# EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU: UMA RESOLUÇÃO MUITO ANTIGA

*MARCOS LUIZ LOURENÇO **

## 1 INTRODUÇÃO:

Neste artigo vamos discutir um processo de resolução de equações do primeiro grau com base em informações obtidas junto à História da Matemática. Os dados históricos e a forma sugerida referem-se às orientações contidas nos papiros de Moscou (1850 a. C.) e de Rhind (1650 a. C.), hoje conhecidas como **regra da falsa posição**. As fontes históricas são escassas e, geralmente, não vão além de alguns exemplos. Embora raros, os exemplos e os comentários encontrados nos textos históricos, podem se constituir em um importante ponto de partida para a elaboração de uma seqüência de atividades que facilitam a aprendizagem da resolução das equações de primeiro grau. Além da apresentação da regra da falsa posição feita através da apresentação de exemplos, faremos uma resolução genérica destacando o princípio empregado no método. Finalmente, após uma justificativa geométrica, apresentaremos uma proposta de ensino, utilizando a regra da falsa posição como forma didática, para alunos de sextas séries.

## 2 PROBLEMAS ANTIGOS

Um dos problemas encontrados nos textos de história da Matemática pode ser formalizado da seguinte forma: Determine o peso de uma pedra sabendo-se que *ela* mais *um sétimo* dela mesma mais *um onze* avos somada com *seu* peso mais *um sétimo* dele mesmo *é uma mina.*

Com a simbologia atual este problema pode ser representado pela expressão

$$(x+\frac{x}{7}) + (\frac{1}{11}) + (x+\frac{x}{7}) = 1$$

Outro problema, encontrado num texto da Babilônia antiga, nos conduz a duas equações lineares simultâneas, com duas incógnitas chamadas, respectivamente, de *"primeiro anel de prata"* e *"segundo anel de prata"*.

Representando as duas variáveis, respectivamente, por x e y, as equações podem ser escritas como $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=1$ e $\frac{6x}{7}=\frac{10y}{11}$. Neste caso o texto apresenta a resposta como:

$$\frac{x}{7}=\frac{11}{7+11}+\frac{1}{72} \text{ e } \frac{y}{11}=\frac{7}{7+11}-\frac{1}{72}.$$

O método utilizado para a resolução das equações é parcialmente descrito e sugere a substituição de cada *"mão"* por 5 *"dedos"* e observa que uma largura de 20 e um comprimento de 30 dedos satisfazem a ambas as equações. A solução é determinada utilizando um método equivalente ao hoje conhecido como substituição de variáveis (por meio de combinação de equações, expressam todas as variáveis em termos de mãos). Com nossa simbologia, fazendo comprimento e largura respectivamente iguais a **x** e a **y** o problema pode ser equacionado pelas expressões **y + 4x = 28** e **x + y = 10**. Subtraindo a segunda da primeira tem-se o resultado **3x = 18**; de onde vem **x = 6** *mãos* ou 30 dedos e **y = 20** *dedos*.

Os papirus de Rhind e de Moscou apresentam 110 problemas, muitos dos quais deixam transparecer suas origens práticas ao lidarem com questões tais como *"quão substanciosos eram o pão e a cerveja"*, sobre *balanceamento de rações para gado e aves domésticas* e sobre *armazenamento de grãos.*

Para muitos desses problemas a resolução não exige mais do que uma equação linear simples.

## 3 RESOLVENDO EQUAÇÕES

Observando as informações antigas e escrevendo-as com a simbologia atual, podemos compreender o método empregado pelos antigos gregos e babilônios para a resolução de equações do primeiro grau. O procedimento utilizado po eles tornou-se conhecido com **regra da falsa posição** e pode ser analisado através de um exemplo.

Dada a equação $x+\frac{x}{7}=24$ os antigos resolviam-na da seguinte forma:

1. atribui-se um valor qualquer (conveniente) para **x**, por exemplo x = 7.

Neste caso tem-se $x+\frac{x}{7}=7+\frac{7}{7}=8$. O valor desejado (24) pode ser obtido multiplicando-se o valor encontrado (8) por 3, o que sugere que o valor inicial atribuído a $x$ ($x$ = 7 ) deve ser multiplicado por 3 para se obter o valor real da variável, portanto, o valor real da incógnita deve ser **x = 3.7 = 21**.

** Professor da UNIRP e Professor Assistente Doutor aposentado do IBILCE/UNESP*

## 4 DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Os exemplos descritos nos livros de história da matemática permitem resumir o método utilizado em duas etapas. Na primeira delas procura-se atribuir à incógnita um valor que elimine o denominador das frações existentes (atribui-se a $x$ o valor igual ao denominador da fração). A segunda etapa consiste em utilizar uma "regra de três" com o valor (falso) atribuído a $x$ correspondendo ao valor (falso) do resultado encontrado e o valor esperado (valor real) de $x$ correspondendo ao valor dado pela equação. Os exemplos resolvidos a seguir facilitam o entendimento do processo.

***Exemplo 1:*** Qual o valor de "aha" sabendo que "aha" mais 1/7 de "aha" é igual a 19.[2]

Utilizando a notação atual podemos traduzir o problema acima com a equação:

$$x+\frac{x}{7}=19$$

*supondo x=7 obtem-se:*

$$x+\frac{x}{7}=7+\frac{7}{7}=8$$

Utilizando uma "regra de três simples" podemos encontrar o valor real de x

$$\begin{array}{cc} 7 & 8 \\ x & 19 \end{array}$$

de onde vem $x = 7.19/8 = 133/8$

***Exemplo 2:*** Determinar o valor de x na expressão:

$$x+\frac{1}{4}x=15$$

Solução:

Supondo x = 4 teremos

$$x+\frac{1}{4}x=4+\frac{1}{4}.4 \quad = \quad 4+1 \quad = \quad 5$$

Utilizando o princípio da "regra de três" teremos:

$$\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ x & 15 \end{array}$$

de onde vem

$$\frac{x}{4}=\frac{15}{5} \Rightarrow x=\frac{4.15}{5}=12$$

[2] *O termo "aha" significa monte e é utilizado para designar a variável.*

**OBSERVAÇÃO** - *Determinar o valor de x real utilizando a regra de três é o mesmo que multiplicar o valor inicialmente atribuído a x pelo quociente entre o valor desejado e o valor encontrado. No primeiro exemplo temos x = 7. (19/8) e no segundo temos x = 4. (15/5).*

## 5 CASO GERAL

A descrição do método da falsa posição e a resolução de alguns exercícios, em geral, são suficientes para que se tenha uma credibilidade no método de resolução apresentado, entretanto, mais por curiosidade do que por necessidade vamos resolver o "*caso geral*" e comparar a regra da *falsa posição* com a técnica que empregamos hoje na resolução de equações do primeiro grau.

A resolvermos o "caso geral" estaremos nos afastando dos exemplos deixados nos textos históricos mas, certamente, não fugiremos do raciocínio empregado por eles.

Assim, da a equação $ax+\frac{bx}{c}=d$, vamos resolvê-la de duas maneiras

1) Resolução pelo método da falsa posição:

Supondo $x = c$ temos:

$$ax+\frac{bx}{c}=ac+\frac{bc}{c}=ac+b = d'$$

Se d' = d, então x = c. Se d' ≠ d, então $x=\frac{d.x'}{d'}$

(produto do valor falso atribuído à variável ($x$ ) multiplicado pelo quociente entre o resultado desejado (d ) e o resultado encontrado (d')).

Como : $x' = c$ e $d' = ac+b$, tem-se:

$$x=\frac{d.c}{ac+b}$$

2) Resolução pelo método atual:

$$ax+\frac{bx}{c}=d$$

$$\frac{cax+bx}{c}=d$$

$$cax+bx=c.d$$

$$x(ca+b)=c.d$$

$$x=\frac{c.d}{ac+b}$$

Comparando as soluções encontradas podemos dizer que os dois métodos se equivalem, ou seja, o método do valor da falsa posição (conhecido há mais de quatro mil anos) e o método ensinado hoje em dia se diferenciam apenas pela aparência.

## 6 RESUMO DO MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

6.1 Atribui-se um valor qualquer para a variável (x).

6.2 Determina-se o valor numérico da expressão, com o valor suposto para x.

6.3 Verifica-se se o resultado obtido é o número desejado.

6.4 Se o resultado obtido for diferente do resultado desejado, determina-se o valor real de x, utilizando-se uma regra de três simples.

O método (e seu resumo) ficam mais claros através de um exemplo.

Seja a equação **x + x/3 = 32**

Sua resolução pelo método da falsa posição:

$$x + \frac{1}{3}x \; = \; 32$$

*se* $x = 3$

*teremos*:

$$x + \frac{1}{3}x \; = \; 3 + \frac{1}{3}3 \; = \; 3 + 1 \; = \; 4$$

*como* $4 \neq 32$ *ficamos com*:

$$x \; = \; 3.\frac{32}{4} \; = \; 3.8 \; = \; 24$$

## 7 COMPLEMENTO

### 7.1 Porque funciona

As equações resolvidas pelos antigos gregos e babilônios eram, principalmente do tipo a.x = b, com **a** e **b** naturais, ($x + \frac{x}{7} = 24$ pode ser escrita como $(1 + 1/7)x = 24$). Trata-se pois de uma função linear, com representação genérica do tipo y = a.x. Seu gráfico, como sabemos, é uma reta, que pode, genericamente ser representado como na figura 1.

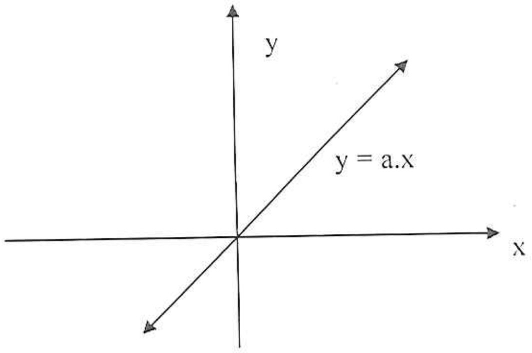


**figura 1**

Resolver uma equação do tipo **a.x = b** ,é determinar o valor de **x** para o qual **y** é igual a **b** (pode-se fazer a pergunta: para qual valor de x temos y igual à b?). A resolução pelo valor falso pode ser interpretada graficamente e, consiste em, atribuindo-se à **x** um valor qualquer **m**, vamos determinar, para **y** o valor correspondente **n**, tal que o par **(m, n)** pertence ao gráfico da função.

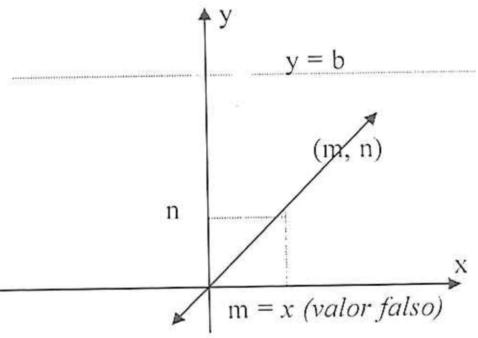


**figura 2**

No caso de **n** ser diferente de **b**, podemos "*completar*" a figura 2, conforme nos sugere a figura 3

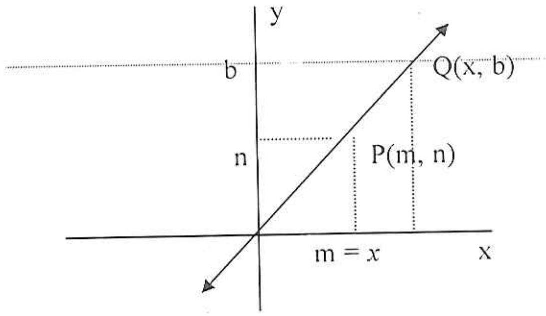


**figura 3**

Podemos destacar na figura 3 os triângulos **OmP** e **OxQ**. Esses dois triângulos retângulos são semelhantes entre si e seus catetos podem ser facilmente determinados (suas medidas coincidem com as coordenadas dos pontos **P** e **Q**). A semelhança entre os dois triângulos garante a proporcionalidade entre seus lados correspondentes e, assim, podemos escrever: $\frac{m}{n} = \frac{x}{b}$ .

No caso da equação inicial se apresentar na forma **a.x + b = c** (correspondente a **y = ax +c**) a adaptação do gráfico é muito simples e o resultado final não se altera.

A justificativa aqui apresentada nos é muito familiar, principalmente quando trabalhamos com geometria analítica plana. O procedimento utilizado neste estudo talvez nos permita efetuar a seguinte indagação: *a regra da falsa posição não seria, historicamente, um germe gerador da função linear com sua respectiva representação no plano cartesiano?*

### 7.2 Resolvendo problemas

A regra da falsa posição pode ser empregada na resolução de inúmeros problemas. Vejamos alguns exemplos.

**1** - Qual é o número cuja terça parte somada com sua quarta parte resulta 56?

**Resolução.**

Supondo que o número procurado seja 12, teremos:
1/3 de 12 é **4**
1 /4 de 12 é **3**
A soma da terça parte com a quarta parte seria 3 + 4 = 7
Neste caso podemos escrever:
De onde vem x = 56.12/7, ou seja x = 96

**2** - Qual é o número que quando dividido por 5 e por 7 resulta quocientes cuja diferença é 26?

**Resolução.**

Suponhamos que o número desejado seja 35. Neste caso teríamos 35:5 = 7 e 35:7 = 5

Neste caso a diferença entre os quocientes seria 7 – 5 = 2

Neste caso podemos escrever:

x/26 = 35/2 de onde vem x = 26.35/2 , ou seja x = 455

3. Determine dois números cuja soma seja 41 e cuja diferença é 13.

**Resolução**

Suponhamos 5 o menor dos números. Neste caso o maior é 5 + 13 = 18.

Neste caso a soma dos dois números seria 23.

O raciocínio que empregamos até aqui não pode ser empregado neste problema pois, em todas as questões anteriores dispunhamos de proporcionalidade simples entre o número desejado e o número suposto verdadeiro (tomando-se para x um valor **m** vezes o valor inicial o resultado não se torna **m** vezes o resultado obtido inicialmente – no caso, supondo x = 10 ( o dobro de 5) obteremos para a soma o valor 33 e não 46 (o dobro de 23).

Neste caso devemos procurar um pouco mais.

Supondo que o número menor seja **6** teremos: o maior será **19** e a soma dos sois será **25**

Supondo que o número menor seja **7** teremos: o maior será **20** e a soma dos sois será **27**

Supondo que o número menor seja **8** teremos: o maior será **21** e a soma dos sois será **29**

Supondo que o número menor seja **9** teremos: o maior será **22** e a soma dos sois será **31**

Podemos observar que:

à diferença 1 entre a primeira e a segunda hipóteses (6 – 5) corresponde uma diferença 2 entre os resultados obtidos,

à diferença 1 entre a segunda e a terceira hipóteses (7 – 6) corresponde uma diferença 2 entre os resultados obtidos,

à diferença 1 entre a terceira e a quarta hipóteses (8 – 7) corresponde uma diferença 2 entre os resultados obtidos,

à diferença 1 entre a quinta e a quarta hipóteses (9 – 8) corresponde uma diferença 2 entre os resultados obtidos,

à diferença 2 entre a primeira e a terceira hipóteses (7 – 5) corresponde uma diferença 4 entre os resultados obtidos,

à diferença 2 entre a quarta e a segunda hipóteses (8 – 6) corresponde uma diferença 4 entre os resultados obtidos,

à diferença 3 entre a primeira e a quarta hipóteses (8 – 5) corresponde uma diferença 6 entre os resultados obtidos.

Se continuarmos, poderemos observar que à uma diferença **m** entre as hipóteses corresponderá um diferença **m vezes maior** entre os resultados, o que nos indica que as diferenças entre as hipóteses são proporcionais às diferenças entre os resultados. Assim podemos escrever:

$$\frac{6-5}{25-23}=\frac{x-5}{41-23}$$

De onde vem (x – 5).2 = 18, ou seja x = 14
Se o número menor é 14 o maior será 14 + 13 = 27.
Portanto os números procurados são **14** e **27**.

### 7.3 Uma proposta para o ensino

Com base nos estudos aqui desenvolvidos elaboramos uma proposta para ensino de equações com uma variável, para ser utilizada nas escolas de primeiro grau - sextas séries.

As sugestões se iniciam com uma pequena introdução histórica e se completam com a descrição do método utilizado pelos egípcios/babilônios, de forma tal que, ao final do processo os alunos deverão saber resolver qualquer tipo de equação do primeiro grau.

O comentário final destina-se aos professores e não aos alunos.

## EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU UMA RESOLUÇÃO MUITO ANTIGA

Alguns textos[3] de história da Matemática sugerem que os antigos gregos e babilônios já resolviam equações lineares. O método utilizado por eles tornou-se conhecido como a *"regra da falsa posição"* e sua descrição, em geral, restringe-se à resolução de um exemplo acompanhado de instruções que indicam o que se deve fazer. Em termos atuais, com o uso de nossa simbologia a regra da "falsa posição" pode ser descrita da seguinte forma:

Seja resolver a equação: $x + \frac{x}{5} = 24$

Suponhamos[4] $x = 5$ , neste caso temos

$$x+\frac{x}{5}=5+\frac{5}{5}=5+1=6$$

Como o resultado deve ser 24 e não 6, devemos multiplicar 5 por[5] 4

portanto o valor real de **x** é 5.4 = **20**

Vejamos mais dois exemplos.

1. $x + \frac{x}{7} = 48$

suponhamos $x = 7$

teremos $x+\frac{x}{7}=7+1=8$

como 6.8 = 48 , podemos concluir que x = 6.7 = **42**

2. x + x/3 + 2x/3 = 24

Suponhamos $x = 3$, teremos

$x + x/3 + 2x/3 = 3 + 1 + 2 = 6$

como 6.4 = 24

Assim teremos:

**x = 12**

A regra da falsa posição pode ser explorada um pouco mais, mesmo que deixemos de lado os exemplos dos textos históricos. Vamos supor que desejemos resolver a equação

x/3 + x/4 = 42

Um valor "conveniente[6]" para $x$ é 12. Neste caso teremos:

$x/3 + x/4 = 12/3 + 12/4 = 4 + 3 = 7$

ou seja, o valor real de **x** é 12.6 = **72**

Para desenvolver a confiança ou a credibilidade no método, resolva os exercícios abaixo, utilizando o princípio da "falsa posição"

1. 2x/3 + x = 50
2. x + x/3 + 2x/3 = 36
3. x - x/10 = 18

[3] *Papiros de Rhind (1650 a.C.)e de Moscou (1850 a.C.).*

[4] *Poderia ser um outro valor qualquer; escolhe-se x = 5 para eliminar o denominador da fração.*

[5] *6 deve ser multiplicado por 4 para resultar 24 (ou 24/6 = 4).*

[6] *Este valor elimina os dois denominadores.*

## CASO GERAL

Apenas para efeito de generalização, vamos resolver *equações literais*,[7] isto é, suponhamos que desejemos determinar o valor de **x** aplicando as instruções do valor da "regra da falsa posição" nas equações

1. $x+\frac{x}{a}=b \qquad a \neq 0$

Suponhamos $x$ = a, teremos:

$x + x/a = a + 1$.

Supondo[8] b ≠ a + 1, teremos:

**x** = a.(b/a+1) = **ab/(a+1)**

2. $a.x + \frac{x}{b} = c, \qquad (b \neq 0)$

Suponhamos $x$ = b, teremos

a.$x$ + $x$/b = a.b + 1.

Supondo a.b + 1 ≠ c, teremos

**x = b.c/(a.b + 1)**

3. $a.x + \frac{bx}{c} = d, \quad (c \neq 0)$

Suponhamos $x$ = c, termos:

a.$x$ + b$x$/c = a.c + b

Supondo ac + b ≠ d, teremos

**x = cd/(a.c + b)**

## CASO "*PARTICULAR*" IMPORTANTE

Nada do que conhecemos nos autoriza a supor que os povos antigos se interessassem por soluções gerais ou por soluções *particulares*, como a que vamos sugerir. Entretanto, ainda que por simples curiosidade, e com a intenção de estudar um pouco mais, consideremos a equação:

x + x/3 = 32

e suponhamos ***x* = 1** **(valor falso)**.

Neste caso teremos:

$x + x/3 = 1 + 1/3 = 4/3$.

De acordo com as instruções descritas, para encontrar o valor real de **x**, devemos multiplicar o valor falso ($x = 1$) pelo quociente entre o **valor desejado e o valor obtido**. Neste caso teremos:

x = 1. 32/(4/3) = **32.3/4 = 24**

Curiosamente, com a técnica que dispomos hoje, poderíamos resolver a equação **x + x/3 = 32** da seguinte forma:

[7] *Os textos consultados não sugerem, em momento algum, que os gregos e babilônios tenham resolvido ou mesmo se interessado em resolver equações deste tipo (literal), entretanto, como exercício teórico e, desejando apenas comparar a regra da **falsa posição** com o método atual, podemos fazer este exercício e "resolver" algumas equações especiais.*

[8] *Se **b = a + 1** o valor suposto para **x** e o valor real de **x** coincidem.*

$$x + x/3 = 32$$
$$x(1 + 3/4) = 32$$
$$4x/3 = 32$$
$$x = 32/(4/3)$$
$$x = 32.3/4$$
$$\mathbf{x = 24}$$

Comparando as duas soluções parece evidente a existência de uma equivalência entre os dois processos, o que sugere que o método da falsa posição e o modelo atual, para resolução de equações lineares traduzem o mesmo pensamento matemático, embora entre as duas existam 4.000 anos de evolução.

## 8 Conclusão

Com os estudos desenvolvidos podemos concluir que, embora os antigos egípcios e babilônios não conhecessem a representação algébrica para a resolução das equações do primeiro grau, o princípio da falsa posição indica que, em termos de raciocínio eles se equiparavam ao utilizado nos dias atuais (para resolução de equações do primeiro grau), pois, os passos descritos nada mais são do que a seqüência que hoje utilizamos aplicando os conceitos e propriedades estruturais modernas.

## BIBLIOGRAFIA

BAUMGOST J. K. - Tópicos de Histórias da Matemática para uso em sala de aula - Álgebra, Atual Editora, São Paulo, 1992

BOYER, C. B. - História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltada, São Paulo, 1974

EVES, H. - Introdução à História da Matemática, Editora UNICAMP, São Paulo 1995

KALSON P., A Magia dos Números, Editora Globo, São Paulo, 1961