sentido de ajudar na compreensão da Álgebra como ela realmente é ou resolver os problemas da educação matemática; a visualização deve ser vista como um modo particular de conhecer, dentre muitos, que é parte da atividade matemática.

Além do enfoque visual, a calculadora gráfica permitiu que os estudantes estudassem funções por meio de previsões, testes e generalizações, num ambiente rico de investigação, como já foi detectado por Smart (1995) e por Jensen & Williams (1993).

O "aspecto empírico" favorecido pela calculadora gráfica permitiu, por meio da construção dos gráficos, que os estudantes reavaliassem constantemente suas hipóteses e conjecturas, de acordo também com o trabalho de Ruthven (1992). Trabalhando com atividades que envolviam previsões sobre os coeficientes de determinados gráficos de funções quadráticas, a estudante se envolveu em uma rica discussão matemática que incluiu até a identificação de transformações.

A construção dos gráficos auxiliou a estudante a visualizar os diferentes tipos de mudanças que eles sofrem quando suas expressões algébricas são alteradas. Desta forma, Alessandra foi capaz de relacionar mudanças no gráfico com mudanças nos coeficientes da expressão, e vice-versa. Deste modo consideramos que o *design* da proposta influenciou o modo como os estudantes compreenderam função quadrática.

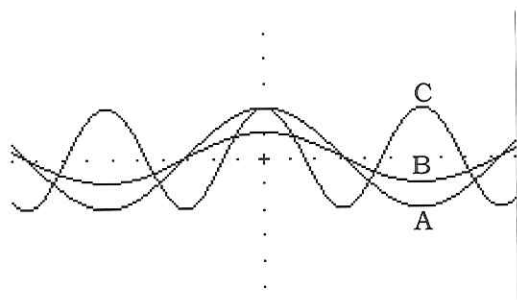
Além de enfatizar os componentes visual e empírico, essa proposta didático-pedagógica introduz gráficos de funções de várias famílias. Isto é feito na parte II da proposta. As atividades desta série têm por objetivo introduzir gráficos de diferentes funções, tais como $f(x) = x^3$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = 1/x$, ... , incluindo funções quadráticas, permitindo que o estudante estabeleça diferenças entre eles e trabalhe com função quadrática como uma família de funções, dentre muitas.



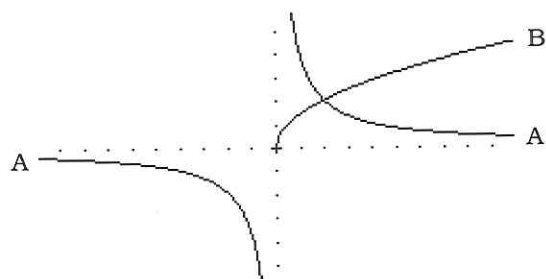
A: $y = x^3$

B: $y = (x-3)^3$

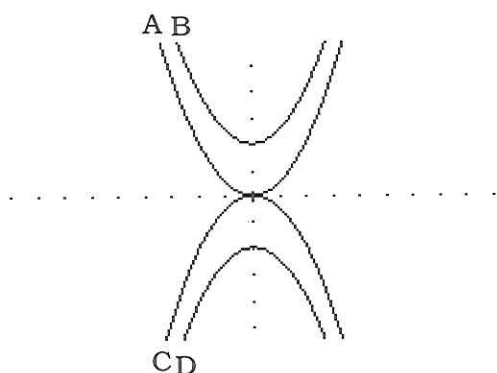
C: $y = -x^3$



A: $y = \cos x$ B: $y = \cos 2x$ C: $y = 0.5 \cos x$



A: $y = 1/x$ B: $y = \sqrt{x}$



A: $y = x^2$ B: $y = x^2 + 1$
 C: $y = -x^2$ D: $y = -x^2 - 1$

O trabalho com gráficos de funções quadráticas permitiu aos estudantes relacionar transformações nos gráficos das funções com alterações nos coeficientes, tema que não é normalmente tratado em sala de aula. Esta forma de introduzir gráficos de diferentes funções teve, portanto, um resultado promissor, devendo ser mais investigado em futuras pesquisas a fim de verificarmos se os aspectos positivos do seu uso se confirmam.

Por outro lado, para aqueles que têm a preocupação de que os conteúdos atualmente abordados na escola não sejam perdidos com o uso desta mídia, há indícios de que é possível aprender temas normalmente estudados na escola com o auxílio da calculadora gráfica. Se este fato se confirmar em outras pesquisas, este poderá vir a ser um importante argumento contra a resistência de professores que pensam que a calculadora gráfica é prejudicial por não permitir o estudo de tais temas.

Consideramos necessária e importante a realização de uma pesquisa em sala de aula que utilize novas versões da proposta didático-pedagógica aqui estudada para que outras interações como estudante-estudante e estudante-professor possam ser incorporadas a este estudo. Como há muito poucos estudos no Brasil que envolvem a utilização de calculadoras gráficas, este estudo pode fornecer aos professores várias indicações de como lidar com as estratégias dos estudantes, dando alguns exemplos de como podem ser estas estratégias. Além disso, as discussões deste trabalho podem interessar especialmente a professores e estudantes que têm disponibilidade de utilizar calculadoras gráficas ou *softwares* que permitam o trabalho com ênfase em visualização, como, por exemplo, *softwares* de representações múltiplas. Àqueles que não têm acesso a recursos informáticos sugerimos uma adaptação das atividades da proposta didático-pedagógica aqui apresentada a fim de que funções quadráticas sejam trabalhadas com ênfase em visualização. Sugerimos também aos educadores, a partir deste estudo, a utilização de um enfoque com ênfases visuais e empíricas não apenas no estudo de funções quadráticas, mas também no estudo de funções em geral, e de outros assuntos matemáticos que possuem descrições visuais.

Telma Souza Gracias

Marcelo Carvalho Borba

GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

home page: <http://www.igce.unesp.br/igce/pgem/gpimem>

e-mail: tasouza@caviar.igce.unesp.br

mborba@caviar.igce.unesp.br

BIBLIOGRAFIA

- Afamasaga-Fuata'i, K. (1992). *Students' strategies for solving contextual problems on quadratic functions*. Tese de doutoramento, Cornell University, Ithaca, NY, USA.
- Andrews, P. (1992). If all else fails, read the instructions. *Mathematics Teaching*, n. 140, p. 34-36, Sept.
- Arcavi, A. (s/d.) Texto mimeografado. The Weizmann Institute of Science - Department of Science Teaching.
- Borba, M. C. (1993). *Funções, representações múltiplas e visualização na educação matemática*. Anais do 1o. Seminário Internacional de Educação Matemática no Rio de Janeiro - IM/UFRJ, Julho.
- Borba, M.C. (1994). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*. Tese de doutoramento, Cornell University, 1993. Lisboa: Associação de Professores de Portugal.
- Borba, M. C.; Meneghetti, R. C. G.; Hermimi, H. A. (1997) Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. São Paulo, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 5, no 3, pp. 63-70.
- Borba, M.C. & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics* 31, p. 319-337.
- Cobb, P. and Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (2), p. 83-94.
- D'Ambrósio, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas.
- Demana, F. & Waits, B.K. (1992). A computer for all students. *The Mathematics Teacher* 85(2), p. 94-95.
- Dunham, P.H. & Dick, T.P. (1994). Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher* 87(6), p. 440-445.
- Estes, K. (1990). Graphics technologies as instructional tools in applied calculus: Impact on instructor, students, and conceptual and procedural achievement. *Dissertation Abstracts International*, 51 (4), p. 1147-A.
- Fey, J.T. (1991). Tecnologia e educação matemática - uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. *Cadernos de Educação e Matemática*, n. 2, p. 45-79, Jul.
- Goldenberg, P.E. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour* 7, p. 133-173.
- Gómez, P. (1995). *Interacción social, discurso matemático y calculadora gráfica en el salón de clase*. Una proximación experimental. Memoria de Tercer Ciclo. Bogotá: una empresa docente.
- Jensen, R.J. & Williams, B.S. (1993). Technology: Implications for middle grades mathematics. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 225-243). New York: Macmillan and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics
- Lauten, A.D.; Graham, K.; Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: interaction with the graphics calculator. *Journal of Mathematical Behavior* 13: 225-237.
- Machado, N.J. (1995). *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez.
- Movshovitz-Hadar, N. (1988). *Picturing quadratic functions*. A paper presented at the 5th Conference of Israel Computer Using Educators Association, Tel-Aviv, April.
- Perl, H. (1992). *The graphic calculator as an integral part of high school mathematics*. Anais do Working Group 17 (Technology in the Science of the Mathematics Curriculum) at ICME-7 (7th International Congress on Mathematics Education), Quebec, pp. 185-190.
- Powell, A. (1992). *Mathematics 300*. College Readiness Program '92.
- Rich, B.S. (1991). The effect of the use of graphing calculators on the learning of function concepts in pre-calculus mathematics. *Dissertation Abstracts International* 52 (3), p. 835-A.
- Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics* 21: 431-450.
- Ruthven, K. (1992). *Graphic calculators in advanced mathematics*. NCET.
- Silva, A.V. (1994). *A calculadora no percurso de formação de professoras de Matemática*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, 1991. Lisboa: Associação de Professores de Portugal
- Slavit, D. (1994). *The effect of graphing calculators on students' conceptions of function*. Apresentado no encontro anual AERA (American Educational Research Association), New Orleans, EUA, Abril.
- Smart, T. (1995). *Visualising quadratic functions: a study of thirteen-year-old girls learning mathematics with graphic calculators*. Anais do PME 19, vol. 2, Recife, Brasil, 22-27 Julho, pp. 272-279.
- Souza, T.A. (1996). *Calculadoras gráficas: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas*. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro.
- Souza, T.A. and Borba, M.C. (1995). *Quadratic functions and graphing calculator*. Anais do PME 19, vol. 1, Recife, Brasil, 22-27 Julho, p. 253.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: what is mathematical visualization? In: *Visualization in teaching and learning mathematics*. Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds). pp. 1-8.