

Cañadas, M. C., Crisóstomo, E., Gallardo, S., Molina, M., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M. (2005). *El papel como material didáctico en la construcción de la geometría plana*. En Sales, P.; da Veiga, C.; Balbuena, L.; García, S.; García, J. E.; Guerrero, S.; Moya, J. A. (Eds.), *Actas de las XII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 973-977). Albacete: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

## **Taller: El Papel como Material Didáctico en la Construcción de la Geometría Plana**

AUTORES<sup>1</sup>:

M<sup>a</sup> Consuelo Cañadas Santiago, Edson Crisóstomo do Santos, Sandra Gallardo Jiménez, Marta Molina González, María Peñas Troyano. (Los nombres de los coautores están ordenados alfabéticamente).

*grupo\_pi@yahoo.es*

### **Resumen**

La geometría en el currículo de secundaria se introduce con la intención de proporcionar al alumno una mayor capacidad de comprensión de la organización espacial del mundo que nos rodea, exigiendo para ello un aprendizaje sistematizado. Con este propósito, el “Grupo PI” trabaja en el desarrollo de actividades para el aula utilizando un material económico y de fácil adquisición como es el papel. El objetivo es proporcionar al profesor un material eficaz para el trabajo en el aula y aproximar a los alumnos a la Geometría Plana a través de una serie de tareas estructuradas que logran una mayor significatividad del proceso de aprendizaje. Se emplearán axiomas del origami para crear secuencias que permitan la construcción de representaciones significativas en los procesos de aprendizaje. Por último, intentaremos mostrar a los profesores la utilidad del papel como material didáctico en la construcción de conocimiento geométrico.

### **1. Introducción**

Quienes nos preocupamos por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pretendemos hacer el trabajo cotidiano comprensible y ameno. De nuestro interés por desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y explorar nuevos recursos surge la necesidad de trabajar con materiales didácticos cercanos a los alumnos y versátiles. Son numerosos los que podemos encontrar en nuestro entorno o que son de fácil elaboración (Grupo PI, 2002). En nuestro caso, hemos puesto de manifiesto que el doblado de papel (papiroflexia) puede ser un recurso didáctico importante, especialmente en el campo de la Geometría. La Geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y susceptible de ser ligada a la realidad. Sin embargo, tenemos la percepción de que sigue sin atribuírsele la importancia que le corresponde. Consideramos que la disponibilidad de materiales didácticos adecuados supone un incentivo suficientemente atractivo para rescatar a la Geometría escolar de su confinamiento.

---

<sup>1</sup> El Grupo PI está formado por estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática impartido por el departamento homónimo de la Universidad de Granada. Nuestra procedencia e intereses son muy variados (distintas nacionalidades, distintas profesiones, cuatro líneas personales de investigación...), pero nos une una profunda preocupación por el desarrollo de la Educación Matemática. Actualmente estamos trabajando (no exclusivamente en ello) en el uso de materiales didácticos aplicados a la enseñanza de la Geometría.

Consideramos materiales didácticos adecuados aquellos que se adaptan a distintas capacidades y niveles de conocimientos previos de los alumnos, permiten el tratamiento de contenidos variados, facilitan el aprendizaje, fomentan el interés y son accesibles en dos sentidos: próximos al entorno del alumno, y baratos (Grupo PI, 2002). El papel cumple con estas características y con él pretendemos acercar la Geometría a las aulas y manifestar nuestro interés por materiales didácticos adecuados.

Este trabajo viene desarrollándose y haciéndose público en distintos foros de Didáctica de la Matemática (Grupo PI, 2002; 2003a; 2003b; 2003c).

## **2. ¿Qué es la papiroflexia?**

La Papiroflexia, originada en Japón con el nombre de ORIGAMI (de Ori=plegar y Kami=papel), es el arte de hacer figuras de papel. A pesar de su origen centenario, ha sido recientemente cuando la papiroflexia se ha convertido en un tema de interés matemático.

Según la corriente más ortodoxa de la papiroflexia, sólo está permitido plegar el papel, sin usar tijeras ni pegamento. Además se deberá utilizar como punto de partida un único trozo de papel cuadrado. Pero hay muchas modalidades menos estrictas de la papiroflexia. En este trabajo seremos flexibles con estas normas, lo que redundará en una mayor y más significativa gama de actividades y de objetos matemáticos que pueden ser abordados.

## **3. La papiroflexia como recurso para la enseñanza de la Geometría.**

Entendemos que un material didáctico es cualquier objeto o recurso que, eventualmente, contribuya al desarrollo de los objetivos didácticos propuestos en un determinado programa. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a conceptualizar, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje.

El papel como material didáctico, proporciona una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar, ya que la manipulación “constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático” (Segovia y Rico, 2001, p. 86). Además, mediante ésta el estudiante “adquiere una percepción más dinámica de las ideas” (Mora, 1995, p.104). Justificamos el uso de la papiroflexia como recurso didáctico en función de los criterios de Coriat (1997, p. 159): disponibilidad, equipamiento para todos los alumnos, cierta práctica por parte del profesor y de los alumnos antes de empezar a razonar matemáticamente con ellos y temporalización adecuada que permita extraer consecuencias a la mayoría de los alumnos.

El uso del papel permite la manipulación de representaciones de los objetos geométricos, un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio mediante procesos de construcción lógicos, eficientes y económicos. Este trabajo se centra en el uso de la papiroflexia para trabajar elementos y propiedades de la Geometría Plana. Se compone de 36 fichas agrupadas temáticamente en 10 tareas y acompañadas de orientaciones didácticas. La Tabla 1 muestra la composición de una de dichas tareas. Cada una de las representaciones de los objetos matemáticos enumerados debe construirse con papel.

Tabla 1

TAREAS	FICHAS	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
TAREA 5. TEOREMAS DE THALES Y DE PITÁGORAS	13. DIVIDIR UN FOLIO EN PARTES IGUALES		X	X	
	14. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS		X	X	

De forma análoga hemos analizado las 10 tareas que componen este trabajo: (1) Construimos puntos y trazamos rectas, (2) Mediatriz y bisectriz, (3) Ángulos, (4) Transportador de ángulos, (5) Teoremas de Thales y Pitágoras, (6) Triángulos, (7) Suma de los ángulos de un triángulo, (8) Lugares notables de un triángulo, (9) Cuadriláteros, (10) Pentágono y Hexágono.

En las distintas fichas indicamos el nivel educativo mínimo para el que se aconseja y aportamos al menos una solución, aquella que hemos considerado más clara y pensamos que requiere conocimientos matemáticos básicos, pretendiendo que puedan ser de utilidad para un mayor número de estudiantes. A continuación mostramos como ejemplo una de las fichas que componen la tarea 5:

#### Ficha N° 14: Demostración del Teorema de Pitágoras

Tópicos implicados: Mediatriz, simetría, transportar distancias, diagonal y construcción triángulos rectángulos.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Papel cuadrado

#### Propuesta para el alumno

1. Con un papel cuadrado, intenta realizar una demostración del Teorema de Pitágoras.
2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

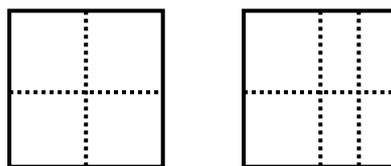
#### Instrucciones para el profesor

**Objetivos:** Percibir los elementos implicados en el teorema de Pitágoras:

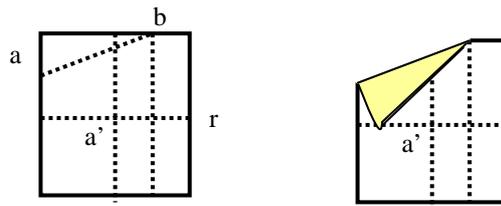
- a. Triángulo rectángulo.
- b. Comparación de Superficies.
- c. Y el propio teorema de Pitágoras.

#### Solución Ficha 18:

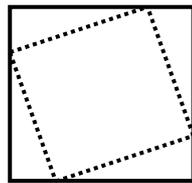
1. Cogemos un papel cuadrado y lo dividimos en cuatro cuadrados iguales. Posteriormente volvemos a dividir el lado de uno de estos cuadrados pequeños otra vez por la mitad.



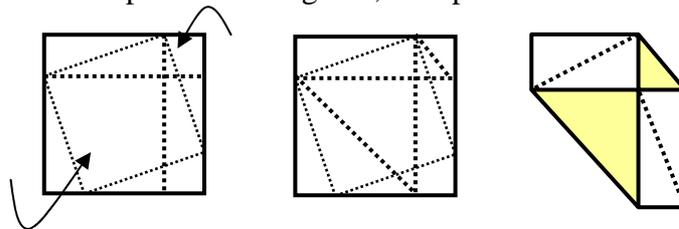
2. Llevamos el vértice a sobre el punto a' de la recta r y pasando por b construyendo así un triángulo rectángulo.



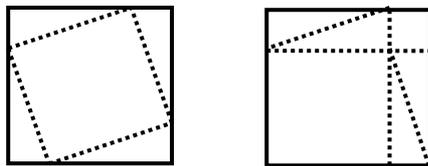
3. Repetimos el proceso con todos los vértices y desdoblamos. De esta manera hemos construido un cuadrado sobre la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo. El proceso ha sido ir construyendo perpendiculares a los vértices de la hipotenusa de los triángulos rectángulos construidos. (Nota: Este cuadrado ha salido de un triángulo rectángulo de catetos en proporción 3-1 pero es posible realizar el mismo proceso con otras relaciones).



4. A continuación construimos los cuadrados sobre los catetos. Para ello hacemos uso de la simetría del cuadrado respecto a su diagonal, transportando distancias.



5. Desdoblamos y el teorema de Pitágoras queda demostrado. Nota: Esta sólo es una de las muchas demostraciones posibles.



### Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos teorema de Pitágoras.
2. Construimos un cuadrado sobre un segmento.
3. Propiedades de un cuadrado.
4. Dibujamos esta demostración en la pizarra.

### 6. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo fundamentamos el uso coherente del papel como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría Plana. Disponemos de una amplia variedad de tareas para el trabajo con tópicos muy diversos, que abarcan la construcción de conceptos, el reconocimiento de propiedades, el establecimiento de relaciones, etc. El ejemplo que se ha mostrado podrá ayudar al profesor a decidir si el uso de este material puede facilitar o mejorar su práctica educativa en el contexto que ya se ha señalado. En la actualidad estamos trabajando en cuestiones relativas a la Geometría del Espacio, como la construcción de poliedros mediante el ensamblaje de módulos de papel.

El abanico de posibilidades no se agota aquí. Al contrario, hemos conseguido con este trabajo atisbar la potencia del papel como recurso didáctico y somos conscientes del ingente trabajo que queda por hacer.

### **Referencias**

- 1 CORIAT, M. (1997) Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.
- 2 DE LA PEÑA, J. (2001) Matemáticas y Papiroflexia. Madrid: Asociación Española de Papiroflexia
- 3 ENGEL, P. (1994) Origami From Angelfish to Zen. Dover
- 4 GRUPO PI (2002) Materiales Didácticos en la resolución de problemas. En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno, M. Peñas (Eds.). Investigación en el aula de Matemáticas. Resolución de problemas. Granada: SAEM Thales
- 5 GRUPO PI (2003a) Geometría con papel. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 6 GRUPO PI (2003b) Poliedros: lenguaje y representación espacial. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 7 GRUPO PI (2003c) Algunas reflexiones sobre la resolución del problema del tablero de ajedrez. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 8 MORA, J.A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. UNO nº 3. 101-115.
- 9 SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001) Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

### **Páginas Webs:**

[http://ddm.ugr.es/personal/grupo\\_pi](http://ddm.ugr.es/personal/grupo_pi)  
<http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm>  
<http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html>  
<http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html>  
[http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/La\\_razon\\_aurea/unidad\\_didactica.htm](http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/La_razon_aurea/unidad_didactica.htm)  
[www.pajarita.org](http://www.pajarita.org)  
[www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html](http://www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html)